

T. MONTEIRO-FERNANDES

## Problème de Cauchy microdifférentiel

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A11_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE CAUCHY MICRODIFFERENTIEL

par T. MONTEIRO FERNANDES

Soit  $X$  une variété analytique complexe. On note  $T^*_X$  la section nulle du fibré cotangent  $T^*X$  et on pose  $\dot{T}^*X = T^*X - T^*_X$ . Soit  $\pi$  la projection de  $T^*X$  sur  $X$ . Dans  $\dot{T}^*X$  on considère une sous-variété  $V$  involutive homogène lisse. On note  $\mathcal{E}_X$  (resp.  $\mathcal{E}_X(m)$ ) le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini (respectivement d'ordre inférieur ou égal à  $m$ ) de Sato, Kawai et Kashiwara et  $\mathcal{D}_V^1$  le sous-faisceau d'anneaux de  $\mathcal{E}_X|_V$ , engendré par les opérateurs de  $\mathcal{E}_X(1)$  dont le symbole d'ordre un s'annule sur  $V$ . On pose, pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{D}_V^1(m) = \mathcal{D}_V^1 \cap \mathcal{E}_X(m) \quad \text{et} \quad \text{grad } \mathcal{D}_V^1 = \bigoplus_{m \geq 0} \frac{\mathcal{D}_V^1(m)}{\mathcal{D}_V^1(m-1)} .$$

On note  $\mathcal{O}_{T^*X}^*(j)$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $T^*X$ , homogènes de degré  $j$  par rapport à la variable de la fibre ; soit  $I_V$  l'idéal de définition de  $V$

et  $I_V(j) = I_V \cap \mathcal{O}_{T^*X}^*(j)$ . On a  $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{T^*X}^* / I_V$  et  $\mathcal{O}_V(j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{O}_{T^*X}^*(j)}{I_V(j)}$ .

Soit  $\pi_0$  la projection de  $T_V(T^*X)$  sur  $V$  et notons  $S_V$  le faisceau (sur  $T_V(T^*X)$ )  $\pi_0^{-1}(\text{grad } \mathcal{D}_V^1 \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}^*(0)} \mathcal{O}_V(0))$ .

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_V^1$ -module cohérent; on appelle bonne filtration de  $\mathcal{M}$  toute famille  $\{\mathcal{M}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{E}_X(0)$ -sous-modules de  $\mathcal{M}$ , cohérents, vérifiant :

- (i)  $\mathcal{M} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_j$ ,
- (ii) Pour tout  $m \geq 0$ ,  $\mathcal{D}_V^1(m) \mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{j+m}$ ,
- (iii)  $\mathcal{M}_j = 0$  pour  $j \ll 0$ ,
- (iv) il existe  $k_0 \geq 0$  tel que pour  $k \geq k_0$ ,  $m \geq 0$ ,

$$\mathcal{D}_V^1(m) \mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+m} .$$

On pose  $\text{grad } \mathcal{M} = \bigoplus_j (\mathcal{M}_j / \mathcal{M}_{j-1})$  ; le sous-ensemble de  $T_V^*(T^*X)$

$$C_V^1(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp} \left[ \pi_0^{-1} \left( \text{grad } \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}(0)} \mathcal{O}_V(0) \otimes_{S_V} \mathcal{O}_{T_V^*(T^*X)} \right) \right] \text{ est analytique,}$$

conique par rapport aux deux actions de  $\mathbb{C}^*$  et indépendant de la bonne filtration choisie. C'est la variété 1-microcaractéristique de  $\mathcal{M}$  le long de  $V$ .

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_X$ -module cohérent et soit  $\mathcal{M}_0$  un  $\mathcal{S}_V^1$ -sous-module cohérent de  $\mathcal{M}$  qui l'engendre. Le sous ensemble  $C_V^1(\mathcal{M}_0)$  est indépendant du choix de  $\mathcal{M}_0$  ce qui permet de définir  $C_V^1(\mathcal{M}) = C_V^1(\mathcal{M}_0)$ . Ses éléments sont appelés les directions 1-microcaractéristiques de  $\mathcal{M}$  le long de  $V$ .

**Théorème 1** : Soit  $0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents; alors on a  $C_V^1(\mathcal{M}) = C_V^1(\mathcal{L}) \cup C_V^1(\mathcal{N})$ .

Si  $P$  est un opérateur dans  $\mathcal{D}_V^2(m)$ ,  $P \notin \mathcal{D}_V^1(m-1)$  et  $m \geq 0$ , on lui associe la partie homogène de degré  $m$  du développement de Taylor du symbole principal  $\sigma_m(P)$  le long de  $V$ . On définit ainsi une section de  $\mathcal{O}_{T_V^*(T^*X)}$  que l'on note  $\sigma_V^1(P)$ . Si  $P \in \mathcal{E}_X(-1)$  on pose  $\sigma_V^1(P) = 0$ .

**Théorème 2** : Supposons  $\mathcal{M}$  défini par une seule équation  $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X^P$ , où  $P \in \mathcal{D}_V^1(m)$ ,  $P \notin \mathcal{D}_V^1(m-1)$  et  $P \notin \mathcal{E}_X(-1) \mathcal{D}_V^1$ . On a alors l'égalité :

$$C_V^1(\mathcal{M}) = \{(x^*, \theta) \in T_V^*(T^*X), \sigma_V^1(P)(x^*, \theta) = 0\}$$

Les directions non 1-microcaractéristiques sont alors non microcaractéristiques au sens de Kashiwara et Schapira [1]. Si  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  est un couple de  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents on définit (de manière analogue à [1]) la variété 1-microcaractéristique  $C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , comme suit : on note  $\Delta$  le fibré conormal à  $X$  dans  $X \times X$  (où l'on identifie  $X$  à la diagonale de  $X \times X$ ) et on pose  $C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = C_\Delta^1(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*)$ ,  $\mathcal{N}^*$  désignant le module adjoint de  $\mathcal{N}$  (cf. [S.K.K.]).

Soit maintenant  $Y$  une sous-variété de  $X$ . On dit que  $Y$  est non 1-microcaractéristique pour le  $\mathcal{E}_X$ -module  $\mathcal{M}$  le long de  $V$ , si, pour toute fonction holomorphe  $\varphi$  nulle sur  $Y$ , avec  $d\varphi \neq 0$ , le champ hamiltonien  $H_\varphi$  est non 1-microcaractéristique pour  $\mathcal{M}$  le long de  $V$ .

Cette définition s'étend de manière évidente à un couple  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Soit  $d$  la codimension de  $Y$  dans  $X$  et  $\rho$  (resp.  $\bar{\omega}$ ) la projection  $T^*X \times Y \rightarrow T^*Y$  (resp.  $T^*X \times Y \rightarrow T^*X$ ).

Théorème 3 (Cauchy-Kowalewska) : Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents définis dans un ouvert  $U$  de  $T^*X$ ,  $Y$  une sous-variété de  $X$  non 1-microcaractéristique pour  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  sur  $\bar{\omega}^{-1}(U)$ . On a alors un isomorphisme naturel :

$$\omega^{-1}(\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \simeq \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}) \otimes_{\rho^{-1} \mathcal{E}_Y} (\mathcal{E}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{N}) \quad [d]$$

Théorème 4 (Propagation) : Soit  $\Omega$  un ouvert de  $T^*X$  dont le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $p \in \partial\Omega$ . Supposons  $\Omega = \{x^* \in T^*X, \varphi(x^*) < 0\}$  et  $H_\varphi(p) \notin C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . On a alors

$$\mathbb{R} \Gamma_{T^*X - \Omega}(\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))_p = 0$$

Le théorème 3 (resp. Théorème 4) est l'analogie du théorème 3.1 de [1] (resp. du Théorème 8.2.1 de [2]) avec  $\mathcal{N}^\infty$  remplaçant  $\mathcal{N}$ .

Les mêmes résultats sont obtenus par Yves Laurent [3] en microlocalisant les opérateurs de  $\mathcal{E}_X|_V$ .

#### Références

- [1] M. Kashiwara, P. Schapira : Inventiones Math. 46 (1978) 17-38.
- [2] M. Kashiwara, P. Schapira : Acta Math. 142, 1979, 1-55 .
- [3] Y. Laurent : Notes 1 et 2 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (10 Décembre 1978).
- [4] B. Malgrange : Cours sur les opérateurs différentiels. Grenoble, 1976.
- [5] T. Monteiro-Fernandes : Thèse de 3ème cycle, Paris XIII, 1978.
- [6] [S. K. K.] : M.Sato, T.Kawai, M.Kashiwara : Lecture Notes in Math. n°287, Springer 1973, p. 265-529.

\*  
\*  
\*