Richard Beals

Propagation de singularités pour les opérateurs du type $D_t^2 - \Box_b$

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A19_0>

PROPAGATION DE SINGULARITES POUR LES OPERATEURS DU TYPE $D_t^2 - \square_b$

par R. BEALS

Sur une variété compacte M on considère un opérateur (pseudo-)différentiel P du second ordre, de symbole principal p. On garde toujours les hypothèses suivantes :

(H 1) $\int_M \bar{u}\, Pu\, d\mu \geqslant 0$ pour chaque $u \in C^\infty(M)$, où μ est une densité positive lisse.

(H 2) $\Sigma = \{p = 0\} \subset X = T^*M \setminus 0$ est une sous-variété symplectique sur laquelle p s'annule exactement à l'ordre 2.

(H 3) P est hypoelliptique avec perte d'une dérivée (si $\Sigma \neq \emptyset$).

Notons que d'après Boutet de Monvel [1], on sait qu'avec (H 2), la condition (H 3) équivaut à une condition explicite sur le symbole sous-principal de P sur Σ . L'exemple le plus important est (la partie de) l'opérateur $\square_b$ au bord d'un domaine complexe strictement pseudo-convexe.

D'après (H 1), p est positif ou nul. Alors $q = \sqrt{p}$ appartient à $C^\infty(X\setminus\Sigma)$ et q engendre un flot hamiltonien $\Phi_s = \exp(s\, H_q)$ sur $X \setminus \Sigma$.

<u>Proposition</u> : Le flot $(\Phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ se prolonge en un groupe d'homéomorphismes de X (notés toujours Φ_s) qui fixent les points de Σ.

On considère aussi les groupes d'homéomorphismes de $T^*\mathbb{R} \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$ définis par

$$\Psi_s^{\pm}(t,\tau,w) = (t+s,\tau,\Phi_{\pm s}(w)) \quad , \qquad w \in X .$$

Posons $Q = P^{1/2}$. La factorisation $L = D_t^2 - P = L^+L^- = L^-L^+$, où $L^{\pm} = D_t \pm Q$, réduit l'étude de l'équation des ondes pour P à l'étude de l'équation de Schrödinger pour Q. Q engendre un groupe unitaire $U(s) = \exp(isQ)$, et on peut montrer que les opérateurs s'étendent à $\mathcal{D}'(M)$.

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{D}'(M)$. Alors les spectres singuliers (fronts d'onde) satisfont à $WF(U(s)f) = \Phi_{-s}(WF(f))$.

Définissons $\operatorname{car} L^{\pm} = \{(t,\tau,w) \in T^*\mathbb{R} \times X : \tau \pm q(w) = 0$.

Théorème 2 : Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M)$. Posons $\Gamma = WF(f) \setminus WF(Lf)$, $\Gamma^{\pm} = \Gamma \setminus \operatorname{car} L^{\mp}$, $\Gamma_o = \Gamma \cap \operatorname{car} L^+ \cap \operatorname{car} L^-$. Alors Γ est la réunion disjointe $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma_o$. De plus, Γ^+ et Γ_o (resp. Γ^- et Γ_o) sont contenus dans $\operatorname{car} L^+$ (resp. $\operatorname{car} L^-$) et ils sont invariants par le flot (Ψ_s^+) (resp. (Ψ_s^-)).

Signalons que dans le cas où $\operatorname{codim} \Sigma = 2$, le Théorème 2 est dû à B. Lascar [2] et à Melrose [3] . Dans le cas classique $\Sigma = \emptyset$, l'opérateur P est elliptique, la racine carrée Q est pseudodifférentiel et classique, et les Théorèmes 1 et 2 se déduisent facilement du fait que pour n'importe quel opérateur pseudodifférentiel classique B, les opérateurs $B(s) = U(s)BU(-s)$ restent pseudodifférentiels et leurs symboles principaux satisfont à $b(s) = b \circ \Phi_s$. De plus, ce fait peut être démontré facilement par récurrence à partie de l'identité :

$$\begin{aligned} B(s) &= B_s + \int_0^s \frac{d}{dr}\,[U(r)B_{s-r}U(-r)]ds \\ &= B_s + \int_0^s U(r)C_{s-r}U(-r)ds \end{aligned}$$

où les B_s ont pour symboles (complets) $b \circ \Phi_s$, puisque les C_r sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre:ordre $(B) - 1$.

Dans le cas général Q est un opérateur pseudodifférentiel non-classique, mais classique en dehors de chaque voisinage conique de Σ. Alors $B(s)$ est encore pseudodifférentiel si son symbole complet ne rencontre pas Σ. Pour aller jusqu'à Σ on définit le support essentiel de $B : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$ comme le plus petit fermé conique $\Gamma \subset X$ tel que $WF(f) \cap \Gamma = \emptyset$ implique $Bf \in C^\infty(M)$. Alors tout marche comme auparavant dès qu'on a le lemme suivant, qui est aussi démontré par la récurrence ci-dessus.

Lemme : Soit $w \in \Sigma$ et soit V un voisinage conique de w. Alors pour chaque $s_o > 0$ il existe un opérateur pseudodifférentiel B, elliptique en w, tel que le support essentiel de $B(s) = U(s)BU(-s)$ soit contenu dans V pour $|s| \leqslant s_o$.

Références

[1] L. Boutet de Monvel : Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974).

[2] B. Lascar, à paraître. (Exposé à Orsay 10/1979).

[3] R. B. Melrose, exposé au séminaire Goulaouic-Schwartz 1980.

*
* *