JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. C. NOSMAS

# Quantification et approximations semi-classiques

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1982), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A14_0>

Conférence n° 14

# QUANTIFICATION ET APPROXIMATIONS SEMI -CLASSIQUES

par J.C. NOSMAS

Le texte qui suit résume essentiellement un travail fait en collaboration avec B. Candelpergher ([C.N2])

Pour étudier certaines propriétés spectrales d'opérateurs auto adjoints asymptotiques, il est désormais classique de construire des solutions asymptotiques ou des quasi-modes et ce faisant d'attacher à chaque variété lagrangienne $\Lambda$ non conique une classe de "fonctions oscillantes" (cf.[D1],[C.V],[M]).

Sous une condition, dite de préquantification, nous définissons, inspirés par le travail de L. Hörmander [H], une notion de Symbole principal pour une classe de fonctions oscillantes et l'interprétons comme section d'un fibré complexe F de rang 1 au-dessus de $\Lambda$. Plus précisément, F est le produit tensoriel du fibré de Maslov, $M(\Lambda)$, du fibré des 1/2-densités, $\Omega_{1/2}(\Lambda)$, et d'un fibré L dont l'existence est liée au fait que $\Lambda$ ne soit pas conique :

$$F = L \otimes M(\Lambda) \otimes \Omega_{1/2}(\Lambda)$$

Nous sommes alors en mesure de développer tout un calcul symbolique.

Les conditions de quantifications de Maslov donnent une "bonne" trivialisation de $L \otimes M(\Lambda)$ et la construction de solutions asymptotique est alors liée à la possibilité de trouver une trivialisation de $\Omega_{1/2}(\Lambda)$ adaptée au problème posé, c'est-à-dire à la résolution d'un problème de "Mécanique classique" (cf Th 4.1)

Il est possible de généraliser les constructions ci-dessus au cas des systèmes ([N]) et on constate que, par exemple dans le cas de l'équation de DIRAC REDUITE, il n'est pas possible d'obtenir une trivialisation de F en trivialisant séparément $L \otimes M(\Lambda)$ et $\Omega_{1/2}(\Lambda)$ (nous renvoyons à [L] pour plus de détails).

## 0 RAPPELS ET NOTATIONS

Soit $X$ une variété $C^\infty$ de dimension $n$ sur $\mathbb{R}$ ; $T^*X$ le fibré cotangent est naturellement muni d'une structure de variété symplectique de dimension $2n$. Une sous-variété de dimension $n$ de $T^*X$ est dite lagrangienne si elle est isotrope.
Une fonction $\varphi$ , de $C^\infty(X \times \mathbb{R}^k_\theta ; \mathbb{R})$ est dite non dégénérée si

0.1 $$d_\theta \varphi(x_o,\theta_o) = o \Longrightarrow \mathrm{rg}\ d_{x,\theta}(d_\theta\varphi)\ (x_o,\theta_o) = k$$

Sous cette condition

$C(\varphi) = \{(x,\theta) \ / \ d_\theta\varphi(x,\theta) = o\}$ est une sous-variété de dimension $n$ de $X \times \mathbb{R}^k$ et l'application $i(\varphi)$ de $c(\varphi)$ dans $T^*X$

0.2 $$(x,\theta) \longmapsto (x,\varphi'_x(x,\theta))$$

définit une immersion lagrangienne. Réciproquement, étant donnée une sous-variété de $T^*X$, il est toujours possible de la représenter localement comme image par une application du type 0.2.

Soient $\Lambda$ une sous-variété lagrangienne de $T^*X$, $U$ un ouvert de $\Lambda$ et $\varphi$ une fonction non dégénérée ; on dira que $(U,\varphi)$ est une phase sur

0,3 $$i(\varphi) : i(\varphi)^{-1}(U) \longrightarrow U \quad \text{est un difféomorphisme}$$

On sait par ailleurs qu'il est toujours possible de recouvrir $\Lambda$ par des ouverts de phase. On appelle Atlas Lagrangien la donnée d'une famille $(U_i,\varphi_i)$ de phases telles que $(U_i)$ soit un recouvrement localement fini de $\Lambda$ par des ouverts connexes et simplement connexes ; on le note $\Phi$ .

Soit $T$ un sous-ensemble non borné de $]0\,, +\infty[$ ; on dira que l'Atlas $\Phi$ est T-cohérent si pour tout $(U_i,\varphi_i)$ et $(U_j,\varphi_j)$ dans $\Phi$ l'application

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j \times T & \longrightarrow & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ (\lambda,\tau) & \longmapsto & \tau(\widetilde{\varphi}_i(\lambda)-\widetilde{\varphi}_j(\lambda)) \end{array}$$

(où $\widetilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(i(\varphi)^{-1}(\lambda))$) est constante sur chaque composante connexe de $U_i \cap U_j$ .

L'existence d'un tel atlas équivaut à la propriété suivante du couple

$(\Lambda,T)$ ([C,N2]) :

<u>Définition 0.1</u> $(\Lambda,T)$ est dit <u>préquantifié</u> si pour toute base de cycles compacts de dimension 1 de $\Lambda$, $\gamma_1\cdots\gamma_k$ , il existe des nombres réels $\mu_1\cdots\mu_k$ tels que

0.4 $$\int_{\gamma_i} \alpha = \mu_i \bmod 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{pour } i = 1\ldots k$$

où $\alpha$ désigne la 1-forme canonique de $T^*X$ restreinte à $\Lambda$.

Dans tout ce qui suit $\Lambda$ désigne une variété lagrangienne connexe telle que $\pi|_\Lambda : \Lambda \longrightarrow X$ soit propre (où $\pi$ est la projection canonique de $T^*X$ sur X) et $\Phi$ un atlas lagrangien T-cohérent de $\Lambda$ .

## 1 <u>FONCTIONS OSCILLANTES ASSOCIEES A</u> $\Phi$

Soit $(U,\varphi)$ dans $\Phi$ , on appelle fonction oscillante d'ordre p associée à la phase $(U,\varphi)$ la classe de la fonction (modulo les fonctions à décroissance rapide pour $\tau$ dans T) définie par

1.1 $$u(x,\tau) = (\tau/2k)^{(n+k)/2} \int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\tau\varphi(x,\theta))\, a(x,\theta,\tau)\, d\theta$$

où a est un symbole classique d'ordre p à support compact dans $X \times \mathbb{R}^k$ de telle sorte que

1.2 le support de a rencontre $i(\varphi)^{-1}(U)$ suivant un compact de $C(\varphi)$ . On note $G^p(U,\varphi)$ l'espace de telles fonctions

<u>Définition 1.1</u> On appelle fonction oscillante d'ordre p associée à $\Phi$ toute somme localement finie (au-dessus de X) d'éléments de $G^p(U_i,\varphi_i)$.

On note $G^p$ l'espace des fonctions oscillantes d'ordre p et $G = \cup G^p$

<u>Proposition 1.1</u> le groupe filtré G est séparé et complet. C'est une conséquence facile du résultat suivant

<u>Théorème d'équivalence de phases</u> (cf.[D1] proposition 1.3.1)

Soient $(U,\varphi)$ et $(U,\Psi)$ deux phases de $\Phi$ : $\varphi \in C^\infty(X\times\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$ et $\Psi \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^\ell ; \mathbb{R})$. Pour tout symbole classique a vérifiant 1.2 il existe un symbole classique $b$ vérifiant 1,2 tel que

$$(\tau/2\pi)^{(n+k)/2} \int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\tau\varphi(x,\theta))\ a(x,\theta,\tau)\ d\theta = (\tau/2\pi)^{(n+\ell)/2} \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(i\tau\Psi(x,\eta))\ b(x,\eta,\tau)\ d\eta$$

## 2 SYMBOLE PRINCIPAL

Définition 2.1 Pour $u$ dans $G^o$, on appelle symbole principal de $u$, on le note $\overline{u}$, sa classe dans $G^o/G^{-1}$

On appelle système transverse en $\lambda_o$ ($\lambda_o$ appartenant à $\Lambda$) la donnée d'un couple $\gamma(\lambda_o) = (\chi, \Psi)$ tel que

(i) $\chi$ est dans $C_o^\infty(X)$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\pi(\lambda_o)$

(2i) $\Psi$ est dans $C^\infty(X\ ;\ \mathbb{R})$, $\Psi(\pi(\lambda_o)) = 0$ et, dans $\pi^{-1}(\operatorname{supp}\chi)$, $\Lambda$ et le graphe de $d\Psi$ se coupent transversalement en $\lambda_o$.

On note $\gamma(\lambda_o)u$ l'application de $T$ dans $\mathbb{C}$

2,1 $$\tau \longmapsto \int_X \exp(i\tau\Psi(x))\ \chi(x)\ u(x,\tau)\ dx$$

de la définition de $u$ et du théorème de la phase stationnaire usuel qui s'applique ici grâce à la condition de transversalité (2i), nous déduisons que $\exp -i\tau\ \widetilde{\varphi}(\lambda_o)\ \gamma(\lambda_o)u$ définit un symbole classique sur $T$, d'ordre 0 et que sa classe dans $S^o(T)/S^{-1}(T)$ ne dépend que de la classe de $u$ dans $G^o/G^{-1}$ ; on la note $\exp -i\tau\ \widetilde{\varphi}(\lambda_o)\ \gamma(\lambda_o)\ \overline{u}$

Proposition 2.2 $G^o/G^{-1}$ est naturellement muni d'une structure de $C^\infty(\Lambda)$-module caractérisée par la propriété suivante : si $\rho$ est dans $C^\infty(\Lambda)$, $\overline{u}$ dans $G^o/G^{-1}$ et $\lambda$ dans $\Lambda$ on a

$$\exp(-i\tau\ \widetilde{\varphi}(\lambda))\ \gamma(\lambda)\ (\rho\cdot\overline{u}) = \rho(\lambda)\ \exp(-i\tau\ \widetilde{\varphi}(\lambda))\ \gamma(\lambda)\ \overline{u}$$

pour tout système transverse $\gamma(\lambda)$ et toute phase $(U,\varphi)$ définie au voisinage de $\lambda$. / Notons $gr_o(G) = G^o/G^{-1}$ et $F_\lambda$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 $gr_o(G)/\mathcal{M}_\lambda\ gr_o(G)$ où $\mathcal{M}_\lambda$ désigne l'idéal de $C^\infty(\Lambda)$ des fonctions qui s'annulent en $\lambda$

**Proposition 2.3** $F = \coprod_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ possède une structure de fibré vectoriel complexe de rang 1 sur $\Lambda$ .

Démonstration : pour $\alpha$ dans $\mathbb{C}$, considérons la fonction oscillante

$$u(x,\tau) = (\tau/2\pi)^{(n+k)/2} \int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\tau\, \varphi(x,\theta)\; a(x,\theta)\, d\theta$$

où $a$ est une fonction $C^\infty$ à support compact vérifiant 1.2, qui prend la valeur $\alpha$ au point $i(\varphi)^{-1}(\lambda)$ ; la classe de $u$ dans $F_\lambda$ ne dépend pas de $a$ mais de $\alpha$ , on la note $g(\varphi,\lambda,\alpha)$. Nous venons donc de définir une bijection

$$g(\varphi)\left\{\begin{array}{l} U\times \mathbb{C} \longrightarrow F_{|U} \\ \\ (\lambda,\alpha) \longrightarrow g(\varphi,\lambda,\alpha) \end{array}\right.$$

Il s'agit de montrer que ces bijections permettent de définir sur F une structure de fibré $C^\infty$ au-dessus de $\Lambda$ .
Soient $(U_1,\varphi_1)$ et $(U_2,\varphi_2)$ deux phases de $\Phi$ telles que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ;

considérons l'application $g(\varphi_1)^{-1}\circ g(\varphi_2)$ de $U_1 \cap U_2 \times \mathbb{C}$ dans lui-même.

Si $(\lambda,\alpha) = g(\varphi_1)^{-1}\circ g(\varphi_2)\;(\lambda,\beta)$ alors $g(\varphi_1,\lambda,\alpha) = g(\varphi_2,\lambda_1\, \beta)$ or

$g(\varphi_1,\lambda,\alpha)$ est la classe d'un élément $u_1$ de $G^o(U_1,\varphi_1)$ ; si $\gamma(\lambda)$ est un système transverse en $\lambda$ nous avons

$$2.2 \qquad \exp -i\tau\, \tilde{\varphi}_1(\lambda)\; \gamma(\lambda)\bar{u}_1 = |\det Q_1|^{-1/2}\; e^{i\pi/4\, \mathrm{sgn} Q_1}\; \alpha$$

de même

$$\exp -i\tau\, \tilde{\varphi}_2(\lambda)\; \gamma(\lambda)\bar{u}_2 = |\det Q_2|^{-1/2}\; e^{i\pi/4\, \mathrm{sgn} Q_2}\; \beta$$

où $Q_\ell = d^2_{x,\theta}(\varphi_\ell - \Psi)\;(i(\varphi_\ell)^{-1}(\lambda))$ et $\gamma(\lambda) = (\chi,\Psi)$

comme $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ est dans $\mathcal{M}_\lambda\; gr_o(G)$ nous en déduisons que

$$2.3 \qquad \alpha = f_{1,2}(\lambda)\; \beta$$

avec $f_{1,2} = \exp\, i\tau(\tilde{\varphi}_2(\lambda)-\tilde{\varphi}_1(\lambda))\; \left|\dfrac{\det Q_2}{\det Q_1}\right|^{-1/2} \exp \dfrac{i\pi}{4}\,(\mathrm{sgn} Q_2 - \mathrm{sgn} Q_1)$

Le couple $(\Lambda,T)$ étant préquantifié $f_{1,2}$ est indépendante de $\tau$. On termine la démonstration en remarquant qu'en prenant les ouverts de phase suffisamment petits il est possible de définir des familles régulières de systèmes transverses paramétrées par les points des ouverts de phase ; $f_{1,2}$ est alors une fonction $C^\infty$.

Si $\Gamma(\Lambda,F)$ désigne le $C^\infty(\Lambda)$-module des sections $C^\infty$, globales de $F$, nous avons le

Théorème 2.4 : Les $C^\infty(\Lambda)$-modules $gr_o(G)$ et $\Gamma(\Lambda,F)$ sont isomorphes l'isomorphisme est donné par l'application

$$gr_o(G) \longrightarrow \Gamma(\Lambda,F)$$
$$\bar{u} \longmapsto \text{"}\lambda \mapsto \text{classe de } \bar{u} \text{ dans } F_\lambda\text{"}$$

Les transitions du fibré $F$ s'écrivent

2.4 $$f_{ij} = \ell_{ij}\, m_{ij}\, h_{ij}$$

avec $$\ell_{ij}(\lambda) = \exp i\tau(\tilde{\varphi}_j(\lambda)-\tilde{\varphi}_i(\lambda))$$

$$m_{ij}(\lambda) = \exp i\frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn} Q_j - \operatorname{sgn} Q_i)$$

et $$h_{ij}(\lambda) = |\det Q_j/\det Q_i|^{-1/2}$$

les fonctions $m_{ij}$ définissent les transitions du fibré de Maslov $M(\Lambda)$, $h_{ij}$ celles du fibré des 1/2 densités $\Omega_{1/2}(\Lambda)$ et $\ell_{ij}$ celles d'un fibré qu'on note $L$ et donc on obtient ainsi

2.5 $$F = L \otimes M(\Lambda) \otimes \Omega_{1/2}(\Lambda)$$

La condition de quantification de Maslov s'énonce

2.6 $$\tau\theta/2\pi = m/4 \mod H^1(\Lambda,\mathbb{Z})$$

où $m$ désigne le cocycle de Maslov et $\theta$ est l'image de la classe de $\alpha|_\Lambda$ par l'isomorphisme $H^1(\Lambda,\Omega^\cdot) \longrightarrow H^1(\Lambda,\mathbb{R})$

Quitte à choisir les ouverts de phase judicieusement cette condition équivaut à l'existence de nombre réels tels que

2.7 $$\tau(\tilde{\varphi}_j(\lambda)-\tilde{\varphi}_i(\lambda)) - \frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn} Q_j - \operatorname{sgn} Q_i) = \omega_j - \omega_i \mod(2\pi\mathbb{Z})$$

ce qui donne une trivialisation de $L \otimes M(\Lambda)$ par une section globale constant sur chaque ouvert $U_i$.

## 3 ACTION DES OPERATEURS DIFFERENTIELS ASYMPTOTIQUES ET ESTIMATIONS $L^2$

On appellle opérateur différentiel asymptotique d'ordre 0 tout opérateur différentiel qui s'écrit

3.1 $$P(x,D_x/\tau,\tau) = \sum_{j=o}^{n} \tau^{-j} P_j(x,D_x/\tau)$$ où les $P_j$ sont des opérateurs différentiels ordinaires.

Un tel opérateur définit un morphisme de degré 0 du groupe filtré G et si u appartient à $G^o$, Pu est dans $G^o$ et

3.2 $$\overline{Pu} = (p_{o|\Lambda}) \cdot \overline{u}$$ où $p_o$ désigne le symbole complet de $P_o$ .

Lorsque $p_o$ s'annule sur $\Lambda$ , si u est dans $G^o$ , Pu est dans $G^{-1}$ et $\tau$ Pu est dans $G^o$ ; nous avons alors la proposition suivante dont la démonstration est classique.

Proposition 3.1 Si u est dans $G^o$ est telle que $\overline{u} = \ell \otimes m \otimes \omega$ où $\ell \otimes m$ est une section de $L \otimes M(\Lambda)$ constante sur les ouverts de phase .

Alors $$\overline{\tau Pu} = \ell \otimes m \otimes L_p \omega$$

où $L_p$ est l'opérateur $i^{-1} \mathcal{L} + c_{p|\Lambda}$ , $\mathcal{L}$ la dérivation de Lie des 1/2-densités associée au champ hamiltonien de $p_o$ et $c_p$ est le symbole sous-principal de P :
$$c_p = p_1-(2i)^{-1} \sum \partial^2_{x_j\xi_j} p_o$$

Lorsque $(\Lambda,T)$ est quantifié comme G est un groupe filtré, séparé complet on peut déduire de certaines propriétés de $L_p$, des propriétés de P ce en utilisant des techniques d'Algèbre générale

Pour les applications à l'étude du spectre des opérateurs différentiels asymptotiques on utilise les résultats suivants

Proposition 3.2 On suppose X orientable ; pour $u_i$, dans $G^o$, à support compact (i=1,2) de symbole principal $\ell \otimes m \otimes \omega_i$ . Alors

3.3 $$\int_X u_1(x)\, \overline{u_2(x)}\, dx = \int_\Lambda \omega_1 \overline{\omega}_2 \mod S^{-1}(T)$$

en particulier

3.4 $$\int_X |u_1|^2 \, dx = \int_\Lambda |\omega_1|^2 \mod S^{-1}(T)$$

On en déduit le résultat suivant essentiel pour la suite :

Corollaire 3.3. Soient P un opérateur différentiel asymptotique d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^n$, à symbole principal réel, autoadjoint, $\Lambda$ une variété lagrangienne contenue dans $p_o^{-1}(\{0\})$ telle que $(\Lambda,T)$ soit quantifié, u dans $G^o \setminus G^{-1}$ à support compact et tel Pu soit dans $G^q$ $(q < o)$ , alors il existe une constante C telle que si d désigne la distance du spectre de P à l'origine,

3.5 $$d \leq C \, \tau^q$$

## 4 UNE APPLICATION

Comme exemple de résultat qui découle de façon simple du calcul symbolique défini plus haut, nous avons le

Théorème 4.1 Soit P un opérateur différentiel asymptotique d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^n$, à symbole principal réel, autoadjoint et $E_o$ un nombre réel tels que

1 Il existe une sous-variété lagrangienne $\Lambda$ de $T^* \mathbb{R}^n$, compacte, connexe, incluse dans $(p_o - E_o)^{-1}(\{0\})$, sur laquelle le champ hamiltonien $Hp_o$ ne s'annule pas et invariante par le flot de ce champ.

2 Il existe sur $\Lambda$ une densité $\omega$ invariante par le flot de $Hp_o$ et telle que pour toute fonction f de $C^\infty(\Lambda)$, d'intégrale nulle par rapport à $\omega$, l'équation $Hp_o g = f$ ait une solution dans $C^\infty(\Lambda)$ (où $Hp_o g = dg\,(Hp_o)$)

3 L'ensemble S des valeurs propres de $i^{-1} Hp_o + c_p$ considéré comme opérateur sur $C^\infty(\Lambda)$ est non vide

4 $(\Lambda,T)$ est quantifié

Alors, pour tout élément $E_i$ de S, il existe une suite $(E_j)_{j\geq 2}$ et des constantes positives $(c_n)_{n\geq 1}$ telles que tous les intervalles $[\lambda_n - c_n \tau^{-n}, \lambda_n + c_n \tau^{-n}]$, où $\lambda_n = \sum_o^n E_j \tau^{-j}$, contiennent un point du spectre de P.

Démonstration : Compte tenu de la proposition 3.2 et du corollaire 3.3, il suffit de construire u dans $G^o \setminus G^{-1}$ et $(E_j)_{j \geq 2}$ de telle sorte que $\tau^{n+1}(P-\lambda_n)u$ appartienne à $G^o$ .
On remarque alors que la densité $\omega$, sous la condition 2, ne s'annule en aucun point ce parce que toute trajectoire de $Hp_o$ est dense ; elle nous permet donc de trivialiser $\Omega_{1/2}(\Lambda)$. Nous nous ramenons donc à construire u par "approximations successives" : $u \sim \sum_{j\leq o} u_j$ ce en résolvant des équations différentielles ordinaires sur $\Lambda$ .

Exemples : En dimension $\Lambda$, il est facile de voir que 1 implique 2 et 3 ; l'existence de $E_o$ et $\Lambda$ satisfaisant 1 et 4 découle du fait que nous sommes dans une situation où $Hp_o$ est complètement intégrable. La condition 4, dans le cas simple de l'équation de Schrödinger stationnaire associée à un potentiel V strictement convexe et équivalente à la condition de Bohr-Sommerfeld à savoir

$$h^{-1} \int_{E_o>V(s)} (E_o-V(s))^{1/2}\, ds = (2n+1),\ n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \tau = h^{-1}$$

En dimension supérieure, la situation géométrique décrite par la condition 1 est réalisée lorsque $Hp_o$ est complètement intégrable.
Sous cette hypothèse les conditions 1 et 4 sont réalisées pour certaines valeurs de $E_o$ . En dimension 3, les opérateurs de Schrödinger et Klein-Gordon pour un potentiel central et un champ magnétique constant, parallèle au troisième axe de coordonnées fournissent des exemples d'une telle situation (nous renvoyons à [L] pour plus de détails)

Signalons pour terminer que les techniques développées ci-dessus s'adaptent au cas des systèmes asymptotiques (différentiels ou pseudo-différentiels propres) ([N]) et qu'il est possible, dans le même esprit, d'attacher à des variétés isotropes des classes de fonctions oscillantes, classes pour lesquelles on peut développer un calcul symbolique, ceci sera détaillé ultérieurement.

Bibliographie :

[C.V] Y. Colin de Verdière, Inventiones n°43 (1977) pp 15-21

[D1] J.J. Duistermaat, CPAM 27 (1974) pp 207-281

[D2] J.J. Duistermaat, Fourier Integral Operators Courant Inst. (1973)

[DH] J.J. Duistermaat et L. Hörmander, Acta Mathematica 128 (1972) pp 113-269

[E.S] J.P. Eckmann et R. Sénéor, Comm in Maths Physics (1976)

[G.S] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric Asymptotics, Math Surveys n°16 (1977)

[H] L. Hörmander, Acta Mathematica 127 (1971) pp 79-183

[L] J. Leray, Analyse Lagrangienne et Mécanique Quantique Collège de France 1976-1977

[M] V.P. Maslov, méthodes asymptotiques et théorie des perturbations Dunod 1972

[V] A. Voros, Thèse Orsay (1977)

[CN1] B. Candelpergher et J.C. Nosmas, Note aux C.R.A.S. t291 (1980)

[CN2] B. Candelpergher et J.C. Nosmas, propriétés spectrales d'opérateurs différentiels asymptotiques (à paraître)

[N] J.C. Nosmas, approximations semi-classiques du spectre de systèmes différentiels asymptotiques Notes aux C.R.A.S. (Mai 82) à paraître.