Journées Équations aux dérivées partielles

Claudy Schol-Cancelier

Problème de Dirichlet intégro-différentiel et semi-groupe de Feller sur un ouvert borné de R^n

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A15_0>

PROBLEME DE DIRICHLET INTEGRO-DIFFERENTIEL ET SEMI-GROUPE DE FELLER SUR UN OUVERT BORNE DE $\mathbb{R}^n$

par Mme C. SCHOL-CANCELIER

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière de classe C^2. On se propose d'étudier les opérateurs suivants :

$$wu(x) = Pu(x) + Su(x) \qquad u \in C^2(\bar{\Omega}) \ , \quad x \in \Omega$$

où P est un opérateur différentiel du second ordre elliptique éventuellement dégénéré, et S un opérateur défini par

$$\int_\Omega s(x,y) \ [u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i) u_i'(x)] dy \ ;$$

$s(x,y) \geq 0$ étant une densité satisfaisant la condition $\int_\Omega s(x,y) |y-x|^2 dy < +\infty$.

Ces opérateurs vérifient le principe du maximum positif :
$x \in \Omega$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $u(x) = \text{Sup}\, u \geq 0 \Rightarrow wu(x) \leq 0$.
A des conditions de régularité près, les opérateurs w sont les seuls opérateurs satisfaisant le principe du maximum positif ([1]).

On suppose que α est un nombre réel > 0, que $s(x,y) = \dfrac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}}$ où $K(x,y)$ est une fonction positive, indéfiniment dérivable, nulle dès que $x = y$ appartient à $\partial\Omega$ ainsi que ses dérivées partielles d'ordres 1 et 2.

On suppose aussi que le bord $\partial\Omega$ n'est pas caractéristique.

Pour les solutions faibles du problème de Dirichlet

$$\left\{\begin{aligned} (w - \beta)u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (\beta \text{ réel } > 0) \ ,$$

on démontrera des résultats d'existence, de régularité et d'unicité.

I. Nouvelle formulation de l'opérateur w .

d(x) désignera la distance de x au bord $\partial\Omega$. L'expression Su(x) est égale à

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)u_i'(x)]dy \qquad (x \in \Omega)$$

égale (en négligeant un terme à noyau intégrable) à

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x)]dy -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{n} u_i'(x)K(x,x)\int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{y^i - x^i}{|y-x|^{n+2-\alpha}} dy \quad .$$

Lorsque $x \in \Omega$, l'intégrale $\int_{|y-x| \leq \frac{1}{2}d(x)} \frac{y^i - x^i}{|y-x|^{n+2-\alpha}}$ est nulle; on peut donc fixer pour le deuxième terme ε à $\frac{1}{2}$. En utilisant les propriétés d'annulation de K(x,y) sur le bord on peut prolonger le terme $K(x,x)\int_{|y-x| \geq \frac{1}{2}d(x)} \frac{y^i-x^i}{|y-x|^{n+2-\alpha}} dx$ à $\bar{\Omega}$ tout entier en une fonction $\phi_i(x)$ de classe $C^1(\Omega)$. Le terme $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)u_i'(x)$ sera regroupé avec les termes de Pu(x), ce qui détermine un nouvel opérateur différentiel $\bar{P}$. En définitive:

$$wu(x) = \bar{P}u(x) - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{y-x^{n+2-\alpha}}[u(y) - u(x)]dy$$

$$= \bar{P}u(x) + \bar{S}u(x) \quad .$$

II. Calcul de l'opérateur adjoint de w .

Pour le calcul de l'adjoint de $\bar{S}$, on remarquera que

$$\iint_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}}[u(y)- u(x)]v(x)dxdy \qquad (x \in \Omega,\ v \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ nulle sur le bord } \partial\Omega\ )$$

est égal à

$$\iint_{|y-x|\geqslant \varepsilon d(x)} \frac{K(y,x)}{|y-x|^{n+2-\alpha}}[v(y) - v(x)]u(x)\,dxdy -$$

$$\iint_{|y-x|\geqslant \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y) - K(y,x)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} u(x)\ v(x)\ dx\ dy$$

avec une "bonne annulation" de $K(x,y) - K(y,x)$ sur le bord . Il en résulte que

$$\overset{*}{\bar{S}}u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|\geqslant \varepsilon d(x)} \int \frac{K(y,x)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x)]dy - \phi(x)u(x) \qquad (\phi \in C^1(\bar{\Omega})).$$

III. Existence de solutions faibles du problème de Dirichlet $\left\{\begin{matrix} (w-\beta)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{matrix}\right\}$.

On considère l'opérateur $w_\varepsilon = w + \varepsilon\Delta$ où Δ est l'opérateur Laplacien. $P + \varepsilon\Delta$ est alors un opérateur différentiel elliptique non dégénéré. Pour ces opérateurs, lorsque f appartient à $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ et que les coefficients de P sont suffisamment réguliers, Bony-Courrège-Priouret ont démontré l'existence et l'unicité de la solution $u_\varepsilon \in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ du problème de Dirichlet $\left\{\begin{matrix} (w_\varepsilon - \beta)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{matrix}\right\}$.

La solution u_ε vérifie en norme uniforme l'inégalité $\|u_\varepsilon\| \leqslant \frac{\|f\|}{\beta}$. Il en résulte que l'ensemble des solutions $\{u_\varepsilon\}$ possède une valeur d'adhérence u lorsque $\varepsilon \to 0$; u est alors une solution faible.

IV. Régularité sur le bord des solutions u_ε .

Par un argument classique utilisant les fonctions barrières, on peut démontrer que pour tout $x \in \partial\Omega$, $|\text{grad } u_\varepsilon(x)| \leqslant \text{Cte } \|f\|$.

Pour la démonstration de cette inégalité intervient l'hypothèse bord non caractéristique, qui permet de choisir des fonctions barrière indépendantes de ε et donc d'avoir des majorations indépendantes de ε.

V. Régularité dans Ω des solutions u_ε .

On suppose que f appartient à $C^1(\bar{\Omega})$. On appellera "bon terme" tout terme majoré par $\|p\|$ ou par $\|f\|^2_{C^1}$, où $p(x) = \sum_{i=1}^{n} (u_\varepsilon)'_i(x)^2$. On se propose de démontrer que pour β suffisamment grand, $|\text{grad } u_\varepsilon(x)| \leqslant \text{Cte}\|f\|_{C^1}$ en tout point

$x \in \Omega$. La méthode utilisée consiste à dériver partiellement par rapport à x^k les deux membres de l'équation

$$w_\varepsilon u_\varepsilon(x) - f(x) = \beta u_\varepsilon(x)$$

puis les multiplier par $(u_\varepsilon)'_k(x)$ et enfin sommer par rapport à l'indice k. Le membre de gauche est la somme de termes négatifs et de bons termes et le membre de droite est égal à $\beta p(x)$ en tout point $x \in \Omega$ où $p(x) = \|p\|$. Il s'ensuit une inégalité $\beta p(x) \leqslant \beta_0 \, p(x) + \beta_1 \|f\|^2_{C^1}$ de laquelle on déduit l'inégalité annoncée.

Les résultats des paragraphes IV et V permettent de conclure que les solutions faibles u du problème de Dirichlet $\left\{\begin{array}{ll}(w - \beta)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\end{array}\right\}$ sont lipschitziennes lorsque f appartient à $C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque : On peut démontrer que lorsque $f \in L^\infty(\Omega)$, le problème de Dirichlet admet une solution faible $u \in L^\infty(\Omega)$, que lorsque f est une fonction lipschitzienne il admet une solution faible u lipschitzienne telle que $\|u\|_{lip} \leqslant Cte\|f\|_{lip}$.

VI. Unicité de la solution faible dans $L^\infty(\Omega)$.

La démonstration de l'unicité annoncée repose essentiellement sur la démonstration de la majoration

$$\int_\Omega \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx \leqslant Cte ,$$

que l'on obtient en multipliant les deux membres de l'équation $(w_\varepsilon - \beta)u_\varepsilon(x) = f(x)$ par $\varepsilon\Delta u_\varepsilon$ puis en les intégrant sur Ω ce qui donne

$$\int_\Omega \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx + \int_\Omega \varepsilon \Delta u_\varepsilon \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} (u_\varepsilon)''_{ij} dx - \int_\Omega \varepsilon (u_\varepsilon)'_k \frac{\partial}{\partial x^k} [\bar{S} u_\varepsilon(x)] \, dx$$

$$= \int_\Omega \varepsilon \Delta u_\varepsilon \left(f - \sum_{i=1}^n a_i (u_\varepsilon)'_i - a u_\varepsilon - \beta u_\varepsilon\right) dx$$

(où a_{ij}, a_i, a sont les coefficients de l'opérateur différentiel $\bar{P}$).

Le membre de gauche est la somme de $\int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx$, de termes positifs, de termes bornés, de termes majorés en valeur absolue par $\eta \int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx$ où $\eta > 0$ peut être choisi aussi petit qu'on le veuille.

Le membre de droite est la somme de termes bornés, de termes majorés en valeur absolue par $\eta_1 \int \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx$ où $\eta_1 > 0$ peut être lui aussi choisi petit qu'on le veuille. Il s'ensuit l'inégalité annoncée et enfin que le problème de Dirichlet $\left\{\begin{array}{ll}(w - \beta)u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\end{array}\right\}$ a une solution faible u nulle presque partout dans Ω (intervient dans cette démonstration le fait que l'opérateur w^* est du même type que l'opérateur w) lorsque β est assez grand.

VII. Construction de semi-groupes de Feller sur Ω .

On considère $\mathfrak{D}$ l'ensemble des fonctions u lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$, nulles sur $\partial\Omega$ telles qu'il existe une fonction lipschtizienne f nulle au bord et u soit solution faible du problème de Dirichlet $\left\{\begin{array}{ll}wu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\end{array}\right\}$

On définit sur $\mathfrak{D}$ l'opérateur $\mathcal{W}$ par : $\mathfrak{D} \ni u \to f$. On peut démontrer que $\mathfrak{D}$ est dense dans $C_0(\Omega)$ qu'il existe $\beta > 0$ telle que l'image $(\mathcal{W} - \beta)(\mathfrak{D})$ soit dense dans $C_0(\Omega)$ et que $\mathcal{W}$ satisfait le principe du maximum positif. Il s'ensuit que l'opérateur $(\mathfrak{D},\mathcal{W})$ est préfermé et que sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur Ω . On peut préciser l'ensemble de définition de la fermeture de l'opérateur $\mathcal{W}$; $\bar{\mathfrak{D}}$ est l'ensemble des fonctions $u \in C_0(\Omega)$ telles qu'il existe $f \in C_0(\Omega)$ et u soit solution faible du problème de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{ll}wu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\end{array}\right\}$$

Remarque : Les techniques de calcul sont inspirées des travaux de O. A. Oleinǐk.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bony, Courrège, Priouret : Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18.2 (1968), 369-521.

[2] O. A. Oleinǐk : A problem of Fichera. Soviet Math. Dokl. 5 (1964). On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations. Soviet Math. Dokl. 3 (1965).

[3] Schol-Cancelier : Sur la régularité des solutions faibles du problème de Dirichlet associé à un opérateur intégro-différentiel. C. R. Acad. Sc. Paris, t.284 (4 avril 1977) 795-798.
Unicité dans $L^{\infty}(\Omega)$ de la solution faible du problème de Dirichlet et construction de semi-groupes de Feller. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (2 mai 1979) 757-760.

*
* *
*