HENRI-MICHEL MAIRE

Sous-ellipticité et hypoellipticité maximale pour des systèmes différentiels

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A9_0>

SOUS-ELLIPTICITE ET HYPOELLIPTICITE MAXIMALE POUR DES SYSTEMES DIFFERENTIELS

par H. M. MAIRE

On considère 2p champs de vecteurs réels X_j de classe C^∞ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfaisant la condition de Hörmander d'ordre r (cf. [1]) et on pose $L_j = X_j + iX_{p+j}$, $L = (L_1,\dots,L_p)$.

Définition : Pour $0 \leqslant \delta < 1$, $(x_o,\xi_o) \in T^*\setminus 0$, on dit que le système L est δ - sous-elliptique [resp hypoelliptique maximal] en (x_o,ξ_o) si u et $L_j u \in H^s$ en (x_o,ξ_o) entraîne $u \in H^{s+1-\delta}$ [resp. $X_k u \in H^s$] en (x_o,ξ_o).

Cette définition est équivalente à la définition habituelle avec les inégalités a priori (cf. Hörmander [3]). D'après une inégalité de Rothschild-Stein [1] on a : si L est hypoelliptique maximal en (x_o,ξ_o), alors L est $\frac{r-1}{r}$ -sous-elliptique en (x_o,ξ_o). Par contre le système suivant :

$$L_1 = \partial_{x_1} + i((2\ell + 1)x_1^{2\ell} - x_2^2)\partial_{x_3}$$

$$L_2 = \partial_{x_2} - i2x_1x_2\,\partial_{x_3}$$

est $\frac{2\ell}{2\ell+1}$-sous-elliptique mais pas hypoelliptique maximal en (0,(0,0,1)).

Théorème : Le système L est δ sous-elliptique en $(x_o,\xi_o) \in T^*\Omega\setminus 0$ si et seulement si u et $L^*Lu \in H^0$ en (x_o,ξ_o) entraîne $u \in H^{2-2\delta}$ et $Lu \in H^{1-\delta}$ en (x_o,ξ_o).

La démonstration emploie les résultats de Kohn-Nirenberg [4] et Sweeney [6]. Le résultat correspondant pour l'hypoellipticité maximale n'est pas connu en général mais est une conséquence des conjectures de Helffer-Nourrigat [2] .

Corollaire : L'opérateur $\square_b$ pour le domaine faiblement pseudo-convexe $\{t \in \mathbb{C}^3 ; \mathrm{Im}\, z_3 = |z_1|^4 + |z_2|^4\}$ est hypoelliptique avec perte de $\frac{3}{2}$ dérivées (cf. Rotschild [5]).

Dans la suite, on suppose que L a la forme :

$$L_j = \partial_{t_j} + b_j(t,x,D_x) \qquad j = 1,\dots,p\ , \quad t \in \mathbb{R}^p\ , \quad x \in \mathbb{R}^n\ ,$$

où $b(t,x,\xi) = \mathrm{grad}_t B(t,x,\xi)$, avec B linéaire en ξ et analytique en (t,x).

<u>Proposition</u> : Soit $(t_o,x_o,\xi_o) \in \Omega \times \dot{\mathbb{R}}^n$. Le système L est hypoelliptique maximal en $(t_o,x_o,0,\xi_o)$ si et seulement s'il existe un voisinage compact K de t_o, un voisinage conique Γ de (x_o,ξ_o) et $C > 0$ tels que :

$$\|\partial_t v\| + \|b(t,x,\xi)v\| \leqslant C(\|L(t,x,\partial_t,\xi)v\| + \|v\|), \quad \forall v \in C_o^\infty(K), \quad \forall (x,\xi) \in \Gamma .$$

<u>Notation</u> : Si m est l'ordre d'annulation de $B(.,x_o,\xi_o)$ en t_o, on note $\mathcal{C}_{(t_o,x_o,\xi_o)}(B)$ le cône tangent au sous-ensemble de niveau $B = B(t_o,x_o,\xi_o)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_{(t_o,x_o,\xi_o)}(B) = \{t \in \mathbb{R}^p ; \sum_{|\alpha|=m} (t-t_o)^\alpha \frac{\partial^\alpha B}{\partial t^\alpha}(t_o,x_o,\xi_o) / \alpha! = 0\}$$

<u>Théorème</u> : Pour $(t_o,x_o,\xi_o) \in \Omega \times \dot{\mathbb{R}}^n$, on suppose qu'il existe un voisinage compact K de t_o, un voisinage conique Γ de (x_o,ξ_o) et en chaque $t \in K$ une courbe γ_t tels que :

(i) $\forall t \in K$, γ_t coupe $\mathcal{C}_{(t,x_o,\xi_o)}(B)$ transversalement ;

(ii) $\forall (t,x,\xi) \in K \times \Gamma$, $B|\gamma_t$ est monotone .

Alors le système L est hypoelliptique maximal en $(t_o,x_o,0,\xi_o)$.

<u>Remarque</u> : Pour B indépendant de x et $n = 1$, la condition du théorème est aussi nécessaire avec γ_t courbe intégrale du champ $b(t,\xi_o)$.

---

[1] B. Helffer et J. Nourrigat : Approximation d'un système de champs de vecteurs et application à l'hypoellipticité, Arkiv för Mat. 17 (1979), p.237.

[2] B. Helffer et J. Nourrigat : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champ de vecteurs, Ces "Journées E.D.P. 1980".

[3] L. Hörmander : Subelliptic operators, in Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations, Princeton 1978.

[4] J. J. Kohn and L. Nirenberg : Noncoercive boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), p.443.

[5] L. P. Rothschild : Nonexistence of optimal L^2 estimates..., to appear.

[6] W. J. Sweeney : A characterization of local subellipticity for pseudodifferential complexes, J. Diff. Equations 13 (1973), p.495.

***