Journées Équations aux dérivées partielles

Richard Beals
R. Coifman

Scattering, scattering inverse et équations d'évolutions non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A16_0>

SCATTERING, SCATTERING INVERSE, ET EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRES

par R. BEALS et R. COIFMAN

Nous nous proposons d'esquisser une méthode de résolution de certaines classe d'équations d'évolution non linéaires.

Commençons par l'exemple étudié en 72 par Zaharov et Sabat [2] de l'équation d'évolution non linéaire de Schrödinger

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u\right] , \qquad u|_{t=o} = u_o \ .$$

On résout le problème par l'intermédiaire d'une transformation spectrale (analogue à la transformée de Fourier) qui le linéarise. Premièrement nous associons à u le problème "spectral" suivant :

$$(2) \qquad \frac{d\psi}{dx} = (\xi \mathfrak{J} + Q)\psi \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,\xi) \\ \psi_2(x,\xi) \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} -i/2 & o \\ o & 1/2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} o & i\bar{u} \\ u & o \end{pmatrix}$$

Si l'on suppose pour simplifier que Q est à support compact et intégrable. Alors toute solution ψ de (2) est nécessairement de la forme

$$\psi = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & e^{-i/2x\xi} \\ a_2 & e^{i/2\ x\xi} \end{pmatrix} & x << o \\ \\ \begin{pmatrix} b_1 & e^{-i/2x\xi} \\ b_2 & e^{i/2\ x\xi} \end{pmatrix} & x >> o \end{cases}$$

La matrice $S(\xi)$ définie par

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = S(\xi) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de "Scattering" associée au potentiel Q et au problème "spectral" (2).

Si n dépend de t et vérifie l'équation (1) la matrice S associée à u par l'intermédiaire de (2) évolue dans le temps. Le miracle est dans la simplicité de cette évolution donnée par l'équation linéaire

$$(3) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\xi^2 [J, S(\xi,t)] \quad .$$

Pour résoudre l'équation (1) il suffirait de pouvoir reconstruire le potentiel Q à partir de S. En effet, dans ce cas, ceci peut se faire (voir [1],[2]) moyennant une information supplémentaire sur les états liés à l'équation (2).

Il est naturel de vouloir décrire une classe générale d'équations non linéaires associées à des problèmes "spectraux".

Nous décrivons le cas général, $n \times n$.

Soit J une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \qquad i \neq j \qquad Q = (Q_{ij}(x)) \qquad Q_{ii} = 0$$

$$\|Q\|_1 = \Sigma \int |Q_{ij}(x)|\,dx \ .$$

$$(4) \qquad \frac{d\psi}{dx} = (\xi J + Q)\psi$$

Du point de vue formel il est facile de déterminer les équations d'évolution de Q qui correspondent à une évolution linéaire de S. Malheureusement la matrice de Scattering qui est bien définie lorsque Q est à support compact perd son sens dans le cas général. Notre but est donc de trouver une "transformée spectrale" de Q qui est bien définie dans L^1 et dont l'évolution linéaire correspond aux équations non linéaires (trouvées formellement).

Nous commençons par tranformer une matrice ψ qui est une solution fondamentale de (4) en la remplaçant par $\mathfrak{M} = \psi\, e^{-x\xi J}$. $\mathfrak{M}$ vérifie l'équation

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}\mathfrak{M} = \xi\, \mathcal{J}\mathfrak{M} + Q\mathfrak{M} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{J}\mathfrak{M} = [J, \mathfrak{M}]$$

Nous obtenons le

<u>Théorème 1</u> : Soit

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{C} : \exists\, j \neq k \text{ tel que } \operatorname{Re} \xi(\lambda_j - \lambda_k) = 0\}$$

Il existe une solution unique de (5) vérifiant les propriétés suivantes.

1) $\mathcal{M}$ est méromorphe en ξ dans $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ et x fixé et $\mathcal{M}$ a un nombre de pôles fini dont la position ne dépend pas de x.

2) $$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{M}(x,\xi) = I = \lim_{|\xi|\to\infty} \mathcal{M}(x,\xi) .$$

Nous dirons que le potentiel Q est générique si dans chaque secteur de $\mathbb{C}\setminus\Sigma$, $\mathcal{M}$ a une extension continue au bord, et les pôles de $\mathcal{M}$ sont simples.

On démontre que les potentiels génériques forment un ouvert dense dans L^1, dorénavant nous considérons que des potentiels génériques.

Pour définir la "transformée spectrale" de Q (relative à J) nous remarquons d'abord que si $\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$ sont des solutions de (5) et $\mathcal{M}_1$ est inversible, alors :

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 W^x \qquad \text{où} \qquad W^x(\xi) = e^{x\xi J} W(\xi) e^{-x\xi J}$$

d'autre part si $\mathcal{M}$ est la solution du théorème 1, alors $\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\mathcal{M}(x,\zeta)$ vérifie l'équation (5) (formellement) d'où

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\mathcal{M} = \mathcal{M} W^x$$

et W est portée par l'ensemble $\Sigma \cup \{\text{pôles}\}$.

En outre $\mathcal{M}$ vérifie l'équation, (en résolvant $\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}$)

$$\mathcal{M}(x,\xi) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \frac{\mathcal{M} W^x}{\eta - \xi}\, d\eta + \sum_{\text{pôles}} \frac{\mathcal{M}(x,\xi_\nu)}{\xi_\nu - \xi} W^x(\xi_\nu) . \tag{6}$$

Ceci nous conduit au théorème

<u>Théorème 2</u> : L'application $Q \to W$ est injective .

Nous appellerons W la "transformée spectrale" de Q (liée au problème spectral (5)). L'équation (6) nous fournit une méthode pour reconstruire Q à partir de W.

Remarquons que lorsque $J + J^* = 0$ nous pouvons lier la matrice de scattering S (qui est bien définie pour $\xi \in \mathbb{R}$) avec W par le procédé suivant :

On cherche V_+, V_- telle que

SV_+ est sous diagonale, SV_- surdiagonale et $V_+(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$V_-(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & 1 \end{pmatrix} .$$

N est alors donnée par $W|_\Sigma = I - V_+^{-1} V_-$.

Pour décrire la relation entre l'évolution de W et celle de Q, nous commençons par observer que $\mathcal{M}$ admet un développement asymptotique

$$\mathcal{M}(x,\xi) = \Sigma\, \mathcal{M}_k(x)\ \xi^{-k-1}$$

(Ceci découle de 6 en ignorant pour simplifier la contribution des pôles), d'où

$$\left(\frac{d}{dx} - Q\right) \mathcal{M}_k = \mathcal{J}\mathcal{M}_{k+1}$$

et

$$\mathcal{M}_{-1} = I$$

ainsi

$$Q = -\mathcal{J}\mathcal{M}_o = -\lim_{\xi \to \infty} \xi\, \mathcal{J}(\mathcal{M}(x,\xi) - I)$$

$$= -\lim_{\xi \to \infty} \xi \mathcal{J}\mathcal{M}(x,\xi)$$

d'où

$$\dot{Q} = -\lim_{\xi \to \infty} \xi\, \mathcal{J}\dot{\mathcal{M}} \quad (\cdot \text{ est la dérivée par rapport à } t)$$

$$= -\lim_{\xi \to \infty} \xi\, \mathcal{J}\dot{\mathcal{M}}\,\mathcal{M}^{-1} .$$

Un calcul formel donne encore

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{\mathcal{M}}\mathcal{M}^{-1}) = \mathcal{M}(\mathcal{M}^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi})^{\bullet}\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}w^{x}\mathcal{M}^{-1} .$$

En résolvant $\frac{\partial}{\partial\xi}$ comme en (6) nous obtenons

$$\dot{Q} = \mathcal{J}\int_{\Sigma}\mathcal{M}\dot{w}^{x}\mathcal{M}^{-1}d\eta .$$

Si

$$\dot{w} = \xi^{k}\,[\mu,w] \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix} \qquad \mu_2 \in \mathbb{C}$$

On obtient

$$\dot{Q} = \mathcal{J}\int_{\Sigma}\mathcal{M}[\mu,w]^{x}\mathcal{M}^{-1}\,\xi^{k}d\xi.$$

Le membre de droite est un terme du développement asymptotique de

$$\mathcal{M}\mu\mathcal{M}^{-1} = \Sigma\,\lambda_k(Q)\xi^{-k-1}$$

(Il suffit d'observer que $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{M}\mu\mathcal{M}^{-1} = -\mathcal{M}[\mu,w^{x}]\mathcal{M}^{-1}$ et de résoudre $\frac{d}{d\xi}$).

D'autre part nous pouvons déterminer $\lambda_k(Q)$ à partir de l'équation vérifiée par $\mathcal{M}\mu\mathcal{M}^{-1}$ c'est-à-dire

$$(D - \xi\mathcal{J} - \mathrm{ad}Q)(\mathcal{M}\mu\mathcal{M}^{-1}) = 0$$

d'où $$(D_x - \mathrm{ad}Q)\lambda_k = \mathcal{J}\lambda_{k+1}$$

ce qui permet de déterminer λ_k de proche en proche .

Nous obtenons pour $k = 1$

$$\dot{Q} = \mathcal{J}^{-1}[\mu,\frac{\partial Q}{\partial x}] - [Q,\mathcal{J}^{-1}[\mu,Q]] \qquad \text{(hors de la diagonale)}$$

pour $k = 2$ et $\mu = J$

$$\dot{Q} = \mathcal{J}^{-1}D^2Q - [Q, \mathcal{J}^{-1}DQ]' - \frac{1}{2}[Q,[Q,\mathcal{J}^{-1}Q]^{\circ} ,$$

(ou A° = diag A et $A' = A - A^{\circ}$).

REFERENCES

[1] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell et H. Segur : The Inverse scattering transform-Fourier analysis for non linear problems. Stud. Appl. Math. 53, 1974, 249-315.

[2] Zakharov, V. E. et A. B. Shabat : Exact theory of two dimensional self-focusing and one dimensional self-modulation of waves in non linear media. Sov. Phys. 1972, J. E. T. P. 34, 62-69.

* * * *