Journées Équations aux dérivées partielles

Claude Bardos
Jean-Claude Guillot
James Ralston

Relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application au scattering

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A14_0>

Conférence n° 14

RELATION DE POISSON POUR L'EQUATION DES ONDES DANS UN OUVERT NON BORNE. APPLICATION AU SCATTERING

par C. BARDOS, J. C. GUILLOT et J. RALSTON

Soient deux parties compactes strictement convexes et disjointes K_1 et K_2 de $\mathbb{R}^n$ (n impair). Soit Ω le complémentaire de $K_1 \cup K_2$. On suppose que $\partial\Omega$ est une variété C^∞ contenue dans la boule de rayon ρ.

On considère dans Ω l'équation des ondes associée à la condition de Dirichlet sur le bord

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_D u = 0$$

où Δ_D est le laplacien avec la condition de Dirichlet sur le bord.

En introduisant $(u, \frac{\partial u}{\partial t})$ on décrit les solutions d'énergie finie de l'équation des ondes à l'aise du groupe unitaire $U(t)$ dans l'espace de Hilbert $H_D(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On note $U_0(t)$ le groupe unitaire associé à l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$. Il convient de considérer $U(t)$ comme un groupe unitaire dans $H_D(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ en le prolongeant par zéro sur le sous-espace orthogonal à $H_D(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans $H_D(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit $S(z)$ la matrice S associée à l'équation (*) dans la théorie de P. Lax et R. Phillips.

L'existence d'un rayon périodique dans Ω pour (*) a pour conséquence le théorème suivant :

Théorème : Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de pôles de $S(z)$ vérifiant

$$\operatorname{Im} z \leqslant \varepsilon \operatorname{Log}|z|.$$

Il existe ainsi une infinité de pôles de $S(z)$ proches de l'axe réel.

Pour tout $\varphi(.) \in C_0^{n+1}(\mathbb{R})$, l'opérateur $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)(U(t) - U_0(t))dt$ est nucléaire. L'application $\varphi(.) \longmapsto \operatorname{Tr} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)(U(t) - U_0(t))dt$ est alors une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre n+1. On note $\operatorname{Tr}(U(t) - U_0(t))$ cette distribution.

La démonstration du théorème repose alors sur les trois résultats suivants :

i) (Relation de Poisson) sur $(0,\infty)$ on a

$$\text{supp sing } \mathrm{Tr}(U(t) - U_o(t)) \subset \{2md;\ m \text{ entier},\ m \geqslant 1\}$$

où $d = d(K_1, K_2)$

ii) sur $(2\rho,\infty)$ on a

$$\mathrm{Tr}(U(t) - U_o(t)) = \sum_{j \geqslant 1} e^{i\lambda_j t}$$

où $\{\lambda_j\}_{j \geqslant 1}$ est l'ensemble des pôles de $S(z)$.

iii) (Formule de Poisson) sur $(0,\infty)$ on a

$$\mathrm{Tr}(U(t) - U_o(t)) = 2d \sum_{m=1}^{\infty} \det |P^m - I|^{-1/2} \delta(t-2md) + h(t)$$

où $h(t) \in L^2_{loc}((o, \infty))$ et où P est l'application de Poincaré associée au rayon périodique.

****