MASAKI KASHIWARA

Construction du noyau de Bergman local

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A10_0>

CONSTRUCTION DU NOYAU DE BERGMAN LOCAL

par M. KASHIWARA

Soient Ω un ouvert pseudo-convexe relativement compact de $\mathbb{C}^n$ et $\bar{\Omega}$ son conjugué complexe $\{z \in \mathbb{C}^n ; \bar{z} \in \Omega\}$. On note par $L_h^2(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes carré intégrales sur Ω. Le noyau de Bergman est une fonction holomorphe $B(z,\zeta)$ définie sur $\Omega \times \bar{\Omega}$ qui satisfait les conditions suivantes :

(1) Pour tout $z \in \Omega$, $B(z,.) \in L_h^2(\bar{\Omega})$

(2) Pour tout $u(z) \in L_h^2(\Omega)$, on a

$$u(z) = \int_{\Omega} B(z,\bar{w})u(w)dw\, d\bar{w}$$

où $dw\, d\bar{w}$ est une mesure euclidéenne de $\mathbb{C}^n$.

Pour regarder le comportement de $B(z,\zeta)$ au bord de Ω, nous allons introduire la notion du noyau de Bergman local. Soit z_o un point au bord de Ω et supposons les conditions suivantes.

(a) $\partial\Omega$ est réel analytique et strictement pseudo-convex au voisinage de z_o.

(b) L'adhérence $[\Omega]$ de Ω admet un système de voisinages ouverts pseudo-convexes.

Soit $f(z,\zeta)$ une fonction holomorphe définie sur $U_o \times \bar{U}_o$ pour un voisinage U_o assez petit de z_o telle que $f(z,\bar{z})$ soit à valeur réelle, $df(z_o,\bar{z}_o) \neq 0$ et que $\Omega \cap U_o = \{z \in U_o ; f(z,\bar{z}) < 0\}$.

Théorème 1 : Soit $K(z,\zeta)$ une fonction holomorphe définie sur $\{(z,\zeta) \in U \times \bar{U} ; \operatorname{Re} f(z,\zeta) < 0\}$ pour un voisinage U de z_o qui satisfait la condition suivante :

(NL 1) Il existe un voisinage W de z_o contenu dans $U \cap U_o$ et deux fonctions holomorphes $a(z,\zeta)$ et $b(z,\zeta)$ définies sur $W \times \bar{W}$ tels que $K(z,\zeta) = a(z,\zeta)f(z,\zeta)^{-1-n} + b(z,\zeta) \log f(z,\zeta)$ sur $\{(z,\zeta) \in W \times \bar{W} ; \operatorname{Re} f(z,\zeta) < 0\}$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(NL 2) Il existe deux voisinages V et V' de z_o contenus dans W tels que, pour toute $u \in L_h^2(\Omega \cap V)$, la fonction $u(z) - \int_{\Omega \cap V} K(z,\bar{w})u(w)dw\, d\bar{w}$ se prolonge à une fonction holomorphe définie sur V'.

(NL 3) Pour tout voisinage V de z_o contenu dans W, il existe un voisinage V' de z_o tel que pour toute $u \in L^2_h(\Omega \cap V)$,

$$u(z) - \int_{\Omega \cap V} K(z,\bar{w})u(w)dw\, d\bar{w}$$

soit holomorphe sur V'.

(NL 4) $B(z,\zeta) - K(z,\zeta)$ est holomorphe au voisinage de $(z_o,\bar{z}_o)$.

<u>Définition</u> : Si $K(z,\zeta)$ satisfait les conditions (NL 1) -(NL 4), on dit que K est un <u>noyau de Bergman local</u>.

Par le théorème 1, le comportement du noyau de Bergman au point z_o est déterminé localement par Ω.

Nous allons construire le noyau de Bergman local . Il existe un n-vecteur $A(z,w,\zeta)$ des fonctions holomorphes $(A_j(z,w,\zeta))_{j=1,\dots,n}$ tel que

$$f(z,\zeta) - f(w,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} (z_j - w_j)\, A_j(z,w,\zeta)$$

nous définissons $J(z,w,\zeta)$ par le déterminant du matrice carré de longueur (1+n)

$$\begin{bmatrix} 0 & d_\zeta f(w,\zeta) \\ A(z,w,\zeta) & d_\zeta A(z,w,\zeta) \end{bmatrix} .$$

Soient $v_1,\dots,v_n$ des champs de vecteurs qui ne contiennent que $\partial/\partial\zeta_1,\dots, \partial/\partial\zeta_n$ et qui engendrent des v tellesque $v(f(w,\zeta)) \equiv 0$ modulo $f(w,\zeta)$. Par exemple, si $\partial f/\partial\zeta_1 \neq 0$, on peut prendre comme $v_1,\dots,v_n$ des champs de vecteurs

$f(w,\zeta)\ \partial/\partial\zeta_1$, $\partial f/\partial\zeta_j(w,\zeta)\ \partial/\partial\zeta_1 - \partial f/\partial\zeta_1(w,\zeta).\ \partial/\partial\zeta_j$ pour $j = 2,\dots,n$.

<u>Théorème 2</u> : Il existe une fonction $K(z,\zeta)$ en z et ζ telle que

$$K(z,\zeta) = J(z,w,\zeta) f(z,\zeta)^{-1-n} + \sum_{j=1}^{n} v_j^* G_j(z,w,\zeta)$$

où $G_j(z,w,\zeta)$ est une fonction multiforme qui s'écrit de la forme

$G_j(z,\omega,\zeta) = a_j(z,\omega,\zeta) f(z,\zeta)^{-n-2} + bj(z,\omega,\zeta)\log f(z,\zeta)$ pour des fonctions $a_j(z,w,\zeta)$ et $bj(z,w,\zeta)$ holomorphes au voisinage de $(z_o,z_o,\bar{z}_o)$. v_j^* est l'adjoint de v_j .

Théorème 3 : La fonction $K(z,\zeta)$ donnée dans le théorème précédent est un noyau de Bergman local (à un constante absolue près).

Pour démontrer le théorème 3 on utilise le changement des variables d'intégration et l'intégration par partie et on le ramène au théorème suivant.

Théorème 4 : Soient z_o et z_1 deux points de $\mathbb{C}^n$ et $\overline{z_o z_1}$ l'intervalle aux extrémités z_o et z_1. Soient U un voisinage de z_o et γ une chaîne de dimension $(2n-1)$ dans $\{(w,\zeta);\ \langle w - z_o,\zeta\rangle \neq 0,\ w \in U\}$ telle que le bord $\partial\gamma$ soit disjoint à $\{(w,\zeta);\ \langle z_1, z_o,\zeta\rangle / \langle w - z_o,\zeta\rangle \geqq 1\}$. Supposons en plus que la projection de γ sur le w-espace coupe une fois $\overline{z_o z_1}$. Alors, il existe un voisinage V de $\overline{z_o z_1}$ tel que, pour toute fonction holomorphe $u(z)$ sur U,

$$u(z) - c_n \int_\gamma \frac{u(w)}{\langle z-w,\zeta\rangle^n}\, dw\ \ \omega(\zeta)$$

soit holomorphe sur V. Ici, $\omega(\zeta) = \zeta_1 d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n - \zeta_2 d\zeta_1 \wedge d\zeta_3 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n + \cdots + (-1)^{n-1}\, \zeta_n\, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_{n-1}$ et c_n est une constante absolue.

***