JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DANIEL GOURDIN

Inverses d'opérateurs faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable dans la classe des opérateurs de Volterra

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A17_0>

INVERSES D'OPERATEURS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE DANS LA CLASSE DES OPERATEURS DE VOLTERRA

par D. GOURDIN

I. INTRODUCTION

On se place dans des bandes $X = [T_-,T_+] \times \mathbb{R}^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ de largeur $T_+ - T_-$ finie ou non ; le point courant de X est $x = (x_o,x')$ avec $x_o \in [T_-, T_+]$ et $x' \in \mathbb{R}^\ell$.

Les élements du fibré cotangent $T^*X = X \times \mathbb{R}^{\ell+1}$ sont notés (x,ξ) avec $\xi = (\xi_o, \xi')$, $\xi_o \in \mathbb{R}$, $\xi' \in \mathbb{R}^\ell$; $\Xi = \mathbb{R}^{\ell+1} \setminus 0$ et $\Xi' = \mathbb{R}^\ell \setminus 0$. Le champ de covecteurs $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_x)_{x \in X}$ avec $\mathcal{J}_x$ de coordonnées $\xi_o = 1$ et $\xi' = 0$ représentera le champ des directions d'hyperbolicité pour les opérateurs aux dérivées partielles considérés par la suite dans X.

On étudie deux cas d'opérateurs hyperboliques relativement à $\mathcal{J}$, à coefficients réels $C^\infty(X)$ vérifiant des hypothèses de stationnarité à l'infini [2], représentés par une équation du second ordre dans le premier cas et par deux équations du premier ordre dans le second cas.

Hypothèse 1 : Le déterminant caractéristique peut s'écrire sous la forme

$$i^2(\xi_o - \lambda_1(x,\xi'))(\xi_o - \lambda_2(x,\xi'))$$

où $\lambda_j \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(X \times \Xi')$ (j = 1 et 2).

En notant

$$\Delta_j(x,\xi) = \xi_o - \lambda_j(x,\xi') \ , \ M_j = \{(x,\xi) \in T^*X \ , \ \Delta_j(x,\xi) = 0\} \ ,$$

on suppose de plus que l'ensemble des points critiques $\mathcal{N} = M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

Sous cette hypothèse 1, on a une 2ème condition nécessaire d'hyperbolicité donnée par V.Ia. Ivrii et V. M. Petkov [6] :

$$(\hat{x},\hat{\xi}) \in \mathcal{N} \text{ et } \{\Delta_1, \Delta_2\}(\hat{x},\hat{\xi}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{K}(\hat{x},\hat{\xi}) = 0$$

où $\mathcal{K}$ est le sous-caractéristique de l'équation ou du système considéré. Petkov [14] a conjecturé la condition suffisante d'hyperbolicité suivante (voisine de la condition nécessaire) :

(L) "il existe un symbole c d'opérateur pseudo-différentiel sur X tel que :

$$\mathcal{K} = c\{\Delta_1, \Delta_2\} \quad \text{sur } \mathcal{N}\text{"}$$

Dans cette formulation générale, cette conjecture n'a jamais été démontrée à ma connaissance ; seuls de nombreux cas particuliers ont été examinés :
V. Ia. Ivrii [7] établit la C.N.S. d'hyperbolicité forte :

$$\{\Delta_1,\Delta_2\} \neq 0 \quad \text{sur } \mathcal{N}.$$

V. M. Petkov [13] et Y. Ohya [12] montrent la condition suffisante d'hyperbolicité faible suivante : " $\mathcal{K}$ et $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ nuls sur $\mathcal{N}$ " (cas involutif).
T. Nishitani [10] améliore cette condition sous la forme :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \{\Delta_1, \Delta_2\} \quad \text{sur } \mathcal{N}.$$

Ces conditions suffisantes d'hyperbolicité faible ont été étendues au cas d'un système de n équations dans [1] sous la forme :

$$\mathcal{K} = \pm\frac{1}{2} \{\Delta_1, \Delta_2\} \quad \text{sur } \mathcal{N}.$$

Après les travaux de L. Hörmander [5] et V.Ia. Ivrii [8] établissant d'autres conditions suffisantes d'hyperbolicité portant sur $\mathcal{K}$, le hessien de P_2 (cf (1)) et utilisant la géométrie symplectique de T^*X, R. Lascar [9] a construit une paramétrix microlocale sous la condition nécessaire d'Ivrii-Petkov citée plus haut et sous la condition

$$\{\Delta_j, \{\Delta_1, \Delta_2\}\}\ (x,\xi) \neq 0 \qquad (j = 1,2)$$

$$\forall (x,\xi) \in \mathcal{P} = \{(x,\xi) \in T^* X \ ; \ \Delta_1(x,\xi) = \Delta_2(x,\xi) = \{\Delta_1, \Delta_2\}\ (x,\xi) = 0\}$$

dans une situation où les formes normales du hessien aux points caractéristiques doubles ne sont pas d'un type constant.

Nous allons examiner un autre cas particulier de (L) lorsque

$$\{\Delta_j, \{\Delta_1, \Delta_2\}\}(x,\xi) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{P}$$

Ce travail a été résumé dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [3] et doit paraître au Bulletin des Sciences Mathématiques [4] .

II. CAS D'UNE EQUATION DU SECOND ORDRE

§ 1. Hypothèses et résultats

On note :

$$D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\ , \ D' = (D_1, \ldots, D_\ell)\ , \ D = (D_0, D').$$

(1) $P(x,D) = P_2(x,D) + P_1(x,D) + P_0(x,D)$ est la décomposition de P en opérateurs différentiels à symboles homogènes en ξ de degré successifs 2, 1, 0.

$$P_2(x,\xi) = i^2\ \Delta_2\ \Delta_1 \quad \text{avec} \quad \Delta_j(x,\xi) = \xi_0 - \lambda_j(x,\xi') \qquad (j = 1,2).$$

$$\mathcal{K}(x,\xi) = P_1'(x;\xi) = P_1(x,\xi) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \cdot \partial x_\alpha}\ P_2(x,\xi)$$

Hypothèse 2

(L') Il existe α constante réelle et $\delta \in S_0'(X \times \Xi')$ (espace de symboles d'ordre 0 en x' [2]) tels que :

$$(\mathcal{K} + \frac{1-2\alpha}{2}\{\Delta_1\ , \Delta_2\})(x\ ;\ \xi_0 = \lambda_1, \xi') = \delta(x,\xi')(\lambda_1 - \lambda_2)(x,\xi').$$

On montre que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse de décomposition de P en opérateurs différentiels en x_0 et pseudo-différentiel en x' suivante :

Lemme 1 [3]

(L') $\Longleftrightarrow$ il existe α constante réelle et des opérateurs $\partial_j = i(D_o - \Lambda_j(x,D'))$ où $\Lambda_j(x,D')$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal $\lambda_j(x,\xi')$ tels que

(2) $$P = \partial_2 \partial_1 + \alpha [\partial_1, \partial_2] + r \quad \text{dans } X$$

où r est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre O en x' .

Hypothèse 3

(C) Lorsque $\alpha \geqslant 0$, il existe β et γ constantes réelles telles que $\beta^2 + 4\gamma \geqslant 0$ et $\{\{\Delta_2, \Delta_1\}, \Delta_1\} = \beta\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1)$

ou

(C') Lorsque $\alpha \leqslant 1$, il existe β et γ constantes réelles telles que $\beta^2 + 4\gamma \geqslant 0$ et $\{\{\Delta_1, \Delta_2\}, \Delta_2\} = \beta\{\Delta_1, \Delta_2\} + \gamma(\Delta_1 - \Delta_2))$.

On considère les espaces de Sobolev suivants :

$$\mathcal{H}_{s,o}([T_-,T_+] \times \mathbb{R}^\ell) = \{u \in L^2(]-\infty,T_+], H_s(\mathbb{R}^\ell)) \; ; \; \text{supp}\, u \subset [T_-,+\infty[\times \mathbb{R}^\ell\},$$

$$\mathcal{H}_{s,o}(]-\infty,T_+] \times \mathbb{R}^\ell) = \bigcup_{t < T_+} \mathcal{H}_{s,o}([t,T_+] \times \mathbb{R}^\ell),$$

$$\mathcal{H}_{s,o}([T_-,+\infty[\times \mathbb{R}^\ell) = \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H_s(\mathbb{R}^\ell)) \; ; \; \text{supp}\, u \subset [T_-,+\infty[\times \mathbb{R}^\ell\},$$

$$\mathcal{H}_{s,k}(X) = \{u \; ; \; D_o^j u \in \mathcal{H}_{s-j,o}(X) \quad \text{pour } j = 0,\dots,k\}.$$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1 [3] : Sous les hypothèses 1,2,3 le problème de Cauchy à "données nulles"

(3) $$Py = f \qquad (f \in \mathcal{H}_{t,p}(X))$$

possède une solution et une seule $y \in \mathcal{H}_{t-[\rho],p+1-[\rho]}(X)$ avec $\rho = \alpha$ si (C) est vérifiée et $\rho = 1 - \alpha$ si (C') est vérifiée. ($[\rho]$ = partie entière de ρ).

§ 2. Démonstration du théorème 1

L'idée est basée sur le lemme suivant, dont la démonstration est évidente par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et on utilise une méthode voisine de celle d'Ivrii [7].

Lemme 2 [7]

(i) Soit $Q = \partial_2 \; \partial_1 + n \, [\partial_1, \partial_2]$ $(n \in \mathbb{N})$ tel que

(ii) $[\partial_j, [\partial_1, \partial_2]] = 0$ $(j = 1,2)$,

(iii) alors $\partial_1^{-n} \, Q \; \partial_1^{n} = \partial_2 \, \partial_1$.

On va généraliser le lemme 2 pour qu'il s'applique à la décomposition (2) en utilisant l'hypothèse 3 qui est plus faible que (ii) . On obtiendra une égalité analogue à (iii) qui permettra de résoudre le problème (3) en calculant les inverses à droite et à gauche de P. Pour cela, définissons ∂_1^{α} avec α constante réelle .

ⓐ Définition de ∂_1^{α} [7] .

Elle s'inspire de la représentation de Riemann-Liouville des opérateurs de dérivation :

$$D_0^n \, u(x_0) = \frac{1}{(m-n)!} \int_0^{+\infty} t^{m-n-1} (D_0^m u)(x_0 - t)\,dt \quad \forall\, m \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ et } m > n .$$

On en déduit la représentation suivante de ∂_1^{α} $(\alpha \in R)$.

$$\partial_1^{\alpha} = \Gamma^{-1}(m-\alpha) \int_0^{+\infty} t^{m-\alpha-1} \, U_1(t) \, \partial_1^{m} \, dt \tag{4}$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \alpha$ avec $U_1(t)$ semi-groupe de générateur $-\partial_1$ [15] .

Existence de (4) : On utilise les classes suivantes d'opérateurs de Volterra

$$\mathcal{L}_{t,m}(X) = \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ k = m_+, m_+ + 1, \ldots}} \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,k}(X), \mathcal{H}_{s-t,k-m}(X))$$

($t \in \mathbb{R}$ est l'ordre global en x et $m \in \mathbb{Z}$ l'ordre partiel en x_0; $m_+ = \sup(m,0)$), avec

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,k}(X),\ \mathcal{H}_{s-t,k-m}(X)) = \{a \text{ opérateurs linéaires continus tels que } \operatorname{supp} u \subset [T,+\infty[\times\mathbb{R}^{\ell} \Rightarrow \operatorname{supp} a\, u \subset [T,+\infty[\times\mathbb{R}^{\ell}\}$$

sur lequel on met une topologie d'espace de Fréchet (de Banach quand X est de largeur finie) définie par les semi-normes

$$\| a\|_{X',s,k} = \| \gamma_{X'X} a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,k}(X'),\ \mathcal{H}_{s-t,k-m}(X'))}$$

où X' est de largeur finie et $X' \subset X$ et $\gamma_{X'X}\, a$ désigne la restriction de a à X'.

$$\mathcal{L}^{o}_{t,m}(X) = \{a \in \mathcal{L}_{t,m}(X)\ ;\ \| a\|_{X',s,k} \xrightarrow[T'_+-T'_-\to 0]{} 0 \quad ,\ \forall X' = [T'_-,T'_+]\times\mathbb{R}^{\ell}\subset X,\ \forall s\in \mathbb{R},\ \forall k = m_+,\dots\}$$

Propriété 1

* $\mathcal{L}^{o}_{t,m}\, \mathcal{L}_{t',m'} \subset \mathcal{L}^{o}_{t+t',m+m'}$

* $L_{t,m}(X) = \{$opérateurs pseudodifférentiels d'ordre t en x et m en x_o de symboles dans $S_{t,m}(X\times\Xi)$ prolongeables en fonctions analytiques de ξ_o dans $\mathbb{C}_- \setminus \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}_{t,m}(X)$ où $\mathbb{C}_- = \{z\in\mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$.
* Les opérateurs du type $I + A$ avec $A \in \mathcal{L}^{o}_{o,o}(X)$ sont inversibles sous la forme $I + B$ avec $B \in \mathcal{L}^{o}_{o,o}(X)$.
* $U_1(t) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} C^p([0,+\infty[\ ,\ \mathcal{L}_{p,p}(X))$

* $\gamma_{X'X}\, U_1(t) = 0$ si $t > T'_+ - T'_-$ = largeur de X', $\forall X' \subset X$.

Alors ∂_1^{α} a un sens comme élément de $\mathcal{L}_{([\alpha]+1)_+,\ ([\alpha]+1)_+}(X)$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{L}_{([\alpha]+1)_+,([\alpha]+1)_+}(X)$ convergente en 0 ($m-\alpha-1 > 1$) et à l'infini d'après les propriétés de $U_1(t)$.

Propriété 2

* ∂_1^{α} est indépendant de $m\in\mathbb{N}$ tel que $m > \alpha$ et $\partial_1^{\alpha} \in \mathcal{L}_{([\alpha]+1)_+,\ [\alpha]+1}(X)$

* ∂_1^{α} est un élément d'une classe $L_{s,k,\varepsilon}(U_1,X)$ formée par les opérateurs intégro pseudo-différentiels de la forme

$$A(x,D) = \int_0^{+\infty} a(t,x,D)\,U_1(t)\,dt \tag{5}$$

où $a(t,x,D) \in L_{s,k}(X)$ vérifie : $t^{1-\varepsilon+q}(\frac{d}{dt})^q a(t,x,D) \in L_\infty(]0,T], L_{s,k}(X))$

pour $\forall\, T > 0$ et $\forall\, q \in \mathbb{N}$.

$\partial_1^\alpha \in L_{[\alpha]+1,[\alpha]+1,\varepsilon}(U_1,X)$ $(\forall\, \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < [\alpha] + 1 - \alpha)$ si $\alpha \geq 0$ et

$\partial_1^\alpha \in L_{o,o,\varepsilon}(U_1,X)$ si $\alpha < 0$.

* $L_{s,k}(X) \subset L_{s+1,k+1,\varepsilon}(U_1,X)$ et $L_{s,k,\varepsilon}(U_1,X) \subset \mathcal{L}^o_{s,k}(X)$

* L'ensemble des opérateurs intégro-pseudo-différentiels attachés au même semi groupe U_1 forme une algèbre de composition.

(b) Réductions sur P

On a d'abord un lemme généralisant le lemme 2

Lemme 3 [4]

Sous les hypothèses 1) 2) 3) on a :

$$(6) \qquad P' = \partial_1^{-\alpha} P\, \partial_1^\alpha = \partial_2\, \partial_1 + r + R_1 + R_2$$

$$(\text{resp. } P'' = \partial_2^{-(1-\alpha)} P\, \partial_2^{1-\alpha} = \partial_1\, \partial_2 + r' + R_1' + R_2') \quad \text{avec}$$

r et $r' \in L_{o,o}(X)$, $R_1 \in L_{1,0,1}(U_1,X)$, $R_2 \in L_{o,o,1}(U_1,X)$, $R_1' \in L_{1,0,1}(U_2,X)$ et $R_2' \in L_{o,o,1}(U_2,X)$.

Ce lemme est long à démontrer ; le commutateur disparaît de (2) mais il vient à sa place dans P' et P" un terme intégro pseudo différentiel d'ordre global 1 en x et d'ordre partiel 0 en x_o (les autres termes sont négligeables) ; on va le faire disparaître en utilisant un deuxième lemme de réduction.

Lemme 4 [4]

Sous l'hypothèse 3 (c), $\exists\, b$ et $\bar{b} \in L_{o,o,1}(U_1,X)$ dont les noyaux pseudo différentiels admettent le même symbole principal $b_o(t)$ indépendant de x et ξ tels que

$$(7) \qquad (I+b)(\partial_2\, \partial_1 + r + R_1 + R_2) = (\partial_2\, \partial_1 + \partial_2 \sigma + s + S)(I+\bar{b})$$

avec σ et S dans $L_{o,o,1}(U_1,X)$ et $s \in L_{o,o}(X)$.

Sous l'hypothèse 3(C') on a un résultat analogue.

ⓒ Calcul des inverses de P

Proposition 1 [4]

Sous les hypothèses 1) 2) 3) il existe des inverses à gauche $\mathcal{R}_g$ et à droite $\mathcal{R}_d$ de P , de classe $\mathcal{L}^o_{[\rho],[\rho]-1}(X)$ avec $\rho = \alpha$ (resp $\rho = 1-\alpha$) si (C) (resp (C') est vérifiée.

Preuve (prenons par exemple $\alpha \geqslant 0$)

D'après (6) et (7) on a :

$$(8) \qquad (I+b)\,\partial_1^{-\alpha}\; P\; \partial_1^{\alpha}\,(I+\bar{b})^{-1} = \partial_2(\partial_1+\sigma) + s + S = P''' \; .$$

Soit

$$(9) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_j = \int_o^{+\infty} U_j(t)\; dt \in L_{o,o,1}(U_j, X) \; ; \text{ alors} \\ \partial_j\, \mathcal{R}_j = \mathcal{R}_j\, \partial_j = I \qquad (j=1,2). \end{cases}$$

D'après (8), (9) et la propriété 1 ,

$\mathcal{R}'_d = \mathcal{R}_1(I + \sigma\mathcal{R}_1)^{-1}\mathcal{R}_2(I + (s+S)\mathcal{R}_1(I+\sigma\mathcal{R}_1)^{-1}\mathcal{R}_2)^{-1}$ existe et représente un inverse à droite de P''' dans X .

Donc $\mathcal{R}_d = \partial_1^{\alpha}(I+\bar{b})^{-1}\mathcal{R}'_d(I+b)\,\partial_1^{-\alpha}$ est un inverse à droite de P dans X ; on a de même un inverse à gauche $\mathcal{R}_g$ de P. D'où l'existence de la solution $y = \mathcal{R}_d f$ de (3) et son unicité.

III. CAS D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Soit

$$h(x,D) = h_1(x,D) + h_o(x,D)$$

l'opérateur de ce système décomposé en opérateurs à symboles homogènes en ξ de degrés successifs 1 et O .

On note

$$(10)\quad \begin{cases} h_1(x,\xi) = iH(x,\xi) = i\begin{pmatrix} H_1^1 & H_2^1 \\ H_1^2 & H_2^2 \end{pmatrix} \text{ la matrice caractéristique et} \\[2ex] A(x,\xi) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \text{ la matrice des cofacteurs de } H\,. \\[2ex] \det H = i^2\ \Delta_2\ \Delta_1 \quad \text{avec} \quad \Delta_j(x,\xi) = \xi_o - \lambda_j(x,\ \xi') \quad (j = 1,2)\,, \\[1ex] \mathcal{K} \text{ le polynome sous caractéristique associé à } h\ \ [1]\quad . \end{cases}$$

Hypothèse 4

$$\operatorname{Inf}\ \{|A_1^1\ (x;\ \lambda_j(x,\xi'),\ \xi')|\quad ;x \in X\ ,\ \ |\xi'| = 1,\ \ j = 1 \text{ et } 2\} > 0$$

Théorème 2 [3]

Sous les hypothèses 1), 2), 3), 4) le problème de Cauchy

$$(11)\qquad hy = f \quad \text{dans } X \quad \text{avec } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad ,f_j \in \mathscr{H}_{t,p}(x)\ ,$$ possède une solution et une seule $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avec

$$y_j \in \mathscr{H}_{t-1-[\rho],p-[\rho]}(X) \quad \text{et} \quad \rho = \alpha \quad (\text{resp } 1-\alpha) \text{ si (C) (resp (C')) est}$$ vérifiée.

Preuve : (on prend le cas $\alpha \geqslant 0$, le cas $\alpha \leqslant 1$ est analogue).

L'hypothèse 2 équivaut à l'existence de $a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ et $a' = \begin{pmatrix} a'^1_1 & a'^1_2 \\ a'^2_1 & a'^2_2 \end{pmatrix}$

différentiels en x_o et pseudo différentiels en x' d'ordre 1 (de symbole principal commun A) et des opérateurs $\partial_j = i(D_o - \Lambda_j(x,D'))$ tels que

$$(12)\qquad k = h\ a = (\ \partial_2\ \partial_1 + \alpha[\partial_1,\partial_2]\ )\,I + r$$

$$(13)\qquad k' = a'h = (\partial_2\ \partial_1 + \alpha[\partial_1\ ,\ \partial_2]\ )\,I + r'$$

avec r et r' matrices d'opérateurs de $L_{o,o}(X)$.

Comme dans II, on calcule un inverse à droite $\mathcal{R}'_d$ de k et un inverse à gauche $\mathcal{R}'_g$ de k' ; d'où les inverses $\mathcal{R}_d = a\,\mathcal{R}'_d$ et $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}'_g a'$ de h et l'existence et l'unicité de la solution $y = \mathcal{R}_d f$ de (11).

BIBLIOGRAPHIE

D. GOURDIN

[1] Comm. in Partial Diff. Equations 4 (5) p. 447-507 (1979).

[2] Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes de M. J. Vaillant (Paris VI). Exposé de Janvier 1981.

[3] C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (mai 1981) Série I, p.789-791.

[4] Problème de Cauchy faiblement hyperbolique. A paraître dans Bull.Sc. Math. (1982)

L. HÖRMANDER

[5] Journal d'Analyse Mathématiques, Vol. 32 (1977) p.118-196.

V. Ia. IVRII et V. M. PETKOV

[6] Uspehi Math. Nayk, 29, 5 (1974) p.3-70.

V. Ia IVRII

[7] Transl. Moscow Math. Soc. 1978, Issue 1, p. 1-65.

[8] Travaux de Soc. Math. Moscou (1976) p. 169-170.

R. LASCAR

[9] C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (Octobre 1978) p.523-525.

T. NISHITANI

[10] Comm. in Partial Differential Equations (3) 4 p. 319-333 (1978).

[11] Comm. in Partial Diff. Equations (5) 12 p. 1273-1296 (1980).

T. OHYA

[12] Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa, IV, 4, 1977, p. 757-807.

V. M. PETKOV

[13] Journal Bulgare de Mathématiques T1, 1975, p. 372-380.

[14] Publications de l'Université de Paris VI et CNRS-Laboratoire associé 189 n° 75012 (1975).

H. KUMANO-GO

[15] Comm. in Partial Diff Equations 1 (1), 1-44 (1976).