Journées Équations aux dérivées partielles

Alain Bachelot

Opérateurs de convolution définis à partir d'une forme quadratique

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A16_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPERATEURS DE CONVOLUTION DEFINIS A PARTIR D'UNE FORME QUADRATIQUE

par A. BACHELOT

Introduction

On étudie des familles à un paramètre d'opérateurs de convolution définis à partir d'une forme quadratique.

Exemple 1 : Q étant une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, pour $r \in \mathbb{R}$ on définit une mesure $d\mu_r$ portée par la nappe $\{Q=r\}$ par

$$d\mu_r = \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\left| \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right|_{Q=r}}$$

On construit une famille d'opérateurs (T_r) en posant

$$T_r \cdot = \widehat{d\mu_r} * \cdot$$

Exemple 2 : Soit (KG_m) l'équation de Klein Gordon de masse m :

$$(KG_m) \quad u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = 0$$

Les solutions élémentaires $(E_m^+)_{0<m}$ (respectivement E_m^-) de support dans le cône avenir (respectivement passé) forment une famille d'opérateurs paramétrée par m.

Strichartz [5] [6] a établi que ces opérateurs opéraient de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour p,q convenables. On étudie ici la continuité par rapport au paramètre de ces applications à valeur dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$. La motivation principale de cette étude est la résolution du problème inverse de diffusion pour l'équation non linéaire de Klein Gordon où on utilise la convergence des solutions de (KG_m) vers la solution de l'équation des ondes quand $m \longrightarrow 0$. Dans la partie 1 on s'intéresse au problème inverse de diffusion non linéaire. Dans la partie 2 on établit la convergence des solutions de (KG_m) quand $m \longrightarrow 0$ en étudiant la continuité des applications

$$r \longmapsto \widehat{d\mu_r} *$$

$$m \longmapsto E_m^{\pm} *$$

Dans la partie 3 on énonce un résultat de continuité par l'application

$$d\mu \longmapsto \widehat{d\mu} *$$

où $d\mu$ appartient à la fermeture vague de l'espace vectoriel engendré par les $d\mu_r$, $r_o \leq r \leq r_1$.

§ 1 Problème inverse de diffusion non linéaire

Soit (NLKG) l'équation non linéaire de Klein Gordon :

$$\text{(NLKG)} \quad u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = q(x)|u|^2 u \ ; \ x \in \mathbb{R}^3$$

On note $\|\circ\|_e$ la norme de l'énergie. Le problème direct de diffusion à petite énergie est résolu dans [4]

Proposition : Si $q \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ il existe $\rho > 0$ tel que si u_- est une solution de (KG_m) satisfaisant

$$\|u_-\|_e \leq \rho$$

il existe une unique solution u de (NLKG) et une unique solution u_+ de (KG_m), d'énergie finie vérifiant

$$\|u(t) - u_{\pm}(t)\|_e \longrightarrow 0 \quad \text{si } t \longrightarrow \pm\infty$$

On définit l'opérateur de diffusion S par

$$u_+ = Su_-$$

Le problème inverse consiste à déterminer q à partir de S (voir [1] [2] [3]) On a le résultat suivant

Théorème 1 : Si $q \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, l'opérateur S détermine complètement q.

Remarque 1 : La connaissance de S sur un voisinage de l'origine d'un espace de solutions très régulières de (KG_m) suffit.

Remarque 2 : On verra que l'on a une formule explicite de résolution.

Remarque 3 : On a le même résultat dans le cas d'interactions analytiques du type

$$\sum_{n\geq 1} q_n(x) \, |u|^{2n} u$$

où $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ ([2])

Démonstration : Pour u,v dans $C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}^3_x))$ on définit le wronskien de (u,v), $W(u,v)$ par

$$W(u,v) = \int (u\bar{v}_t - u_t\bar{v}) \, dx$$

Si $u_\pm$, $v_\pm$ sont solutions de (KG_m), $W(u_\pm , v_\pm)$ est constant. Soient u et v solutions de (NLKG) telles que

$$\|u(t)-u_\pm(t)\|_e \longrightarrow 0, \ t \longrightarrow \pm\infty \ ; \ \|v(t)-v_\pm(t)\|_e \longrightarrow 0, \ t \longrightarrow \pm\infty .$$

Alors on a

$$W(u_+ , v_+)-W(u_-,v_-) = \iint q\, u\, \bar{v}(|u|^2 - |v|^2) \, dt \, dx$$

Or, si R_m désigne le propagateur de $(KG)_m$, u vérifie

$$u(t) = u_-(t) + \int_{-\infty}^{t} R_m(t-s) \underset{x}{*} q|u(s)|^2 u(s) \, ds$$

On applique l'estimation $L^{4/3}$-L^4 de R_m (voir [4]) :

$$\|u(t)-u_-(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq c \int_{-\infty}^{t} |t-s|^{-1/2} \|u(s)\|^3_{L^4(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

Par le théorème d'intégration fractionnaire il vient :

$$\|u-u_-\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \leq c' \, \|u\|^3_{L^4(\mathbb{R}^4)}$$

Donc si $\|u_-\|_{L^4(\mathbb{R}^4)}$ est assez petite, u est obtenu comme point fixe d'une application contractante dans $\{u \in L^4(\mathbb{R}^4)/\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \leq 2\,\|u_-\|_{L^4(\mathbb{R}^4)}\}$.

Si bien que l'on a l'estimation :

$$\|u-u_-\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \leq 8\,c'\,\|u_-\|^3_{L^4(\mathbb{R}^4)}$$

Soit maintenant φ une solution de (KG_m) ; pour $\varepsilon > 0$ assez petit on choisit $u_- = \varepsilon\varphi$, $v_- = \varepsilon^2\varphi$; en appliquant l'estimation précédente il vient

$$W(S(\varepsilon\varphi),\ S(\varepsilon^2\varphi))-\varepsilon^3 W(\varphi,\varphi) = \varepsilon^5 \iint q|\varphi|^4\, dt\, dx + O(\varepsilon^7)$$

A présent fixons $x_o \in \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Soit φ_λ la solution de (KG_m) telle que $\varphi_\lambda(o,x) = 0$ $\quad \varphi_{\lambda_t}(o,x) = \lambda\, g(\lambda(x-x_o))$. On pose

$x' = \lambda(x-x_o)$, $t' = \lambda t$ et $u_\lambda(t',x') = \varphi_\lambda(t,x)$; il vient

$$\iint q(x_o+\frac{x'}{\lambda})|u_\lambda(t',x')|^4 dt'\, dx' = \lambda^4 \lim_{\varepsilon\to o} \varepsilon^{-5}[W(S(\varepsilon\varphi_\lambda),S(\varepsilon^2\varphi_\lambda))-\varepsilon^3 W(\varphi_\lambda,\varphi_\lambda)]$$

On remarque que u_λ est solution de

$$u_{t't'} - \Delta_{x'}u + (\frac{m}{\lambda})^2\, u = 0$$

$$u(o,x') = 0$$

$$u_{t'}(o,x') = g(x')$$

Il suffit d'établir la convergence forte dans $L^4(\mathbb{R}^4)$ des solutions de (KG_m) quand $m \longrightarrow 0$ pour avoir

$$q(x_o)=[\iint|u_\infty|^4 dt\, dx]^{-1}\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^4 \lim_{\varepsilon\to o} \varepsilon^{-5}[W(S(\varepsilon\varphi_\lambda),S(\varepsilon^2\varphi_\lambda))-\varepsilon^3 W(\varphi_\lambda,\varphi_\lambda)]$$

où u_∞ est solution de

$$\square\, u_\infty = 0\ ;\ u_\infty(0) = 0\ ;\ u_{\infty_t}(0,x) = g(x)$$

§ 2 Convergence des solutions de l'équation de Klein Gordon quand $m \longrightarrow 0$.

Strichartz [5] [6] a montré l'appartenance à $L^q(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ des solutions de (KG_m) ; Reprenant la technique d'interpolation de Stein on obtient le résultat de continuité par rapport à m suivant :

Théorème 2 : Soit $m \geq 0$; On note u_m la solution de

$$u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = h(t,x) \ ; \ x \in \mathbb{R}^n$$

$$u(o,x) = f(x) \ , \ u_t(o,x) = g(x)$$

Pour $n \geq 2$ on a les résultats suivants

1) Si $m, m_o > 0$, et si $f \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, alors u_m converge vers u_{m_o} dans $L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1})$ quand $m \longrightarrow m_o$ pour p, p' vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ ; \quad 2\ \frac{n+2}{n} \leq p' \leq 2\ \frac{n+1}{n-1}$$

2) Si $f \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ et si g vérifie $|\xi|^{-1/2}\hat{g}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors u_m converge vers u_o dans $L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1})$ quand $m \to 0$ pour p, p' vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ ; \ p' = 2\ \frac{n+1}{n-1}$$

Idée de la preuve

On s'intéresse tout d'abord à la solution de l'équation homogène (h=0). Par [6] les applications $(f,g) \longmapsto u_m$ sont équicontinues si bien qu'il suffit de montrer la convergence sur un sous-ensemble dense de données. u_m peut être écrit

$$u_m(t,x) = \mathfrak{F}^{-1}_{\tau,\xi}\ [\tfrac{1}{2}(\sqrt{m^2+|\xi|^2}\ \hat{f}(\xi) + i\,\mathrm{sgn}(\tau)\hat{g}(\xi))\ d\mu_{m^2}$$

où $d\mu_{m^2}$ est la mesure donnée par

$$< d\mu_{m^2}, \varphi(\tau,\xi) > \ = \int (\varphi(\sqrt{m^2+|\xi|^2},\xi) + \varphi(-\sqrt{m^2+|\xi|^2},\xi))(m^2+|\xi|^2)^{-1/2}\ d\xi$$

On suppose que $\hat{f}$, $\hat{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ si bien que $u_m - u_{m_o}$ peut s'écrire :

$$u_m - u_{m_o} = F_m * \mathfrak{F}^{-1}_{\tau,\xi}(d\mu_{m^2} - d\mu_{m_o^2})$$

$$+ \mathfrak{F}^{-1}_{\tau,\xi}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+|\xi|^2} - \sqrt{m_o^2 + |\xi|^2}\right) \hat{f}(\xi)\, d\mu_{m_o^2}\right]$$

où $(F_m)_m$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Le dernier terme de cette égalité tend vers 0 dans $L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1})$ d'après [6]. Il suffit alors d'établir le résultat suivant :

<u>Lemme 1</u> : $\widehat{d\mu}_{m^2} * \cdot \longrightarrow \widehat{d\mu}_{m_o^2} * \cdot$ simplement dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^{n+1}), L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1}))$ quand $m \longrightarrow m_o$.

Pour cela considérons la famille analytique d'opérateurs suivante

$$T^z_m = \gamma(z)\, \mathfrak{F}[(-\tau^2+|\xi|^2+m^2)^z_+ - (-\tau^2+|\xi|^2+m_o^2)^z_+]$$

où γ est une fonction holomorphe qui annule les pôles des fonctions méromorphes à valeurs distributions $(-\tau^2+|\xi|^2+m^2)^z_+$ et dont $z = -1$ est zéro simple si bien que

$$T^{-1}_m \cdot = (\widehat{d\mu}_{m^2} - \widehat{d\mu}_{m_o^2}) * \cdot$$

D'une part $T^{i\sigma}_m$ converge simplement vers 0 dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n+1}), L^2(\mathbb{R}^{n+1}))$ quand $m \longrightarrow m_o$. D'autre part $(T^z_m)_m$ est équibornée dans $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^{n+1}), L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$ pour $-\frac{n+2}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq -\frac{n+1}{2}$ si $m_o \neq 0$ et pour $\operatorname{Re} z = -\frac{n+1}{2}$ si $m_o = 0$; le résultat suit par interpolation.

Le théorème pour la solution de l'équation inhomogène suit de l'étude de la convergence des opérateurs $E^{\pm}_m *$ quand $m \longrightarrow m_o$. On a le résultat suivant :

<u>Lemme 2 :</u> $E^{\pm}_m * \longrightarrow E^{\pm}_{m_o}$ simplement dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^{n+1}), L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1}))$,

Suivant [5] on considère la famille analytique d'opérateurs $(P^z_{m\pm})_m$ définie par

$$P^z_{m\pm}\, h = \lim_{\sigma\to o^\pm} \mathcal{F}^{-1}_{\tau,\xi}\, [((-\tau^2+|\xi|^2+m^2+\sigma^2-2i\sigma\tau)^z-(-\tau^2+|\xi|^2+m_o^2+\sigma^2-2i\sigma\tau)^z)\hat{h}(\tau,\xi)]$$

On a

$$P^{-1}_{m^\pm}\, . = (E^\pm_m - E^\pm_{m_o}) * .$$

D'une part $P^{iy}_{m\pm}$ converge simplement vers 0 dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n+1}),\ L^2(\mathbb{R}^{n+1}))$ quand $m \longrightarrow m_o$ et d'autre part il suit de [5] que $P^z_{m\pm}$ est équibornée dans $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^{n+1}),\ L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$ pour $-\frac{n+2}{2} \le \mathrm{Re} z \le -\frac{n+1}{2}$ si $m_o \ne 0$ et pour $\mathrm{Re} z = -\frac{n+1}{2}$ si $m_o = 0$. On obtient le résultat par interpolation.

§ 3 Continuité de l'application $d\mu \longrightarrow \widehat{d\mu}\, *$

Dans cette partie on généralise le lemme 1 de la partie 2.

Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$; les mesures $d\mu_r$ sont définis comme dans l'exemple 1 ; pour r_o , r_1 dans $\mathbb{R}$ on note $E(r_o,r_1)$ l'adhérence vague de l'espace vectoriel engendrée par les mesures $d\mu_r$, $r_o \le r \le r_1$. Dans le cas de la forme de Lorentz , $E(r_o,r_1)$ a une interprétation simple :

Proposition : Dans le cas de la forme quadratique de Lorentz $Q(x) = x_1^2 +\dots+ x_{n-1}^2 - x_n^2$, $E(r_o,r_1)$ coïncide avec l'ensemble de toutes les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$, invariantes sous l'action du sous-groupe propre de Lorentz, de support dans $\{r_o \le Q(x) \le r_1\}$ et, dans le cas où $0 \in [r_o,r_1]$, ne changeant pas l'origine.

On note (α,β) la signature de Q et on énonce le théorème de continuité.

Théorème 3 : L'application $d\mu \longmapsto \widehat{d\mu}\, *$ est séquentiellement continue de $E(r_o,r_1)$ muni de la topologie vague dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n),L^{p'}(\mathbb{R}^n))$ muni de la topologie de la convergence simple pour p , p' , n vérifiant

1) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

2) si $0 \in [r_o ,r_1]$ alors $3 \le n$ et $p = \frac{2n}{n+2}$

3) si $0 \notin [r_o ,r_1]$ et $\alpha = n$, $\beta = 0$, $r_o > 0$ ou $\alpha = 0, \beta = n$ et $r_1 < 0$

alors $1 \leq p \leq 2\,\frac{n+1}{n+3}$

4) Si $0 \notin [r_o, r_1]$ et $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $3 \leq n$, alors $\frac{2n}{n+2} \leq p \leq 2\,\frac{n+1}{n+3}$

Dans [6] Strichartz montre que pour p convenable la transformée de Fourier d'un élément f de $L^p(\mathbb{R}^n)$ admet une restriction à la nappe $\{Q=r\}$ dans $L^2(\{Q=r\}, d\mu_r)$. La proposition suivante, déduite du théorème 3, étudie la continuité de l'application $r \longrightarrow \hat{f}\, d\mu_r$

<u>Proposition</u> : L'application P définie par

$$E(r_o, r_1) \times L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

$$(d\mu\ ,\ f) \longrightarrow \hat{f}\ .\ d\mu$$

où $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$, est séquentiellement continue si on munit $E(r_o, r_1)$ de la topologie vague, $L^p(\mathbb{R}^n)$ de la topologie forte, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie vague et si p, n vérifient les conditions du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bachelot : Problème inverse de diffusion non linéaire, C.R. Acad. Sci. Paris, ser.A. 293 (1981), 121-124.

[2] A. Bachelot : Inverse scattering problem for non linear Klein Gordon equation, à paraître dans "Contributions to non linear partial differential equations" dans la série Research Notes in Mathematics de Pitman Books Limited.

[3] C. Morawetz, W. Strauss : On a non linear scattering operator ; Comm. Pure Appl. Math. XXV, (1972), 1-31.

[4] W. Strauss : non linear scattering theory at low energy. J. Func. Anal. 41 (1981), 110-133.

[5] R.S. Strichartz : Fourier transforms and Non-Compact Rotation Group. Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 499-527.

[6] R.S. Strichartz : Restrictions of Fourier transforms to quadartic surfaces and decay of solutions of wave equations Duke Math. J. 44, (1977), 705-714.

***