JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SERGE ALINHAC
CLAUDE ZUILY

Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A1_0>

UNICITE ET NON UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par S. ALINHAC et C. ZUILY

Cette note présente des conditions suffisantes d'unicité et de non unicité du problème de Cauchy, relatif à la surface $\{t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}_{(x,t)}$, pour des opérateurs différentiels de la forme :

$$P(x,t\,;D_x,D_t) = D_t^2 + p(x,t\,;\,D_x,D_t) + c$$

où p est un opérateur du premier ordre à coefficients C^∞ et c une fonction C^∞. (voir Matsumoto [4] , Zuily [6] pour certains résultats partiels).

Les résultats d'unicité sont obtenus à l'aide de la technique des inégalités de Carleman et ceux de non unicité par une méthode qui est à rapprocher des travaux de Cohen [2] , Pliš [5] , Hörmander [3] , Alinhac-Baouendi [1] , où la méthode de l'optique géométrique joue un rôle crucial.

Il apparaît que dès que n est plus grand que 1, l'unicité pour P, pour toute perturbation d'ordre zéro, C^∞ , est un phénomène exceptionnel.

RESULTATS

Dans ce qui suit nous noterons (x,t), $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$, V un voisinage du point $(0,0)$ et $V^+ = \{(x,t) \in V : t > 0\}$.

Nous désignerons par E l'ensemble des opérateurs tangentiels, homogènes d'ordre 1, $p(x,t;D_x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)D_j$, dont les coefficients sont réels et de classe C^∞ dans V.

Théorème 1 : Soient p_1, p_2 deux éléments de E et $P_o = D_t^2 + p_1 + ip_2$. Supposons qu'il existe des fonctions a, b, c, d, f, g bornées dans V^+ avec $t\frac{\partial b}{\partial t}$ bornée telles que :

(H.1) $$[\frac{\partial}{\partial t}, p_2] = \frac{a}{t}\, p_2$$

(H.2) $$[\frac{\partial}{\partial t}, p_1] = \frac{b}{t}\, p_1 + \frac{c}{t}\, p_2$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que dans V^+

$$\text{(H.3)}\qquad \begin{cases} b+2 \geqslant \varepsilon \\ 2(a+1) - b \geqslant \varepsilon \\ (b+2)(2a+2-b) - c^2 \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{(H.4)}\qquad [p_1, p_2] = fp_1 + gp_2$$

Alors, si u est un élément de $C^\infty(V)$ qui, pour un $C = C(u)$, vérifie

$$\begin{cases} |P_o u(x,t)| \leqslant C\{\frac{1}{t}|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)| + \frac{1}{t^2}|u(x,t)|\} & (x,t) \in V \\ u|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

il existe un voisinage W de (0,0) dans lequel u est nulle.

Exemples :

1. $P_o = D_t^2 + t^\ell \alpha(x,t) D_1$, $\alpha \in C^\infty(V)$, $\text{Im}\,\alpha \neq 0$, $\ell \in \mathbb{N}$
2. $P_o = D_t^2 + z(t+x^2) D_1$, $z = 1$ ou i
3. $P_o = D_t^2 + t^\ell D_1 + it^m D_2$, $2(m+1) > \ell$.

Théorème 2 : Soit $P = D_t^2 + p_1 + ip_2 + \alpha D_t + \beta$, $\alpha, \beta \in C^\infty(V)$. On suppose qu'il existe $q \in E$ et $c \in C^\infty(V)$, $c \neq 0$ tels que $p_1 + ip_2 = cq$. De plus :

(i) Il existe $m, n \in \mathbb{N}$, $q_1, q_2 \in E$ non nuls en (0,0) tels que dans V^+

$$q = t^m q_1 \ , \quad [\partial_t, q] = t^n q_2$$

(ii) Il existe $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ dans E indépendants en (0,0), des fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 réelles et C^∞ telles que

$$q_1 = f_1 \tilde{p} + f_2 \tilde{q}$$

$$q_2 = g_1 \tilde{p} + g_2 \tilde{q}$$

avec $\Delta = f_1 g_2 - f_2 g_1 = t^h \Delta_1$, $h \in \mathbb{N}$, $\Delta_1(0,0) \neq 0$.

Il existe alors des fonctions a et u de classe C^∞ dans V nulles pour $t<0$ telles que

$$\begin{cases} Pu - au = 0 \\ (0,0) \in \text{supp}\, u \end{cases}$$

Remarques :

a) Si $q(0,0;\xi)$ et $q'_t(0,0;\xi)$ sont deux formes linéaires indépendantes les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2 sont satisfaites. L'exemple le plus simple étant $q = \partial_1 + t\partial_2$, $q'_t = \partial_2$.

b) Le théorème 2 concerne donc essentiellement le cas où p_1 et p_2 sont "dépendantes" tandis que p_2 et p'_2 sont "indépendantes".

Théorème 3 : Soit $P = D_t^2 + p_1 + ip_2 + \alpha D_t + \beta$, $\alpha, \beta \in C^\infty(V)$, $p_1, p_2 \in E$. On suppose que :

(i) Il existe des entiers m, n, des éléments q_1, $q_2 \in E$ non nuls en (0,0) tels que

$$p_1 = t^m q_1 \quad , \quad p_2 = t^n q_2$$

ii) Il existe des éléments $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, v de E, des entiers k_1, k_2, ℓ , des fonctions réelles e_j, f_j, g_j $j = 1,2$, de classe C^∞ dans V^+ telles que

a) $\tilde{p}(0,0;\xi)$, $\tilde{q}(0,0;\xi)$ sont indépendantes.

b) $v \equiv 0$ ou bien $v(x,t;\xi) = t^\ell \tilde{v}(x,t;\xi)$ et $\tilde{v}(0,0;\xi)$ n'est pas dans le plan engendré par $\tilde{p}(0,0;\xi)$ et $\tilde{q}(0,0;\xi)$

c) $$\begin{cases} q_1 = e_1\tilde{p} + e_2\tilde{q} \\ q_2 = f_1\tilde{p} + f_2\tilde{q} \\ [\frac{\partial}{\partial t}, p_2] = g_1\tilde{p} + g_2\tilde{q} + v \end{cases}$$

d) On note $\Delta_1 = e_1f_2 - e_2f_1$, $\Delta_2 = f_1g_2 - f_2g_1$. Alors

$$* \quad \Delta_1(x,t) = t^{k_1}\tilde{\Delta}_1 \ , \quad \tilde{\Delta}_1(0,0) \neq 0$$

$$* \quad \begin{cases} \text{Si } v \equiv 0 \ , & \Delta_2 = t^{k_2}\tilde{\Delta}_2 \ , \ \tilde{\Delta}_2(0,0) \neq 0 \\ \text{Si } v \equiv 0 & , \text{ soit } \ell = 0, \text{ soit } \ell \neq 0 \text{ et alors } \Delta_2 \equiv 0 \text{ ou} \end{cases}$$

$\Delta_2 = t^{k_2}\tilde{\Delta}_2$, $\tilde{\Delta}_2(0,0) \neq 0$. Il existe alors deux fonctions a et u de classe C^∞ dans V, nulles pour $t < 0$ telles que :

$$\begin{cases} Pu - au = 0 \\ (0,0) \in \text{Supp } u \end{cases}$$

Remarques :

1. Par exemple si $p_1(0,0;\xi)$ et $p_2(0,0;\xi)$ sont indépendants de même que $p_2(0,0;\xi)$,

$p'_2(0,0;\xi)$ les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites (on peut prendre $p_1 = D_1$, $p_2 = D_2 + tD_3$). Mais pour traiter le cas où $p_1 = D_1$, $p_2 = D_1 + tD_2$, il faut utiliser le théorème 3.

2. Ce résultat concerne donc essentiellement le cas où p_2 et p'_2 sont "indépendantes" et p_1 et p_2 sont "indépendantes".

Théorème 4 : Soit $P = D_t^2 + p_1 + ip_2 + \alpha D_t + \beta$. On suppose que

(i) Il existe des élements $q_1,\dots,q_r$ de E, ($r \leqslant n-1$) indépendants en (0,0) et en involution, tels que pour tout $t \geqslant 0$ et x voisin de 0, $p_1(x,t;\xi)$ et $p_2(x,t;\xi)$ appartiennent à l'espace $\Lambda(t,x)$ engendré par les $q_i(x,t;\xi)$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

(ii) a) Il existe, pour $t > 0$, une fonction b telle que $[\partial_t, p_2] = bp_2$.

b) Il existe $v \in E$, n'appartenant pas à Λ au point (0,0) et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que $[\partial_t, p_1] = t^m v + w$, $w \in \Lambda$.

c) Il existe $\tilde{p}$, $\tilde{q} \in E$, indépendants en $(t,x) = (0,0)$ et des fonctions f_1, f_2 g_1, g_2 réelles et $C^\infty(V)$ telles que pour $(x,t) \in V^+$

$$\begin{cases} p_1 = f_1\tilde{p} + f_2\tilde{q} \\ p_2 = g_1\tilde{p} + g_2\tilde{q} \end{cases} \qquad \Delta = f_1g_2 - f_2g_1 = t^h \Delta_1 \ , \ \Delta_1 \neq 0, \ h \in \mathbb{N} .$$

Il existe alors des fonctions a et u de classe C^∞ dans V, nulles pour $t < 0$ telles que

$$\begin{cases} Pu - au = 0 \\ (0,0) \in \text{supp } u \end{cases}$$

Le dernier résultat met en évidence sur des modèles, l'importance des valeurs numériques des coefficients (Cf. hypothèse (H.3) du théorème 1).

Théorème 5 : Soit P l'un des opérateurs suivants :

a) $P = D_t^2 + t^b D_1 + it^a D_2$, $a,b \in \mathbb{N}$, $2(a+1) < b$

b) $P = D_t^2 + t^\ell(D_1 + dt^m D_2) + it^{\ell+m} D_2$, $\ell,m \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$ et $m^2d^2 > (\ell+2)(2m+\ell+2)$

Il existe des fonctions a,u de classe C^∞ dans V, nulles pour $t < 0$ telles que $Pu - au = 0$ et $(0,0) \in \text{supp } u$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac, M. S. Baouendi : Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé XXII, Ecole Polytechnique, Paris.

[2] P. Cohen : The non uniqueness of the Cauchy problem. ONR. Techn. Report 93 Stanford, 1960.

[3] L. Hörmander : Non uniqueness for the Cauchy problem. Lecture notes in Math. Springer Verlag n°459 (1975) 36-72.

[4] W. Matsumoto : Uniqueness for the Cauchy problem... Journ. Math. Kyoto Univ. 15-3 (1975) p.479-525.

[5] A. Pliś : A smooth linear elliptic differential equation... Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961) p.599.

[6] C. Zuily : Unicité du problème de Cauchy... Journées d'équations aux dérivées partielles, St Cast (1979)

***