JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HANOUZET
JEAN-LUC JOLY

Formes bilinéaires compatibles avec un système

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A19_0>

FORMES BILINEAIRES COMPATIBLES AVEC UN SYSTEME

par B. HANOUZET et J.L. JOLY

1. Soit $A(D) = \sum_{i=1}^{n} A_i D_i$ avec $A_i \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{C})$. On pose $A(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i$.
Soit $f : \mathbb{C}^N \times \ldots \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ une forme k-linéaire et on cherche sous quelle condition f définit une application continue - encore notée f -

$$f : W(A,X,Y) \times \ldots \times W(A,X,Y) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$(u_1,\ldots,u_k) \longmapsto f(u_1,\ldots,u_k)$$

où
$$W(A,X,Y) = \{u \in X, A(D)u \in Y\} \quad .$$

X et Y étant deux espaces de distributions contenant les fonctions $e^{i<x,\xi>}$ et tels que $e^{i\nu<x,\xi>} \to 0$ lorsque $\nu \to \infty$.

Il se trouve qu'une telle exigence limite en général beaucoup les applications k-linéaires admissibles ; en fait les formes k-linéaires f sur $\mathbb{C}^N$ doivent vérifier la condition nécessaire suivante

$$\forall\ \xi_1,\ldots,\xi_k \in \mathbb{R}^n \quad , \qquad \sum_1^k |\xi_i| \neq 0 \quad , \quad \sum_1^k \xi_i = 0 \quad ,$$

$$f(\mathrm{Ker}\ A(\xi_1),\ldots,\mathrm{Ker}\ A(\xi_k)) = 0 \quad ,$$

qu'on obtient en considérant les suites : $u_i^\nu = e^{i\nu<x,\xi_i>} p_i$, avec $p_i \in \mathrm{Ker}\ A(\xi_i)$.
De telles formes k-linéaires, on dira qu'elles sont A-compatibles.
Il est facile de remarquer que la A-compatibilité entraîne en général une limitation sur le nombre de variables.
Ainsi il existe un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de dimension m possédant la propriété que le cône

$$\bigcup_{\xi \in V} \mathrm{Ker}\ A(\xi)$$

engendre $\mathbb{C}^N$ tout entier, alors il n'existe pas de formes k-linéaires A-compatibles à plus de m variables.

En particulier, si A(D) définit un autre système fortement hyperbolique

$$A(D) = ID_t + \sum_{i=1}^{n} B_i \, D_i$$

avec

$$B(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \tau_i(\xi) \, \varpi_i(\xi)$$

$$\tau_i(\xi) \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\varpi_i(\xi) \, \varpi_j(\xi) = \delta_{ij} \, \varpi_i(\xi) \quad , \quad 1 \leq i \, , \, j \leq N \quad ,$$

alors l'ensemble V associé à un $\xi_o \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et défini par

$$V = \{(\xi_o,\tau_1(\xi_o)),\ldots,(\xi_o,\tau_N(\xi_o))\} \quad ,$$

permet de voir que les seules formes A-compatibles non triviales sont nécessairement linéaires ou bilinéaires.

On trouvera des exemples de formes A-compatibles correspondant à des systèmes classiques dans Tartar [3], Murat [2] et Hanouzet-Joly [1]. Indiquons seulement un des exemples les plus importants, qui concerne les systèmes différentiels extérieurs, où on sait décrire l'ensemble de toutes les formes compatibles : celles-ci s'obtiennent comme combinaisons linéaires des coefficients de tous les produits extérieurs non triviaux.

2. UN RESULTAT DE CONTINUITE POUR LES FORMES BILINEAIRES COMPATIBLES DANS LES ESPACES DE SOBOLEV.

Théorème : Soit s_i, t_i, $i = 1,2$ des réels vérifiant

$$s_1 + s_2 < 0$$

$$s_1 + t_2 \geq -1$$

$$s_2 + t_1 \geq -1$$

$$s_1 \geq t_1 \geq s_1 - 1$$

$$s_2 \geq t_2 \geq s_2 - 1 \quad .$$

Alors pour qu'une forme bilinéaire $f : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ définisse une application continue

$$f : W(A,H^{s_1}_{loc}(\mathbb{R}^n),H^{t_1}_{loc}(\mathbb{R}^n)) \times W(A,H^{s_2}_{loc}(\mathbb{R}^n),H^{t_2}_{loc}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow H^{s_1 * s_2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

où $s_1 * s_2 = \{s = s_1 \wedge s_2 \wedge s_1 + s_2 - \frac{n}{2} - \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$,
il faut que f soit A-compatible et il suffit que f soit régulièrement A-compatible.

<u>Remarques</u> : 1) Quoique l'espace d'arrivée $H^{s_1 * s_2}(\mathbb{R}^n)$ ne dépende pas des deux indices t_1 et t_2, ce résultat est optimal dans la classe des systèmes généraux : cf. [1].

2) Il n'est pas optimal pour les systèmes elliptiques (évidemment) ou hyperboliques.

3) La démonstration repose sur le fait que si f est A-compatible et si $f(p,q)$ s'écrit (p,Fq) on a la propriété : $\forall\ \xi \neq 0,\ \exists\ G(\xi)$ et $D(\xi) \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{C})$ telles que

$$F = {}^tA(\xi) \,.\, D(\xi) + {}^tG(\xi) \,.\, A(\xi) \quad . \tag{1}$$

On peut maintenant expliciter la dernière hypothèse de l'énoncé du théorème : on dira que f est <u>régulièrement A-compatible</u>, s'il existe une famille de solutions de (1) : $\xi \mapsto (G(\xi),D(\xi))$ homogènes de degré -1 en ξ et bornées sur $|\xi| = 1$. La démonstration se fait en utilisant l'effet régularisant via Fourier de $D(\xi)$ et $G(\xi)$.

3. <u>DEUX REMARQUES CONCERNANT LE CAS HYPERBOLIQUE.</u>

On suppose $A(D)$ fortement hyperbolique. La solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{aligned} A(D)u &= 0 \\ u(0) &= \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \right. \tag{2}$$

s'exprime, à C^∞ près,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \int e^{i(\langle x,\xi\rangle - t\,\tau_k(\xi))}\, \varpi_k(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \quad ,$$

l'intégrale ayant le sens d'une intégrale oscillante. Soit f une forme bilinéaire, alors formellement si u et v sont deux solutions du problème (2), on écrit

$$f(u,v)(x,t) = \sum_{k,\ell} \iint e^{i[\langle x,\xi+\eta\rangle - t(\tau_k(\xi)+\tau_\ell(\eta))]} f(\varpi_k(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \varpi_\ell(\eta)\hat{\psi}(\eta))\, d\xi\, d\eta \quad .$$

Pour donner un sens à cette intégrale, on doit regarder le comportement de l'amplitude au voisinage des points critiques de la phase

$$\Phi_{k\ell} = \langle x,\xi+\eta\rangle - t(\tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta)) \quad ,$$

définis par

$$\frac{\partial \Phi_{k\ell}}{\partial x} = \xi + \eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_{k\ell}}{\partial t} = \tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta) = 0 \quad .$$

Si f est A-compatible,

$$\xi + \eta = 0 \quad , \quad \tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta) = 0 \Longrightarrow f(\varpi_k(\xi), \varpi_\ell(\eta)) = 0 \quad ,$$

et par conséquent l'amplitude f s'annule sur les points critiques en général à un ordre fini sauf si $n = 1$. Dans ce dernier cas, au contraire le support conique de $f(\varpi_k(\xi), \varpi_\ell(\eta))$ est contenu dans $\{(\xi,\eta) / \xi.\eta \geq 0\}$, donc bien disjoint de l'ensemble des $\{(\xi,\eta)/\xi + \eta = 0\}$. Ceci permet de voir - d'une façon un peu compliquée ! - que f(u,v) a un sens des $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ pour des données initiales des $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, mais surtout de comprendre mieux la propriété de A-compatibilité avec un système hyperbolique.

La deuxième remarque concerne le comportement quand $t \to \infty$ du produit f(u,v).

Supposons que u et v soient solutions de (2) avec des données initiales φ et ψ telles que φ et ψ soient dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

On sait alors que, par exemple u, s'exprime exactement sous la forme précédente :

$$u(x,t) = \sum_k u_k(x,t)$$

$$u_k(x,t) = \int e^{i(\langle x,\xi\rangle - t\,\tau_k(\xi))} \varpi_k(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \quad ,$$

et que moyennant des hypothèses de régularité classiques sur les τ_k ,

$$u_k(x,t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \varpi_k(\theta^k_{x/t})\ \psi_k(x,t) \int_0^\infty e^{i\rho t[(<\frac{x}{t},\theta^k_{x/t}> - \tau_k(\theta^k_{x/t})]}$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sig}\tau''(\theta^k_{x/t})} \hat{\varphi}(\rho(\theta^k_{x/t}))\ \det \tau''(\rho(\theta^k_{x/t}))\ d\rho + O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right) ,$$

où $x/t \mapsto \theta_{x/t} \in S^{n-1}$ est uniquement définie et différentiable dans un voisinage de la k-ième nappe du cône d'onde qui contient le support de la fonction tronquante ψ_k.

Ce résultat dit que u_k, donc u, est en $O((\frac{1}{t})^{\frac{n-1}{2}})$ et par conséquent si f est une forme bilinéaire en général $f(u,v) = O((\frac{1}{t})^{n-1})$. Toutefois, utilisant l'écriture explicite de chaque u_k, il est facile de voir que

$$f(u,v) = O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^n\right) \Longleftrightarrow f \text{ A-compatible} ,$$

ce qui semble indiquer que l'interaction quadratique décrite par f est plus faible si f est A-compatible.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] B. Hanouzet, J.L. Joly : Formes multilinéaires sur des sous-espaces de distributions, Publications Analyse Appliquée et Informatique de Bordeaux I, n° 8203, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exposé XIV (1982), Note aux C.R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

[2] F. Murat : Compacité par compensation, Ann. Sc. Sup. Pisa 5, 3 (1978), 489-507.

[3] L. Tartar : Compensated compactness and applications to p.d.e. Non linear analysis and mechanics, Herriott-Watt Symposium, vol. IV, ed. P.R.J. Knops, Research Notes in Mathematics n° 39, Pitman, Londres (1979), 136-212.

***