Journées Équations aux dérivées partielles

Norio Shimakura

La première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____AS14_0>

La première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet

par

Norio SHIMAKURA

1. Soit R^n l'espace euclidien réel de dimension n (≥ 2) à coordonnées x $=(x_1,..,x_n)$ et à produit scalaire $\langle x,y\rangle = x_1y_1+..+x_ny_n$. Soit Ω un domaine (ouvert connexe) borné de R^n à frontière S. Supposons que Ω soit situé, à chaque point de S, à un seul côté de S. La première valeur propre $\lambda_1(\Omega)$ du laplacien pour le problème de Dirichlet dans Ω est le nombre positif pour lequel il existe une et une seule fonction U définie sur $\overline{\Omega}$ telle que $U>0$ et $\Delta U+\lambda_1(\Omega)U=0$ dans Ω , que $U=0$ sur S et que sa norme dans $L^2(\Omega)$ soit égale à 1. Nous appelons U la première fonction propre positive et normalisée. $\lambda_1(\Omega)$ est toujours simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1.

G.Faber [1] et E.Krahn [2] ont établi l'inégalité isopérimétrique pour λ_1. G.Pólya-G.Szegö [3] ont démontré que λ_1 est diminuée par symétrisation du domaine par rapport aux hyperplans. Plus récemment, H.Brascamp-E.Lieb [8] ont démontré une propriété de convexité de λ_1 restreinte à des domaines convexes comme nous l'écrirons plus tard. Voir aussi [6], [9] et [11] sur les autres problèmes isopérimétriques liés à λ_1.

Dans cet exposé, nous regardons ce qui arrive à λ_1 par des déformations locales du domaine. La méthode utilisée pour ce but est la formule de variation due à J.Hadamard ([5]. Voir aussi [12]).

2. Supposons que S (pas nécessairement connexe) soit de classe C^m ($m \geq 3$) par morceau. Désignons par $S^{(m)}$ <u>la partie C^m de S</u>, c'est-à-dire, x ($\in$ S) appartient à $S^{(m)}$ s'il existe un voisinage de x dans S, C^m-difféomorphe à une boule de dimension n-1. A chaque $x \in S^{(m)}$, écrivons par $n(x)=(n_1(x),\dots,n_n(x))$ le vecteur unité normal intérieur à S en x. L'élément de volume sur S (ou plutôt sur $S^{(m)}$) est noté par dS.

Désignons par Difféo($\mathbb{R}^n$) l'ensemble de tous les difféomorphismes de classe C^m de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Soit $(-\varepsilon,\varepsilon)\ni t \to \phi_t \in$ Difféo($\mathbb{R}^n$) une courbe de classe C^2 en t. Nous supposons que ϕ_0 soit égal à l'identité I et que $\phi_t - I$ soit nul dans un voisinage fixe de $S\setminus S^{(m)}$ pour $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Nous posons

$$v=\frac{d}{dt}\phi_t\Big|_{t=0} \quad \text{et} \quad w=\left(\frac{d}{dt}\right)^2\phi_t\Big|_{t=0} . \tag{1}$$

Alors, v et w sont des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous écrivons

$$L^v=\sum_{j=1}^{n} v_j\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \tilde{w}=w-L^v v . \tag{2}$$

Soit encore θ une fonction sur S définie par

$$\theta=(\operatorname{div} v)|_S\langle v|_S,n\rangle+{}^tM^v[\langle v|_S,n\rangle]+\langle\tilde{w}|_S,n\rangle , \tag{3}$$

où M^v est la partie tangentielle de L^v sur S et ${}^tM^v$ est son adjoint comme opérateur sur S.

Soit, d'autre part, φ une fonction sur S ayant le support compact dans $S^{(m)}$. Déterminons le nombre λ' par

$$\lambda'=\int_S\varphi\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2 dS$$

et notons par W_φ la solution unique du problème de Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta W_\varphi+\lambda_1(\Omega)W_\varphi=\lambda' U \quad \text{dans } \Omega ,\\ W_\varphi=\varphi\dfrac{\partial U}{\partial n} \quad \text{sur } S \quad \text{et} \quad W_\varphi\perp U \quad \text{dans } L^2(\Omega).\end{cases} \tag{4}$$

Nous pouvons définir une forme quadratique Q par

$$Q(\varphi) = \int_S W_\varphi \left(H - \frac{\partial}{\partial n}\right) W_\varphi \, dS, \tag{5}$$

où $H(x)/(n-1)$ est la courbure moyenne de $S^{(m)}$ au point x, autrement dit, si $\rho(x)$ est la distance de $x \in \overline{\Omega}$ jusqu'à $S^{(m)}$, $H(x) = -(\Delta\rho)(x)$ si $x \in S^{(m)}$. Alors, nous avons la

<u>Proposition 1</u> <u>Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons</u>

$$\frac{d}{dt}\lambda_1(\phi_t\Omega)\Big|_{t=0} = \int_S \langle v|_S, n\rangle \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2 dS \quad \text{(formule d'Hadamard)}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \lambda_1(\phi_t\Omega)\Big|_{t=0} = 2Q(\langle v|_S, n\rangle) + \int_S \theta \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2 dS \, . \tag{7}$$

(Dans [4], une formule analogue à (7) est obtenue pour le cas $n=2$).

<u>L'idée de la démonstration</u> : Etant donnée une fonction f sur $\overline{\Omega}$, nous posons

$$A_t f = -(\phi_t)_* \circ \Delta \circ (\phi_t^{-1})_* f \ , \quad \text{où} \quad (\phi_t)_* f(x) = f(\phi_t x).$$

Soit $U_t = (\phi_t)_* \tilde{U}_t$, où $\tilde{U}_t$ est la première fonetion propre positive et normalisée pour le domaine $\phi_t\Omega$. Alors nous avons

$$A_t U_t = \lambda_1(\phi_t\Omega) U_t \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \quad U_t = 0 \quad \text{sur } S.$$

La simplicité de λ_1 nous permet de considérer les dérivées en t de $\lambda_1(\phi_t\Omega)$ et de U_t , et nous obtenons les deux équations

$$\Delta U' + \lambda_1(\Omega) U' = -\lambda' U + A' U \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \quad U' = 0 \quad \text{sur } S, \tag{8}$$

$$\Delta U'' + \lambda_1(\Omega) U'' = -\lambda'' U + A'' U + 2A' U' - 2\lambda' U' \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \quad U'' = 0 \text{ sur } S, \tag{9}$$

où les λ' et λ'' sont les membres à gauche de (6) et de (7) respectivement,

$$A' = \frac{d}{dt} A_t\Big|_{t=0} = [\Delta, L^v], \quad A'' = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 A_t\Big|_{t=0} = [L^v, A'] + [\Delta, L^w] \, ,$$

$$U' = \frac{d}{dt} U_t\big|_{t=0} \quad \text{et} \quad U'' = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 U_t\big|_{t=0} .$$

Pour que les équations (8) et (9) admettent des solutions U' et U'', il faut et il suffit que leurs membres à droite soient orthogonaux à U dans $L^2(\Omega)$. Ces conditions d'orthogonalité nous donnent, par un calcul, les formules (6) et (7) (Notons que $W = L^v U - U'$ n'est autre que W_φ dans (4) pour $\varphi = \langle v|_S, n\rangle$).

3. Soit Σ un ouvert non vide quelconque de $S^{(m)}$. Désignons par $\Phi(\Sigma)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles φ sur S, à supports compacts dans Σ, intégrables sur S et telles que $\int_S \varphi dS = 0$. Nous disons que v appartient à $V(\Sigma)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(V.1) v est une fonction de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans lui-même et à support compact dans le complémentaire de $S \setminus \Sigma$;

(V.2) $\langle v|_S, n\rangle \in \Phi(\Sigma)$; (V.3) $\langle v|_S, n\rangle(\operatorname{div} v)|_S \in \Phi(\Sigma)$.

Soient $v \in V(\Sigma)$, $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Ecrivons par $\operatorname{Exp}(tv)x$ la solution unique $y(t,x)$ de $y(0,x) = x$ et de $\partial y(t,x)/\partial t = v(y(t,x))$. Pour t fixe, $\operatorname{Exp}(tv)$ appartient à $\operatorname{Difféo}(\mathbb{R}^n)$ et il ne bouge pas $S \setminus \Sigma$. Remarquons que la première et la seconde dérivées en t du volume de $\operatorname{Exp}(tv)\Omega$ sont nulles pour $t=0$. Remarquons aussi que $\tilde{v} = 0$ pour $\phi_t = \operatorname{Exp}(tv)$ (voir (1) et (2) ci-dessus).

Maintenant, nous restreignons les formules (6) et (7) à des $\operatorname{Exp}(tv)$.

4. Nous disons que Ω est un domaine Σ-critique pour λ_1 si et seulement si

$$\frac{d}{dt}\lambda_1(\operatorname{Exp}(tv)\Omega)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{pour tout } v \in V(\Sigma).$$

La formule (6) nous donne tout de suite la

<u>Proposition 2</u> <u>Ω est un domaine Σ-critique pour λ_1 si et seulement s'il existe une constante positive k telle que $\partial U/\partial n = k$ sur Σ</u> .

Comme un corollaire d'un théorème de J.Serrin [7], il est connu que Ω est forcément une boule si $\partial U/\partial n$ est égale à une constante partout sur S. Donc, aucun domaine Ω autre que des boules n'est S-critique pour λ_1.

Nous disons que la fonction λ_1 est <u>Σ-stable en Ω</u> si et seulement si Ω est Σ-critique pour λ_1 et si

$$(\frac{d}{dt})^2 \lambda_1(\mathrm{Exp}(tv)\Omega)|_{t=0} > 0 \quad \text{pour tout } v \in V_*(\Sigma),$$

où $V_*(\Sigma)$ est le sous-ensemble de $V(\Sigma)$ formé par tous les v avec $\langle v|_S, n\rangle$ non identiquement nulles. Mais s'il s'agit du cas où $\Sigma = S$, c'est-à-dire, si Ω est une boule, on doit exclure de $V_*(S)$ tous les éléments de la forme $v(x) = Ax+b$, où A sont des matrices constantes réelles antisymétriques et b sont des vecteurs constants de $\mathbb{R}^n$. En ce sens, nous pouvons vérifier que λ_1 est en effet S-stable en Ω si Ω est une boule.

<u>Lemme</u> <u>Soit Ω un domaine Σ-critique pour λ_1. Alors nous avons</u>

$$(\frac{d}{dt})^2 \lambda_1(\mathrm{Exp}(tv)\Omega)|_{t=0} = 2Q(\langle v|_S, n\rangle) \quad \underline{\text{pour tout}}\ v \in V(\Sigma). \tag{10}$$

<u>Preuve</u> : Dans (7), nous avons d'abord $\tilde{w} = 0$, et de plus $\theta = \theta_1 + \theta_2$, où $\theta_1 = \langle v|_S, n\rangle(\mathrm{div}\ v)|_S$ et $\theta_2 = {}^tM^v[\langle v_S, n\rangle]$. Puisque $\partial U/\partial n = k$ sur Σ, l'intégrale de θ_2 sur S est nulle, car $\langle v|_S, n\rangle$ est à support compact dans Σ. Et l'intégrale de θ_1 sur S s'annule aussi grâce à (V.3), d'où nous avons (10).

<u>5.</u> <u>Théorème</u> <u>Soit Σ un ouvert non vide de $S^{(m)}$. Supposons que Ω soit un domaine Σ-critique pour λ_1. Alors, pour chaque point x^o de Σ, il existe un ouvert Σ' de Σ, contenant x^o, tel que λ_1 soit Σ'-stable en Ω</u>.

<u>Démonstration</u> : Fixons un petit nombre $r^o > 0$ tel que $\Sigma(r) = \{x \in \Sigma;\ |x - x^o| < r\}$ soit connexe pourvu que $0 < r \leq r^o$ et que $\Sigma \setminus \overline{\Sigma(r^o)}$ soit non vide.

Soit φ un élément de $\Phi(\Sigma(r^o)) \cap H^{1/2}(S^{(m)})$ et désignons par Z_φ la fonction harmonique dans Ω ayant la valeur au bord $k\varphi$ sur S, où $H^a(D)$ est en général l'espace de Sobolev d'ordre a sur D. Nous posons

$$Q^o(\varphi) = -\int_S Z_\varphi \frac{\partial}{\partial n} Z_\varphi \, dS = \int_\Omega |\text{grad } Z_\varphi|^2 dx.$$

Il est facile à voir que $|Q(\varphi) - Q^o(\varphi)| \leq C_1 \|\varphi\|^2$, où $\| \ \|$ est la norme dans $L^2(S^{(m)})$ est $C_1(>0)$ est une constante qui ne dépend que de (x^o, r^o). Ensuite, puisque $\Sigma \setminus \overline{\Sigma(r^o)}$ est non vide et que φ y est nulle, $Q^o(\varphi) \geq C_2 \|\varphi\|^2_{1/2}$, où $\| \ \|_{1/2}$ est la norme dans $H^{1/2}(S^{(m)})$ et $C_2(>0)$ est une constante qui ne dépend que de (x^o, r^o). Nous nous bornons maintenant à des φ à supports dans $\Sigma(r)$ ($0 < r \leq r^o$). Alors, par transformation de Fourier, on montre que $\|\varphi\|^2_{1/2} \geq (C_3/r)\|\varphi\|^2$, où $C_3(>0)$ est une constante dépendante de (x^o, r^o) mais indépendante de r si $0 < r \leq r^o$. Choisissons un r tel que $C_4 = (C_2 C_3/r) - C_1 > 0$. Alors nous avons $Q(\varphi) \geq C_4 \|\varphi\|^2$ si φ a son support dans $\Sigma(r)$. Donc, λ_1 est $\Sigma(r)$-stable en Ω .

_6_. __Exemple__. Considérons un domaine annulaire $\Omega = \{x \in R^n ; a < |x| < b\}$, où $0 < a < b < +\infty$. $S = \partial\Omega$ est la somme disjointe de $S^+ = \{|x| = b\}$ et de $S^- = \{|x| = a\}$. Ω est S^+-critique et S^--critique pour λ_1, car $U(x)$ ne dépend que de $|x|$. Mais λ_1 n'est ni S^+-stable ni S^--stable en Ω , car $\lambda_1(\Omega) > \lambda_1(\Omega_y)$ si $y \in R^n$, $y \neq 0$ et si $|y|$ est petite, où $\Omega_y = \{ x \in R^n ; |x-y| > a \text{ et } |x| < b \}$.

Cette dernière assertion est démontrée comme suit : Soit v un champ de vecteurs qui est égal à y près de S^- et à nul près de S^+. Par un calcul au moyen des fonctions de Bessel, nous voyons que $Q(\langle v|_S, n\rangle) = -c|y|^2$ avec une constante $c > 0$. Ceci signifie que $\lambda_1(\Omega) > {}_1(\Omega_y)$ si $|y|$ est petite.

(Le contenu essentiel du _3_ au _6_ a été annoncé dans [13]).

7. Pour tirer le meilleur parti de la formule d'Hadamard, il est souhaitable de connaîte dans quel endroit $\partial U/\partial n$ est grande ou petite comme fonction sur S. Pour des domaines convexes, nous en avons une information suivante (mais pas ponctuelle):

Théorème de H.Brascamp-E.Lieb [8] Soient A et B deux domaines convexes et bornés quelconques de R^n. Alors, $[0,1]\ni\theta\to\lambda_1(\theta A+(1-\theta)B)$ est une fonction convexe, où $aA+bB=\{ax+by;\ x\in A \text{ et } y\in B\}$ pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$ (Grâce à l'homogénéité $\lambda_1(aA)=a^{-2}\lambda_1(A)$ pour $a>0$, nous avons de plus la concavité de $\lambda_1^{-1/2}(\theta A+(1-\theta)B)$).

Soit Ω un domaine strictement convexe et borné de R^n à frontière régulière S. Nous appliquons ce théorème à des $\theta cA+(1-\theta)\Omega$, où A est un autre domaine strictement convexe et borné de R^n et $c=(\lambda_1(A)/\lambda_1(\Omega))^{1/2}$. Soit $\mathcal{S}$ la sphère unitaire dans R^n. Alors, $S\ni x\to n(x)\in\mathcal{S}$ est l'application de Gauss. Désignons par ν celle de ∂A sur $\mathcal{S}$. Alors, l'application $x\to(1-\theta)x+\theta c\nu^{-1}n(x)$ est un difféomorphisme de S sur $\partial(\theta cA+(1-\theta)\Omega)$. D'après (6), nous avons

$$\frac{d}{d\theta}\lambda_1(\theta cA+(1-\theta)\Omega)\Big|_{\theta=0}=\int_S\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2\langle -x+c\nu^{-1}n(x),n(x)\rangle dS,$$

où U est comme toujours la première fonction propre positive et normalisée pour Ω. Nous exprimons le membre à droite par une intégrale sur $\mathcal{S}$. Posons $u_\Omega(y)=(\frac{\partial U}{\partial n}(x))^2/K(x)$, $\varphi_\Omega(y)=-\langle x,y\rangle$ avec $y=n(x)$ et $\varphi_A(y)=-\langle\nu^{-1}(y),y\rangle$, où $K(x)$ est la courbure de Gauss de S en x (Remarquons que $d\mathcal{S}/K=dS$). Par notre choix particulier de c, le membre à gauche de l'égalité ci-dessus est non-positif grâce à la convexité, d'où nous avons

$$\sqrt{\lambda_1(A)}\int_{\mathcal{S}}\varphi_A u_\Omega d\mathcal{S}\geq\sqrt{\lambda_1(\Omega)}\int_{\mathcal{S}}\varphi_\Omega u_\Omega d\mathcal{S} \tag{11}$$

(Notons que le membre à droite est égal à $2\lambda_1(\Omega)^{3/2}$, parce que

$$2\lambda_1(\Omega) = -\int_S \langle x,n(x)\rangle\left(\frac{\partial U}{\partial n}(x)\right)^2 dS \ .$$

Voir p.571 de [5]).

L'inégalité (11) est vraie pour tous les Ω et A strictement convexes et bornés. Prenons en particulier $A=R\Omega$, où R est un élément quelconque du groupe orthogonal O(n). Alors,

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi_\Omega(Ry)u_\Omega(y)d\mathcal{S} \geqq \int_{\mathcal{S}} \varphi_\Omega(y)u_\Omega(y)d\mathcal{S} \quad \text{pour tout } R\in O(n).$$

Pour être plus compréhensible, soit $n=2$. Alors, $y\in\mathcal{S}$ est exprimé par un angle $t\in[0,2\pi)$ et les φ_Ω et u_Ω s'identifient avec des fonctions périodiques de période 2π. Donc, l'inégalité ci-dessus s'écrit encore

$$\int_0^{2\pi} \varphi_\Omega(s\pm t)u_\Omega(t)dt \geqq \int_0^{2\pi} \varphi_\Omega(t)u_\Omega(t)dt \quad \text{pour tout } 0\leqq s<2\pi.$$

Références

[1] G. Faber, Sitz. bayer. Akad. Wiss., 1923, P.169-172.

[2] E. Krahn, Math. Ann., 94, 1924, p.97-100.

[3] G. Pólya - G. Szegö, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Ann. Math. Studies N°27, Princeton, 1951.

[4] P. Garabedian - M. Schiffer, J. Analyse Math., 2, 1952-53, p.281-369.

[5] P. Garabedian, Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, 1964.

[6] L. Payne, SIAM Review, 9-3, 1967, p.453-488.

[7] J. Serrin, Arch. Rat. Mech. Anal., 43, 1971, 304-318.

[8] H. Brascamp - E. Lieb, J. Funct. Anal., 22, 1976, p.366-389.

[9] G. Talenti, Ann. Scuo. Norm. Sup. Pisa, 1978, p.141-162.

[10] R. Osserman, Bull. AMS., 84, 1978, p.1182-1238.

[11] S. Gallot, Séminaire N. Bourbaki, Exposé N°569, 1980/1981.

[12] J. Simon, Variation par rapport au domaine dans des problèmes aux limites, à paraître dans Numerical Funct. Anal., 1981.

[13] N. Shimakura, Stabilité locale de la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet, à paraître dans C.R. Ac. Sc. Paris,1981.

SHIMAKURA Norio

Centre de Mathématiques, de l'Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau cedex;

et

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université de Kyôto, 606 Sakyô-ku, Kyôto, Japon.