

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CHRISTIANE RONDEAUX

Classes de Schatten d'opérateurs pseudo-différentiels

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A6_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSES DE SCHATTEN D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par C. RONDEAUX

Soit A un opérateur pseudo-différentiel de symbole a . L'égalité $\text{Tr}(A) = \int a(x) dx$ est vraie si l'on fait les deux hypothèses suivantes assurant l'existence de chacun des deux membres : A est un opérateur à trace et $a \in L^1(\mathbb{R}^{2\nu})$. Cependant, aucune de ces hypothèses n'entraîne l'autre.

Soit A un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ et soit (λ_n) la suite des valeurs propres de $(A^*A)^{1/2}$; on dit que A est dans la classe de Schatten \mathcal{J}_p , $1 \leq p \leq \infty$, si $\sum_n (\lambda_n)^p < \infty$.

On se propose de répondre aux questions suivantes :

1. L'appartenance à L^p des dérivées de a jusqu'à un certain ordre suffit-elle pour affirmer que A est dans \mathcal{J}_p ?
2. Que peut-on dire du symbole d'un opérateur de \mathcal{J}_p ?

On utilise la quantification de Weyl $Op_{1/2}$, définie pour $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2\nu})$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ par :

$$Op_{1/2}(a)u(x) = \iint a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{2i\pi\langle x-y, \xi \rangle} u(y) dy d\xi$$

L'espace de phase $\mathbb{R}^{2\nu}$ est muni d'un champ de normes symplectiques $Y \mapsto \|\cdot\|_Y$ vérifiant la condition :

(i) il existe $C > 0$ tel que, pour tous $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{2\nu}$, $\|X - Y\|_Y \leq C^{-1}$ entraîne $\|Z\|_X \leq C\|Z\|_Y$.

Si Y et $Y' \in \mathbb{R}^{2\nu}$, $\|\cdot\|_{Y, Y'}$ désigne la norme définie par

$$\|Z\|_{Y, Y'}^2 = 2 \inf_{Z_1 + Z_2 = Z} (\|Z_1\|_Y^2 + \|Z_2\|_{Y'}^2) \text{ et } \det_{Y, Y'} \text{ est le déterminant de la forme quadratique } \|\cdot\|_{Y, Y'}^2.$$

Théorème 1 : Pour $a \in C^k(\mathbb{R}^{2\nu})$, soit

$$\|a\|_{L_k^p} = \sum_{0 \leq q \leq k} \left(\int \left(\sup_{\|V_j\|_X \leq 1} |V_1(D) \dots V_q(D) a(x)| \right)^p dx \right)^{1/p}$$

1. Soit $1 \leq p \leq 2$. Supposons que le champ de normes vérifie les conditions (i) et

$$(ii) : \sup_X \int e^{-4\pi \|X-Y\|_Y^2} dY < \infty .$$

Alors, pour tout entier pair $k > 2\nu \left(\frac{2}{p} - 1\right)$, si $\|a\|_{L_k^p} < \infty$, $op_{1/2}(a)$ appartient à \mathcal{J}_p .

2. Soit $2 \leq p < \infty$. Supposons que le champ de normes vérifie les conditions (i), (ii), et (iii): il existe $m_0 > 0$ tel que $\det_{Y,Y'}^{1/4} (1 + \|Y-Y'\|_{Y,Y'})^{-m_0}$ soit le noyau d'un opérateur borné sur L^2 .

Alors, pour tout entier pair $k > (2m_0 + \nu) \left(1 - \frac{2}{p}\right)$, si

$$\|a\|_{L_k^p} < \infty, op_{1/2}(a) \text{ appartient à } \mathcal{J}_p .$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'écriture des opérateurs pseudo-différentiels sous forme d'intégrales d'opérateurs de rang 1, mise en évidence par A. Unterberger [3].

Pour répondre à la deuxième question posée, introduisons le symbole normal $W(A)$ de l'opérateur A , défini par :

$$W(A)(Y) = (A \varphi_Y, \varphi_Y)$$

où φ_Y est la fonction propre normalisée de l'oscillateur harmonique $op_{1/2}(X \mapsto \pi \|X-Y\|_Y^2)$ associée à la valeur propre $\nu/2$.

Théorème 2 :

1. On suppose que le champ de normes vérifie les conditions (i) et

$$(iv) : \det_{Y,Y'}^{1/2} e^{-\pi \|Y-Y'\|_{Y,Y'}^2} \text{ est le noyau d'un opérateur borné sur } L^2(\mathbb{R}^{2\nu}).$$

Alors, si $2 \leq p \leq \infty$, pour tout A de \mathcal{J}_p , $W(A)$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^{2\nu})$.

De plus, si $A \in \mathcal{J}_\infty$, $W(A)(Y)$ tend vers 0 quand $|Y|$ tend vers l'infini.

2. On suppose que le champ de normes vérifie (i) et (iii). Alors, si $1 \leq p \leq 2$, pour tout A de \mathcal{J}_p , $W(A)$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^{2\nu})$.

Les théorèmes 1 et 2 permettent de prouver la caractérisation suivante, dans le cas où le champ de normes est constant, analogue pour \mathcal{J}_p d'une caractérisation par R. Beals [1] des opérateurs pseudo-différentiels.

Théorème 3 : Soit F_j la famille d'opérateurs définie par :

$$F_j = \text{op}_{1/2}(x_j) \quad \text{si } j = 1 \dots \nu \quad ; \quad F_j = \text{Op}_{1/2}(\xi_{j-\nu}) \quad \text{si } j = \nu+1, \dots, 2\nu .$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2\nu}$, $\int |D^\alpha a(x)|^p dx < \infty$
- b. Pour tout k-uple $(j_1 \dots j_k)$, $[F_{j_1}, [\dots, [F_{j_k}, \text{op}_{1/2}(a)] \dots]]$ appartient à \mathcal{J}_p .

Enfin soit g une fonction ordre positive, compatible avec le champ de normes; supposons que les conditions permettant de définir les espaces de Sobolev généraux H^g soient satisfaites (on peut utiliser soit les espaces définis par R. Beals, soit ceux définies par N. Lerner [2]). Alors,

Théorème 4 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $e^{-g} \in L^p(\mathbb{R}^{2\nu})$
- 2) Tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-g$ est dans \mathcal{J}_p
- 3) Soit i l'injection de H^g dans $L^2(\mathbb{R}^{2\nu})$, pour tout opérateur A borné de L^2 dans H^g , $i \circ A$ est dans \mathcal{J}_p .

-
- [1] R. Beals : Characterization of pseudo differential operators and applications. Duke Math. Journal (V. 44) n° 1, 1977.
- [2] N. Lerner : Comptes Rendus de l'Acad. Sc., t.289; série A; 1979, p.663.
- [3] A. Unterberger : Opérateurs métadifférentiels. Proceedings du meeting des Houches, 1979, à paraître aux Lectures Notes in Physics.

*
*
*