JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

OMAR DEBBAJ
ALI SOUISSI

Problème à dérivée oblique associé à des opérateurs elliptiques singuliers

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A7_0>

Conférence n° 7

PROBLEME A DERIVEE OBLIQUE ASSOCIE A DES OPERATEURS ELLIPTIQUES SINGULIERS

par O. DEBBAJ et A. SOUISSI

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ Bu \equiv \Lambda u|_\Gamma + \gamma(u|_\Gamma) = \psi \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où

- L est un opérateur du type

$$L = \Lambda^*\Lambda + \varphi^2 P + \varphi\Lambda Q + R$$

avec Λ un champ de vecteurs réels, $\mathcal{C}^\infty$ et transversal à Γ, P un opérateur différentiel du second ordre à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ dans $\bar{\Omega}$, Q et R deux opérateurs différentiels du premier ordre à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ dans $\bar{\Omega}$ et φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ équivalente à la distance au bord.

- γ un champ de vecteurs réels, $\mathcal{C}^\infty$ sur Γ et ne s'annulant pas sur Γ. Lorsque $\gamma \equiv 0$, l'étude de la régularité du problème aux limites (L,Λ) est classique ; voir par exemple M. S. Baouendi [2], Višik-Grušin [6]. Dans le cas général, on va montrer, moyennant certaines hypothèses sur (L,B), essentiellement une hypothèse d'ellipticité générale pour l'opérateur L et une hypothèse d'injectivité pour un certain opérateur différentiel attaché à chaque point du bord Γ, que l'opérateur (L,B) est à indice et d'indice nul dans des espaces convenables. Les méthodes classiques d'estimations a priori ne semblent pas s'adapter pour ce genre de problème. Aussi, on utilisera la méthode de réduction au bord comme dans Taïra [5] pour le cas elliptique. On donnera ensuite, sur un cas particulier et avec une hypothèse supplémentaire, un résultat d'hypoellipticité jusqu'au bord pour un problème aux limites du type (L,B), généralisant ainsi un résultat de Višik-Grušin pour l'hypoellipticité à l'intérieur.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $\Omega = \{x/\varphi(x) > 0\}$, $\Gamma = \{x/\varphi(x) = 0\}$ et grad $\varphi \neq 0$.

On introduit l'hypothèse d'ellipticité générale suivante : on suppose qu'il existe un secteur fermé, $\Sigma = \{\rho e^{i\theta} / \rho \geq 0,\ \theta_o \leq \theta \leq \theta_1\}$ de $\mathbb{C}$ tel que l'on ait :

(H_o) $\forall x \in \Omega,\ \forall (\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \Sigma) - \{0\}$ on a $\sigma^2(L)(x,\xi) + \lambda \neq 0$,

$\sigma_2(L)(x,\xi)$ étant le symbole principal de l'opérateur L.

$\forall x \in \Gamma$, $\forall \xi \in T^*_x(\Gamma)$ et $\forall \lambda \in \Sigma$ on pose :

$$L_o(\lambda)(x,t,\xi,D_t) = D_t^2 + it\,Q_1(x,\xi)D_t + t^2 P_2(x,\xi) + R_1(x,\xi) + \lambda$$

où P_2, Q_1 et R_1 désignent les parties principales respectivement de P, Q et R.

(H_1) $\forall\ x \in \Gamma$ et $\forall (\xi,\tau,\lambda) \in (T^*_x(\Gamma) \times \mathbb{R} \times \Sigma) - \{0\}$ on a $P(\tau) = \tau^2 + iQ_1(x,\xi)\tau + P_2(x,\xi) + \lambda \neq 0$. De plus $P(\tau)$ admet deux racines $\tau_+(x,\xi,\lambda)$ et $\tau_-(x,\xi,\lambda)$ telles que pour tout $(x,\xi,\lambda) \in \Gamma \times (T^*_x(\Gamma) \times \Sigma) - \{0\}$, $\operatorname{Im}\tau_+(x,\xi,\lambda) > 0$ et $\operatorname{Im}\tau_-(x,\xi,\lambda) < 0$.

(H_2) $\forall x \in \Gamma$, $\forall (\xi,\lambda) \in (T^*_x(\Gamma) \times \Sigma) - \{0\}$ le problème

$$L_o(\lambda)(x,t,\xi,D_t)\,u(t) = 0$$
$$u(0) = 0$$

n'admet que la solution nulle dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Soit $s \in \mathbb{R}^+$, on définit l'espace $W^{s+1}(\Omega)$ par

$$W^{s+1}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \Lambda^2 u \in H^s(\Omega),\ \varphi^2 u \in H^{s+2}(\Omega)\} .$$

D'après M. Tougeron [6], il existe $\lambda_o > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \Sigma$, $|\lambda| \geq \lambda_o$ le problème :

$$\begin{cases} (L+\lambda)v = f & , \quad f \in L^2(\Omega) \\ v|_\Gamma = \varphi & , \quad \varphi \in H^{3/4}(\Gamma) \end{cases}$$

admet une solution et une seule $v \in W^1(\Omega)$.

On introduit les invariants suivants : $\forall x \in \Gamma$, $\forall \xi \in T^*_x(\Gamma) - \{0\}$ et $\forall \lambda \in \Sigma$ on pose :

$$\nu \equiv \nu(x,\xi) = i(\tau_+(x,\xi,0) - \tau_-(x,\xi,0))$$

$$\mu \equiv \mu(x,\xi,\lambda) = i\,\tau_+(x,\xi,0) - (R_1(x,\xi) + \lambda)$$

Alors l'hypothèse (H_2) est équivalente à l'hypothèse $(H_2)'$ suivante

$(H_2)'$ $\quad \forall x \in \Gamma,\ \forall \xi \in T_x^*(\Gamma) - \{0\}$ et $\forall \lambda \in \Sigma$

$\mu(x,\xi,\lambda) \neq -(2k-1)\,\nu(x,\xi)\ \forall k \in \mathbb{N}^*$

On pose $\forall x \in \Gamma,\ \forall \xi \in T_x^*(\Gamma) - \{0\}$ et $\forall \lambda \in \Sigma$

$$\beta(x,\xi,\lambda) = i\sqrt{2}\ \nu^{1/2}\ \frac{\Gamma(1/2\,\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2})}{\Gamma(1/2\,\frac{\mu}{\nu})} \quad \text{avec } \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}\nu < \frac{3\pi}{2} .$$

<u>Théorème</u> : Sous les hypothèses (H_o), (H_1) et (H_2) et la condition

(C_1) $\quad \forall x \in \Gamma,\ \forall \xi \in T_x^*(\Gamma) - \{0\}$ et $\forall \lambda \in \Sigma$, $\operatorname{Re}\beta(x,\xi,\lambda) \neq 0$

On a pour tout entier positif s, $\exists R > 0$ tel que $\forall f \in H^s(\Omega)$, $\forall \psi \in H^{s+\frac{1}{4}}(\Gamma)$

i) $\forall \lambda \in \Sigma$ tel que $|\lambda| > R$ le problème

$$(*) \qquad \begin{cases} (L+\lambda)u = f \\ Bu \equiv \Lambda u_{|\Gamma} + \gamma(u_{|\Gamma}) = \psi \end{cases}$$

admet une solution et une seule $u \in W^{s+1}(\Omega)$. De plus nous avons l'estimation a priori

$$\|u\|_{W^{s+1}(\Omega)} + |\lambda|^{s+1}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^s(\Omega)} + |\lambda|^s\|f\|_{L^2(\Omega)} + |\psi|_{H^{s+\frac{1}{4}}(\Gamma)} + |\lambda|^{s+\frac{1}{4}}|\psi|_{L^2(\Gamma)})$$

où C est une constante qui ne dépend que de s, R et Q.

ii) $\forall \lambda \in \Sigma$, l'opérateur non borné $(L+\lambda, B)$ de $W^{s+1}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega) \times H^{s+\frac{1}{4}}(\Gamma)$ de domaine $D = \{u \in W^{s+1}(\Omega) / Lu \in H^s(\Omega), Bu \in H^{s+\frac{1}{4}}(\Gamma)\}$ est à indice et d'indice nul.

On va ramener l'étude du problème (*) à celle d'un opérateur pseudo-différentiel sur le bord. Pour tout $\lambda \in \Sigma$ et $|\lambda|$ assez grand, on notera $P(\lambda)\varphi$ la solution unique du problème

$$\begin{cases} (L+\lambda)P(\lambda)\varphi = 0 \\ P(\lambda)\varphi_{|\Gamma} = 0 \quad , \varphi \in H^{3/4}(\Gamma) \end{cases}$$

De même on notera $G(\lambda)f$ la solution unique du problème

$$(L+\lambda)G(\lambda)f = f \qquad , f \in L^2(\Omega)$$
$$G(\lambda)f_{|\Gamma} = 0$$

Soient $f \in H^s(\Omega)$ et $\psi \in H^{s+\frac{1}{4}}(\Gamma)$, alors on a

i) Pour toute solution $u \in W^{s+1}(\Omega)$ du problème (*) la fonction $\Phi = u - G(\lambda)f_{|\Gamma}$ est solution de l'équation $T(\lambda)\Phi \equiv BP(\lambda)\Phi = \psi - \Lambda G(\lambda)f_{|\Gamma}$. De plus $\Phi \in H^{s+3/4}(\Gamma)$.

ii) Pour toute solution $\Phi \in H^{s+\frac{3}{4}}(\Gamma)$ de l'équation précédente la fonction $u = G(\lambda)f + P(\lambda)\Phi$ est solution du problème (*). De plus $u \in W^{s+1}(\Omega)$.

Ainsi on ramène l'étude du problème (*) à celle de l'opérateur $T(\lambda) \equiv BP(\lambda)$. Cela nous amène à définir les classes des noyaux de Poisson $P(\lambda)$ associés aux opérateurs du type L. On généralise ainsi les classes de noyaux de Poisson introduites par Boutet de Monvel [4]. De manière plus précise, on étude les opérateurs :

$$(1) \qquad \begin{aligned} P : \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \\ \varphi &\rightsquigarrow P\varphi(x,t) = (2\pi)^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\cdot\xi} p(x,t,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

où p est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\forall M,N \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha$ et $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^{n-1} \times \bar{\mathbb{R}}_+$ il existe une constante C telle que

$$\sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \\ (x,t) \in K}} |t^M D_t^N D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,t,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{s_0 - |\alpha| - \frac{M}{2} + \frac{N}{2}} .$$

s_0 est le degré $p(x,t,\xi)$.

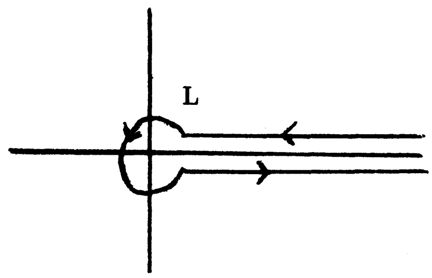
L'intégrale (1) est prise au sens des intégrales oscillantes. On montre que P se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^s_{comp}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H_{loc}^{s-s_0+\frac{1}{4}}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.

On définit cette classe de noyau de Poisson dans une variété à bord. Elle est invariante par difféomorphisme qui conserve le bord et l'ensemble des courbes normales au bord. P se prolonge alors en un opérateur linéaire continu de $H^{s+3/4}(\Gamma) \longrightarrow W^{s+1}(\bar{\Omega})$.

On montre en utilisant certains résultats de P. Bolley, J. Camus, B. Helffer [3] et des estimations a priori de Višik-Grušin [7] que notre noyau de Poisson appartient bien à cette classe. On peut voir ce résultat autrement : on fait un calcul explicite du symbole de P (on cherche le symbole de P, $p(x,t,\xi)$, sous la forme d'un développement asymptotique) et on aboutit à des intégrales de type

$$\int_L e^{-t|\xi|^{1/2}z}\; e^{z^2/2\nu}\; z^\delta (\log z)^r\, dz$$

où L est un contour de la forme : ($\nu \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\nu < 0$, $\delta \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{N}$)



On étudie ce type d'intégrale en s'inspirant des travaux de S. Alinhac [1]. Et on montre que P appartient à l'une des classes précédentes.

De là on déduit que $T(\lambda)$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $p(x,\xi)$ s'écrit sous la forme $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ avec $p_j(x,\xi)$ est un symbole homogène de degré $-\frac{j}{2}+1$. Plus précisément le symbole de $T(\lambda)$ est donné dans une carte locale convenable par :

$$i\xi_1 + \beta(x,\xi,0) + \text{des termes d'ordre inférieur ou égal à } 0.$$

On introduit un opérateur non borné $\mathcal{L}(\lambda)$, défini de la façon suivante

$$D(\mathcal{L}(\lambda)) = \{\varphi \in H^{s+\frac{3}{4}}(\Gamma) / T(\lambda)\varphi \in H^{s+\frac{1}{4}}(\Gamma)\}$$

$$\forall \varphi \in D(\mathcal{L}(\lambda)),\ \mathcal{L}(\lambda)\varphi = T(\lambda)\varphi\ .$$

En utilisant la méthode d'addition de variable et en appliquant essentiellement une variante du théorème de Hörmander concernant l'existence d'une paramétrixe on obtient que $\mathcal{L}(\lambda)$ est inversible pour $\lambda = \ell^2 e^{i\theta}$ avec $|\lambda| = \ell^2$ (ℓ un entier positif) assez grand et $\theta_0 < \theta < \theta_1$. Et par un procédé de perturbation, on montre que $\forall \lambda \in \Sigma$, $\mathcal{L}(\lambda)$ est à indice et d'indice nul. On en déduit alors assez facilement le théorème.

Comme application encore de cette méthode de réduction au bord on va donner, dans un cas particulier, un résultat d'hypoellipticité jusqu'au bord. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, borné, régulier et Γ sa frontière. Nous considérons deux champs de vecteurs dans $\bar{\Omega}$, Λ et X à coefficients réels $\mathcal{C}^\infty$ et tels que

1) Λ et X sont linéairement indépendants en tout point de Ω
2) Λ est transversal à Γ
3) X s'annule sur Γ
4) $[\Lambda, X]$ est tangent à Γ et ne s'annule pas sur Γ.

Nous considérons l'opérateur suivant

$$L = \Lambda^2 + X^2 + \lambda[\Lambda, X] + aX$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et a une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\Omega}$.

De Višik-Grušin nous déduisons que si $\lambda \neq \pm (4k+1)i$, $k \in \mathbb{N}$ nous avons le résultat de régularité suivant : $\forall s \geq 0$, $\forall u \in W^1(\Omega)$ tel que $Lu \in H^s(\Omega)$ et $\Lambda u|_\Gamma \in H^{s+1/4}(\Gamma)$ on a $u \in W^{s+1}(\Omega)$. En particulier (L, Λ) est hypoelliptique jusqu'au bord. Ici nous proposons d'étendre ce résultat de régularité au cas où λ est une valeur singulière. C'est-à-dire le cas où $\lambda = \pm (4k+1)i$ avec $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on pose

$$\delta = -(2k+1) \quad \text{et} \quad C(\delta) = \frac{8\delta^2 + 8\delta + 5}{(2\delta+1)2} .$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème : Si $\lambda = \pm(4k+1)i$, $k \in \mathbb{N}$ et si pour tout $x \in \Gamma$

(C_2) $\quad (a[\Lambda, X] - \lambda C(\delta)[\Lambda,[\Lambda, X]])(x)$ n'est pas colinéaire à $\Lambda(x)$

on a pour tout $s \geq 0$, pour tout $u \in W^1(\Omega)$ tel que $Lu \in H^{s+1/2}(\Omega)$ et $\Lambda u|_\Gamma \in H^{s+3/4}(\Gamma)$, $u \in W^{s+1}(\Omega)$.

Corollaire : Si $u \in W^1(\Omega)$ tel que $Lu \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et $\Lambda u|_\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$.

Démonstration : Soient $f \in H^{s+1/2}(\Omega)$ et $\psi \in H^{s+3/4}(\Gamma)$; et soit $u \in W^1(\Omega)$ solution du problème

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ \Lambda u|_\Gamma = \psi & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Montrons que $u \in W^{s+1}(\Omega)$. Soit P un noyau de Poisson associé à l'opérateur L. Posons $v = u - P(u|_\Gamma)$. Alors $v \in W^1(\Omega)$ et v est une solution du problème

$$(2) \quad \begin{cases} Lv = f \mod \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \\ v|_{\Gamma} = 0 \mod \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma) \end{cases}$$

Posons encore $\Phi = (u - v)|_{\Gamma}$ alors Φ est solution de l'équation

$$BP\,\Phi \equiv \Lambda P\Phi|_{\Gamma} = \psi - (\Lambda v)|_{\Gamma} \mod \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma)$$

De (2) et d'après un résultat de régularité de Višik-Grušin [7] nous avons $v \in W^{s+3/2}(\Omega)$. Par suite $(\Lambda v)|_{\Gamma}$ est dans $H^{s+3/4}(\Gamma)$. Sous la condition (C_2), BP admet une paramétrixe d'ordre 0. Il vient donc que $\Phi \in H^{s+3/4}(\Gamma)$. Remarquons que u vérifie

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\Gamma} = \Phi \mod \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma) \end{cases}$$

on a $f \in H^{s+1/2}(\Omega) \subset H^{s}(\Omega)$ et $\Phi \in H^{s+3/4}(\Gamma)$. De nouveau d'après un résultat de régularité de Višik-Grušin [7] on a $u \in W^{s+1}(\Omega)$.

---

[1] S. Alinhac : Paramétrixe pour un système hyperbolique à multiplicité variable (Publications des séminaires de mathématiques de Rennes, 1976, fascicule I, Analyse fonctionnelle).

[2] M. S. Baouendi : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés Thèse (Faculté des Sciences d'Orsay).

[3] P. Bolley, J. Camus, B. Helffer : Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. J. Math. Pures et Appliquées, 55, 1976.

[4] L. Boutet de Monvel : Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord. J. Anal. Math. 17, 1966.

[5] K. Taïra : On some degenerate oblique derivative problems. Journ. of the Faculty of Science, the University of Tokyo, Sec. I. A. vol. 23, n°2, pp.259-287, August 1976.

[6] M. Tougeron : Problème d'évolution parabolique pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. (A paraître).

[7] M. I. Višik et V. V. Grušin : On class of higher order degenerate elliptic equations. Math. U.S.S.R. Sbornik, vol.8 (1969) n° 1.

***