Journées Équations aux dérivées partielles

Michel Langlais

Équations d’évolution dégénérées

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A16_0>

Conférence n° 16

EQUATIONS D'EVOLUTION DEGENEREES

par Michel LANGLAIS

On cherche une fonction u dépendant de trois variables réelles t,a et x ($t > 0$, $a > 0$ $x \in \Omega$), telle que :

$$u(t,a,x) \geqslant 0$$

et solution du problème :

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} + \mu u - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\displaystyle\int_0^A u(t,a,x)da.\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0\ , \\ u(0,a,x) = u_0(a,x)\ , \\ u(t,0,x) = \displaystyle\int_0^A \beta(t,a,x)a(t,a,u)da\ , \\ \displaystyle\int_0^A u(t,a,u)da.\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0\ ; \end{cases}$$

où μ et β sont deux coefficients positifs ou nuls et u_0 une condition initiale positive ou nulle.

On peut remarquer que si en (t_0,x_0) on a :

$$\int_0^A u(t_0,a,x_0)da = 0$$

alors la positivité de u assure :

$$u(t_0,a,x_0) = 0 \qquad \forall\ a \in\ ]0,A[,$$

et (*) devient une équation hyperbolique du premier ordre. Ce caractère parabolique hyperbolique de (*) entraîne un phénomène de propagation à vitesse finie du support de u_0.

D'autre part (*) modélise un problème de dynamique de population et u représente une densité de population en fonction de l'âge a et de la position géographique x. Il existe une valeur A de a - A finie - telle que :

(1) $$u(t,A,x) = 0 \qquad t > 0,\ x \in \Omega,$$

ce qui est équivalent à supposer que- pour μ ne dépendant que de a - :

(2) $$\int_0^A \mu(a)\,da = +\infty \quad .$$

Notons :

$$\begin{cases} P(t,x) = \displaystyle\int_0^A u(t,a,x)\,da\,, \\ P_0(x) = \displaystyle\int_0^A u_0(a,x)\,da\,; \end{cases}$$

si l'on intègre (*) sur l'intervalle $]0,A[$ par rapport à la variable a on obtient -sous la condition (1) -

$$(\mathcal{U}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[P\,\dfrac{\partial P}{\partial x}\right] = \displaystyle\int_0^A (\beta - \mu)u\,da\,, \\ P(0,x) = P_0(x) \\ P\,\dfrac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

On considère finalement le problème :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} + \mu u - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[P\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0\,, \\ u(0,a,x) = u_0(a,x)\,, \\ u(t,0,x) = \displaystyle\int_0^A \beta u\,da \\ \mathcal{P}\,\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

Il est clair que pour résoudre (*) il suffit de trouver un couple (u,P) solution de $(\mathcal{U})$, $(\mathcal{P})$ et de vérifier que :

$$\int_0^A u(t,a,x)\,da = P(t,x) \quad .$$

Le problème $(\mathcal{P})$ est un problème du type "diffusion dans les milieux poreux". Si l'on suppose que :

$$0 \leqslant m_0 \leqslant p_0(x) \leqslant M_0 < +\infty \quad ,$$

la résolution de $(\mathcal{P})$ dépend du fait que $m_o > 0$ (cas non dégénéré) où $m_o = 0$ (cas dégénéré). Si $m_o > 0$ on a $P(t,x) \geqslant m_1 > 0$ alors que si $m_o = 0$, $P(t,x) \geqslant 0$ et le support de p_o - et donc de u_o - se propage à vitesse finie.

Pour la résolution de (*) voir [5]; pour les propriétés de "diffusion dans les milieux poreux" voir [6], [1],[4], [2], et leurs bibliographies.

---

[1] D. G. Aronson, Regularity of flows through porous media. SIAM, J. Appl. Math. 17 (1969).

[2] I. Diaz-Diaz, Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems. Nonlinear analysis, vol.3, n°6, pp.831-847.

[3] M. E. Gurtin, R. C. Mac Camy, On the diffusion of biological population Math. Biosc. 33 35-49, 1977.

[4] B. Knerr , The porous medium equation in one dimension. Transactions of A.M.S., vol. 234, n°2, 1977.

[5] M. Langlais, à paraître.

[6] O. A. Oleinik, A. S. Kalasnikov, Yui Lin, The Cauchy problem and boundary value problem for equations of the type of non stationary filtration. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 22, 1958, 667-704.

*
* *
*