TA TSIEN LI

Comportements limites des solutions de certains problèmes mixtes pour des équations paraboliques et leurs applications

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A13_0>

COMPORTEMENTS LIMITES DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLEMES MIXTES POUR DES EQUATIONS PARABOLIQUES ET LEURS APPLICATIONS.

par Li Ta-tsien

C'est un travail en collaboration avec A. Damlamian. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, contenant l'origine et de frontière régulière Γ. Pour n = 2 et 3, le problème

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = v(t)\ \delta(x) & \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0,T[, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,T[, \\ y(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega . \end{cases}$$

admet une unique solution faible $y = y(t;v) \in L^2(Q)$ pour tout v de $L^2(0,T)$, où $\delta(x)$ désigne la masse de Dirac à l'origine et A est un opérateur fortement elliptique du deuxième ordre de forme divergentielle et à coefficients lipschitziens en x.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on désigne par B_ε un domaine étoilé par rapport à l'origine, dont les petit et grand diamètres restent dans un rapport borné et sont d'ordre ε. On note $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ et on considère le problème approché suivant

$$(\mathrm{I})_\varepsilon \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon = 0 & \text{dans } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times]0,T[, \\ y_\varepsilon = C_\varepsilon(t) & \text{(fonction inconnue de t seul) sur } \Gamma_\varepsilon \text{ et} \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\, d\sigma = v(t) & \text{pour presque tout t de }]0,T[, \\ y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon , \end{cases}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \nu_A}$ désigne la dérivée conormale associée à A .

Théorème 1 (cf. [1]) : Pour n = 2 et 3, si v_ε converge faiblement (resp. fortement) vers v dans $L^2(O,T)$ lorsque ε tend vers zéro, alors $y_\varepsilon = y_\varepsilon(t;v_\varepsilon)$, solution de $(I)_\varepsilon$ associé à $v_\varepsilon(t)$ (prolongée par zéro ou par $C_\varepsilon(t)$ dans $B_\varepsilon \times]O,T[$) tend faiblement (resp. fortement) dans $L^2(Q)$ vers la solution y de (I).

En introduisant l'espace fonctionnel (cf. [2] , [3])

$$\mathcal{U} = \{ v | v(t) \in L^2(O,T), \quad y(T;v) \in L^2(\Omega) \}$$

muni de la norme du graphe, où y(T;v) est définie par (I), on définit la fonction coût

$$J(v) = N\int_O^T v^2(t)dt + \int_\Omega |y(T;v) - z_d|^2 dx \qquad \forall\, v \in \mathcal{U},$$

où z_d est donné dans $L^2(\Omega)$ et N est un réel positif donné. Alors, il existe un élément $u_o = u_o(t) \in \mathcal{U}$ et un seul tel que

$$J(u_o) = \inf_{v \in \mathcal{U}^-} J(v) \quad .$$

De la même façon, à partir du problème $(I)_\varepsilon$ on peut définir la fonction coût

$$J_\varepsilon(v) = N\int_O^T v^2(t)dt + \int_{\Omega_\varepsilon} |y_\varepsilon(T;v) - z_d|^2 dx \qquad \forall v \in L^2(O,T)$$

et il existe un élément $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t) \in L^2(O,T)$ et un seul tel que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in L^2(O,T)} J_\varepsilon(v) \quad .$$

Théorème 2 (cf. [4]) : Pour n = 2 et 3, on a

(i) $\lim_{\varepsilon \to O} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J(u_o)$;

(ii) $u_\varepsilon(t) \to u_o(t)$ faiblement dans $L^2(O,T)$, lorsque $\varepsilon \to O$.

Références

[1] Alain Damlamian et Li Ta-tsien, à paraître dans C. R. A. S., 290, série A, 1980.

[2] J. L. Lions, C. R. A. S., 289, série A, 1979, p.315 et cours au Collège de France, 1979.

[3] Li Ta-tsien, C. R. A. S., 289, série A, 1979, p.689.

[4] Li Ta-tsien, à paraître.

***