Journées Équations aux dérivées partielles

D. Schiltz
Jean Vaillant
Claude Wagschal

Problème de Cauchy ramifié : racine caractéristique triple en involution

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A12_0>

PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE : RACINE CARACTERISTIQUE TRIPLE EN INVOLUTION

par D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL

On considère au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, de coordonnées $x = (x^0, x^1, \dots, x^n)$, un opérateur différentiel linéaire holomorphe d'ordre m :

$$a(x,D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha ,$$

où $D^\alpha = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, de symbole principal

$$g(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

où $\xi_\alpha = \xi_0^{\alpha_0}\, \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

On suppose l'hyperplan $S : x^0 = 0$ non caractéristique, et on considère le problème de Cauchy ramifié :

$$(1) \qquad \begin{cases} a(x,D)u(x) = 0 \\ D_0^h\, u(x)\big|_{x^0=0} = w_h(x'), \quad 0 \leqslant h < m \end{cases}$$

où $x' = (x^1, \dots, x^n)$ et les fonctions w_h sont ramifiées autour de la sous-variété $T : x^0 = x^1 = 0$ dans S, c'est-à-dire holomorphe sur le revêtement universel de $\Omega \setminus T$, Ω étant un voisinage ouvert connexe de l'origine dans S.

On note $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$; on pose $\eta' = (1, 0, \dots, 0)$, et on suppose

$$g(x,\xi) = \prod_{i=1}^{m} (\xi_0 - \lambda^i(x,\xi'))$$

où les fonctions λ^i sont holomorphes au voisinage du point $x = 0$, $\xi' = \eta'$. On suppose de plus :

i) $\lambda^1(0, \eta') = \lambda^2(0, \eta') = \lambda^3(0, \eta')$

ii) Les nombres $\lambda^3(0,\eta'), \dots, \lambda^m(0,\eta')$ sont deux à deux distincts

iii) $\{\xi_o - \lambda^i(x,\xi'), \xi_o - \lambda^j(x,\xi')\} = D_o\lambda^j - D_o\lambda^i +$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (D_k\lambda^i D_{\xi_k}\lambda^j - D_k\lambda^j D_{\xi_k}\lambda^i) \equiv 0 \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3.$$

On note $k^i(x)$ la fonction holomorphe au voisinage de O dans $\mathbb{C}^{n+1}$, solution du problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} D_o k^i(x) = \lambda^i(x, D'k^i(x)) \\ k^i(O,x') = x^1 \end{cases}$$

où $D' = (D_1,\dots,D_n)$, et $\varphi^2(x,\tau_2)$, $\varphi^1(x,\tau)$, où $\tau = (\tau_1,\tau_2) \in \mathbb{C}^2$, les fonctions holomorphes solutions des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} D_o\,\varphi^2(x,\tau_2) = \lambda^2(x,D'\varphi^2(x,\tau_2)) \\ \varphi^2(x,x^o) = k^3(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_o\,\varphi^1(x,\tau) = \lambda^1(x,D'\,\varphi^1(x,\tau)) \\ \varphi^1(x,x^o - \tau_2,\ \tau_2) = \varphi^2(x,\tau_2). \end{cases}$$

On a les relations :

$$\varphi^2(x,O) = k^2(x)\,;\ \varphi^1(x,x^o,O) = k^2(x)\,;\ \varphi^1(x,O,x^o) = k^3(x)\,;\ \varphi^1(x,O,O) = k^1(x)\ .$$

Donnons-nous un point $y \in \Omega - T$: d'après le théorème de Cauchy-Kowalewska, le problème de Cauchy (1) admet une unique solution holomorphe au voisinage de y. Par des méthodes analogues à celles de Ludwig-Granoff [4] et Hamada-Leray-Wagschal [1], on démontre le

<u>Théorème 1</u> : Il existe un nombre $\omega > 0$, un voisinage ouvert simplement connexe $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{T}$) de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{C}^2$), et pour $|y^1| < \omega$, $(y,O) \in \mathcal{O} \times \mathcal{T}$ des fonctions $u^1(t,x,\tau)$, $u^2(t,x,\tau_2)$, $u^i(t,x)$, $3 \leqslant i \leqslant m$, holomorphes au voisinage du point $(t,x,\tau) = (y^1,y,O)$ et se prolongeant analytiquement à $\mathcal{R}_\omega \times \mathcal{O} \times \mathcal{T}$, $\mathcal{R}_\omega$ désignant le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\omega = \{t \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < |t| < \omega\}$, tels que la fonction

$$u(x) = \int_0^{x^o} d\tau_2 \int_0^{x^o - \tau_2} D_t^2 u^1(\varphi^1(x,\tau),x,\tau)d\tau_1 + \int_0^{x^o} D_t u^2(\varphi^2(x,\tau_2),x,\tau_2),x,\tau_2)d\tau_2 +$$

$$+ \sum_{i=3}^{m}{}' u^i(k^i(x),x)$$

soit la solution du problème de Cauchy (1) .

Remarque : Le théorème 1 généralise des résultats précédents de Nakamura [5] , [6], Hamada-Nakamura [2] concernant des singularités polaires.

Il est clair que la fonction $u^i(k^i(x),x)$ se ramifie autour de l'hypersurface K_i d'équation $k^i(x) = 0$. Les autres singularités de la fonction $u(x)$ proviennent des termes intégraux : leur étude suit la méthode de Leray [3] .

Hypothèse 1 : $\varphi^1(x,\tau) = \psi(x,\tau)\ \pi(x,\tau)$ où ψ est holomorphe, ne s'annulant pas dans $\mathcal{O}\times\mathcal{T}$, et π est holomorphe en x, polynomiale en (τ_1, τ_2).

Hypothèse 2 : $\pi(0,0,\sigma) \not\equiv 0$; $\pi(0,\sigma,0) \not\equiv 0$; $\pi(0,\sigma,-\sigma) \not\equiv 0$. On pose

$$P(x,\tau'_1,\tau'_2,\tau'_3) = (\tau'_3)^p\ \pi\left(x, \frac{\tau'_1}{\tau'_3}, \frac{\tau'_2}{\tau'_3}\right) \text{ où } p = d^o\pi .$$

On note d la droite d'équation $\xi_1\tau_1 + \xi_2\tau_2 + \xi_3 = 0$ $(\xi_3 \in \mathbb{C}^3 - \{0\})$: un point de cette droite a pour coordonnées homogènes $(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3, \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$: on le notera $\xi\wedge\eta$.

On note A l'anneau des polynômes homogènes en $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0. On considère la restriction de P à $\mathcal{O}\times d$:

$$\tilde{P}(x,\xi,\eta) = P(x,\xi\wedge\eta) .$$

Soit $\tilde{P}'$ le produit des facteurs irréductibles de $\tilde{P}(x,\xi,\eta)$ dans $A[\eta]$. $\tilde{P}'$ ne dépend en fait que de $(x,\xi\wedge\eta)$ (cf. Leray [3] p.328) ; on pose :

$$P'(x\ \ \xi\wedge\eta) = P'(x,\xi\wedge\eta).$$

Le discriminant en $\rho \in \mathbb{C}$ de $P'(x,\xi\wedge\eta + \rho\ \xi\wedge\zeta)$ est de la forme : $Q(x,\xi)\ \ P'(x, \xi\wedge\zeta)^K$.

Hypothèse 3 : $Q(0,1,0,-\sigma) \not\equiv 0$.
$Q(x,\xi)$ se décompose de façon unique dans A : soit $Q'(x,\xi)$ le produit de ses facteurs irréductibles. Le discriminant en $\rho \in \mathbb{C}$ de $Q'(x,\xi + \rho\zeta)$ n'est pas fonction de ρ et est polynomial en (ξ,ζ) : soit $R(x)$ le pgcd de ses coefficients.

Théorème 2 : Il existe un voisinage $\mathcal{O}'$ de O dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que u(x) se prolonge analytiquement au revêtement universel du complémentaire dans $\mathcal{O}'$ de l'ensemble

$$\Sigma : \prod_{i=1}^{m} k^{i}(x)\ Q(x,1,0,0)\quad Q(x,0,1,0)\ Q(x,1,1,-x^{0})\ R(x) = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples; problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle. J. Math. pures et appl., 55 (1976), p.297 à 352.

[2] Y. Hamada, G. Nakamura : On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristics. Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, Classe di Scienze, série IV, 4 (1977), p.725 à 755.

[3] J. Leray : Un complément au théorème de M. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique. Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), p.313 à 374.

[4] D. Ludwig, B. Granoff : Propagation of singularities along characteristics with non uniform multiplicity. J. Math. Anal. Appl., 21 (1968), p.556 à 574.

[5] G. Nakamura : The singularities of solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non uniform multiple. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1977), p.255 à 275.

[6] G. Nakamura : The singular Cauchy problem for systems whose characteristic roots are non uniform multiple. Proc. Jap. Acad., 53 (1977), p.135 à 138.

[7] D. Schiltz, J. Vaillant : Systèmes fortement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (1978), série A, p.133 à 136.

[8] D. Schiltz, J. Vaillant et C. Wagschal : C. R. Acad. Sc. Paris, à paraître.

***