JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GERD GRUBB

Sur la résolvante et le calcul fonctionnel des problèmes aux limites pseudo-différentiels

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A3_0>

Conférence n° 3

SUR LA RESOLVANTE ET LE CALCUL FONCTIONNEL DES PROBLEMES AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIELS

par Gerd GRUBB

On considère un opérateur pseudo-différentiel classique P matriciel d'ordre d entier > 0, défini dans un voisinage Σ d'une variété C^∞ compacte $\bar{\Omega}$ de dimension n, de bord Γ et d'intérieur Ω. On suppose que P ait la propriété de transmission à Γ, voir Boutet de Monvel [1]. Soit T un opérateur de trace (e.g. différentiel d'ordre < d). On suppose qu'il existe un voisinage V de $\bar{\mathbb{R}}_-$ dans $\mathbb{C}$ tel que :

(i) $p^0(x,\xi) - \lambda I$ (symbole principal intérieur) est inversible pour tout $(x,\xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0$, $\lambda \in V$;

(ii) l'opérateur

$$\begin{pmatrix} p^0(x',0,\xi',D_n)_\Omega - \lambda I \\ t^0(x',\xi',D_n) \end{pmatrix} : \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^N \longrightarrow \begin{matrix} \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^N \\ \times \\ \mathbb{C}^M \end{matrix}$$

(symbole principal au bord) est inversible pour tout $(x',\xi') \in T^*(\Gamma)\setminus 0$, $\lambda \in V$.

P_T désigne la réalisation de P_Ω de domaine $D(P_T) = \{u \in H^d(\Omega) \mid Tu = 0\}$, et R_λ sa résolvante $R_\lambda = (P_T - \lambda I)^{-1}$; on montre que $R_\lambda \in L(L^2(\Omega))$ pour λ dans un voisinage $V' \subset V$ de $\bar{\mathbb{R}}_-$.

Soit Q_λ une paramétrixe de $P - \lambda I$ dans Σ, alors

$$\begin{pmatrix} P_\Omega - \lambda I \\ T \end{pmatrix} \text{ a l'invers } (R_\lambda \quad K_\lambda) ,$$

où

$$R_\lambda = Q_{\lambda,\Omega} + G_\lambda \qquad (\text{pour } \lambda \in V') ;$$

K_λ est un opérateur de Poisson et G_λ un opérateur de Green singulier (o.g.s.) [1] . On veut décrire R_λ ; la difficulté est la description de G_λ .-La théorie s'applique e.g. à la théorie spectrale (étude de valeurs propres), et le calcul fonctionnel, où on définit :

$$(1) \qquad f(P_T) = \frac{i}{2\pi}\int_C f(\lambda)R_\lambda \, d\lambda \ ,$$

pour une fonction f analytique au voisinage du spectre de P_T, C entourant $sp(P_T)$.

Rappelons la définition d'un o.g.s. G d'ordre m, en coordonnées locales :

$$Gu = Op'(g(x',\xi',D_n))u = (2\pi)^{-n+1}\int e^{ix'\xi'}g(x',\xi',D_n)\hat{u}(\xi',x_n)d\xi' \ ,$$

où

$$g(x',\xi',D_n) = \sum_{1\leqslant j<r} k_j(x',\xi',D_n)\gamma_j + g'(x',\xi',D_n) \ ;$$

ici les k_j sont des opérateurs de Poisson, $\gamma_j u = D_n^j u(0)$, et $g'(x',\xi',D_n)$ est l'opérateur Hilbert-Schmidt à noyau

$$\tilde{g}'(x',\xi',x_n,y_n) = \sum_{k,\ell\geqslant 0} c_{k\ell}(x',\xi')\varphi_n(x_n\langle\xi'\rangle)\varphi_\ell(y_n\langle\xi'\rangle) \ ,$$

où $(\varphi_k(t))_{k\geqslant 0}$ est une variante du système orthogonal des fonctions de Laguerre dans $L^2(\mathbb{R}_+)$; on suppose que pour tout α',β',N et N' on ait, localement en x' ,

$$\begin{aligned}\|(D_{x'}^{\beta'}D_{\xi'}^{\alpha'}c_{k\ell})\|_{\ell^2_{N,N'}} &\equiv \Big(\sum_{k,\ell\geq 0}|(1+k)^N(1+\ell)^{N'}D_{x'}^{\beta'}D_{\xi'}^{\alpha'}c_{k\ell}|^2\Big)^{\frac12} = \\ &= \mathcal{O}(\langle\xi'\rangle^{1+m-|\alpha'|}) \quad \text{pour} \quad |\xi'|\to\infty.\end{aligned}$$

Une première étude de G_λ a été faite dans Grubb [2] dans le cas où $p^o(x,\xi)$ est indépendant de x_n au voisinage du bord.

Une difficulté dans l'étude de Q_λ et G_λ dans le cas o.p.d. est que $p^o(x,\xi) - \lambda I$, considéré comme fonction de $(\xi,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\mu = (-\lambda)^{1/d}$, a une singularité à l'axe $\xi = 0$ (on le prend, ou bien C^∞ et non homogène pour $|\xi|<1$, ou bien homogène et non C^∞ là); en particulier, $D_\xi^\alpha(p^o-\lambda I)^{-1}$ est $\mathcal{O}(|\xi|^{d-|\alpha|}|\xi,\mu|^{-2d})$ pour $|\alpha|\geqslant d$. Cela conduit à des classes de symboles $S^{m,\nu}$ (d'ordre m et régularité $\nu\in\mathbb{R}$), où

$$S^{m,\nu}\,.\,S^{m',\nu'}\subset S^{m+m',\min(\nu,\nu',\nu+\nu')} \ ,$$

et des classes semblables pour les suites de coefficients $(c_{k\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}}$ avec les normes $\|\,.\,\|_{\ell^2_{N,N'}}$.

<u>Théorème 1</u> : Soit $\kappa = (|\xi'|^2+\mu^2+1)^{1/2}$. Le symbole de G_λ est de la forme $g(x',\xi',\xi_n,\eta_n,\lambda)\sim g_{-d}+g_{-d-1}+\dots$, où les $\tilde{g}_{-d-j}(x',\xi',x_n,y_n,\lambda) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n}\overline{\mathcal{F}}^{-1}_{\eta_n}g_{-d-j}$

vérifient

$$\| D_{x'}^{\beta'} D_{\xi'}^{\alpha'} (D_{x_n} x_n D_{x_n})^N (D_{y_n} y_n D_{y_n})^M \tilde{g}_{-d-j} \|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} =$$

$$= \mathcal{O}(\langle \xi' \rangle^{\nu - j - |\alpha'| - M - N} \kappa^{-d-\nu+2N+2M})$$

pour $|\xi', \mu| \to \infty$; avec $\nu = d - 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Dans le cas différentiel on obtient cette estimation avec $\langle \xi' \rangle$ remplacé par κ (voir Seeley [4]). Il y a aussi des estimations de $x_n^N D_{x_n}^{N'} y_n^M D_{y_n}^{M'} \tilde{g}_{-d-j}$.

Une conséquence du théorème 1 est que pour s > 0, la formule (1) avec $f(\lambda) = \lambda^{-s}$ donne

$$(P_T)^{-s} = (Q_\lambda^{-s})_\Omega + G^{(-s)} \quad ,$$

où $G^{(-s)}$ n'est pas un o.g.s. de Boutet, mais quand même un "o.p.d. en x' à valeurs Hilbert-Schmidt en $x_n > 0$", avec un peu de régularité. Il partage la propriété suivante avec les o.g.s. strictes :

<u>Théorème 2</u> : Les valeurs propres de $|G^{(-s)}| = (G^{(-s)*} G^{(-s)})^{1/2}$ ont le comportement asymptotique

$$\lambda_j(|G^{(-s)}|) = \mathcal{O}(j^{-ds/(n-1)}) \quad , \text{ pour } j \to \infty \quad .$$

Comme corollaire on montre en regardant P_T^{-1} et $(P_T^2)^{-1/2}$, l'extension d'un résultat de [3] :

<u>Théorème 3</u> : Soit P d'ordre pair, non <u>fortement</u> elliptique, et P_T autoadjoint; alors, pour $t \to \infty$,

$$N^{\pm}(t;P_T) = c_p^{\pm}\, t^{n/d} + \mathcal{O}(t^{(n-(1/2)+\varepsilon)/d}) \quad , \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \; .$$

Une partie de la théorie a été rédigé dans une série de publications du Département de Mathématiques de l'Université de Copenhague.

REFERENCES

[1] L. Boutet de Monvel, Acta Math. 126 (1971), 11-51.

[2] G. Grubb, Comm. Part. Diff. Equ. 2 (1977), 1071-1150.

[3] G. Grubb, C. R. Acad. Sc. Paris 287 (1978), 1017-1020.

[4] R. Seeley, Amer. J. Math. 91 (1969), 889-920.

*
* *
*