

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE SCHAPIRA

**Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe.
Applications à l'étude de l'hypoellipticité analytique**

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979___A5_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONDITIONS DE POSITIVITE DANS UNE VARIETE
SYMPLECTIQUE COMPLEXE. APPLICATIONS A
L'ETUDE DE L'HYPOLLIPTICITE ANALYTIQUE.

(Résumé)

par P. SCHAPIRA

§ 1. Soit X une variété analytique complexe, \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Soit T^*X le fibré cotangent à X , ω la 1-forme canonique sur T^*X , \mathcal{E}_X le faisceau sur T^*X des opérateurs micro-différentiels d'ordre fini (cf. [10]). Nous notons π la projection de T^*X sur X et nous désignons par \dot{T}^*X l'espace T^*X privé de la section nulle. Nous dirons qu'une partie Λ de T^*X est conique (resp. \mathbb{C} -conique) si $(z, \zeta) \in \Lambda$ entraîne $(z, k\zeta) \in \Lambda$, pour k réel positif (resp. pour $k \in \mathbb{C}^*$). On note $\hat{\Lambda}$ l'enveloppe \mathbb{C} -conique d'une partie conique Λ .

Définition 1 : Soit Λ une sous-variété analytique réelle conique de T^*X . Nous dirons que Λ est \mathbb{R} -lagrangienne si Λ est lagrangienne pour la 2-forme $\text{Re } d\omega$. Nous dirons que Λ est \mathbb{I} -symplectique si Λ est symplectique pour $\text{Im } d\omega$.

Si Λ est \mathbb{R} -lagrangienne et \mathbb{I} -symplectique $\frac{1}{i}\omega$ définit une structure symplectique homogène réelle sur Λ , et (T^*X, ω) s'identifie à un complexifié de $(\Lambda, \frac{1}{i}\omega|_{\Lambda})$.

Exemple 1 : Soit M une variété analytique réelle de complexifié X . Alors T_M^*X le fibré conormal à M dans X est \mathbb{R} -lagrangien et \mathbb{I} -symplectique. L'espace T_M^*X est muni du faisceau \mathcal{O}_M des microfonctions de M. Sato (cf. [10]). C'est un faisceau de $\mathcal{E}_X|_{T_M^*X}$ -modules.

Exemple 2 : Soit Y une hypersurface analytique réelle de X , définie par une équation réelle $f=0$. Si la forme de Levi de f est non dégénérée sur Y , l'espace \dot{T}_Y^*X est \mathbb{R} -lagrangien et \mathbb{I} -symplectique.

Dans la situation de l'exemple 2, si Ω est un ouvert de X , de frontière $\partial\Omega = Y$, Ω étant définie par l'inéquation $f < 0$, nous noterons $\partial\Omega^+$ la partie de $\dot{T}_{\partial\Omega}^*X$ définie par :

$$\partial\Omega^+ = \{(z, \zeta) \in T^*X; f(z) = 0, \zeta = k\partial'f(z); k \in \mathbf{R}_+^*\}$$

(∂' désigne la différentielle holomorphe sur X). Nous ne considérerons que le cas où l'ouvert Ω est strictement pseudo-convexe. Nous notons alors \mathcal{O}^+ le faisceau sur $\partial\Omega$ des valeurs au bord de fonctions holomorphes de Ω : si i désigne l'injection de Ω dans X ,

$$\mathcal{O}^+ = (i_*\mathcal{O}_X)/\mathcal{O}_X|_{\partial\Omega}$$

En fait on considère \mathcal{O}^+ comme un faisceau sur $\partial\Omega^+$, localement constant sur les orbites de l'action de \mathbf{R}_+^* . Ce faisceau est alors naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}_X|_{\partial\Omega^+}$ -module (cf. [9]).

Soit Φ une transformation canonique complexe homogène définie sur un ouvert \mathcal{U} de T^*X , qui échange T_M^*X et $\partial\Omega^+$. On peut alors (localement) quantifier Φ en un isomorphe $\hat{\Phi}$ de \mathcal{C}_M sur \mathcal{O}^+ , isomorphisme compatible à l'action des opérateurs micro-différentiels sur \mathcal{C}_M et sur \mathcal{O}^+ (cf. M. Kashiwara [6], M. Kashiwara et T. Kawai [7] ou encore L. Boutet de Monvel [3] dans un contexte un peu différent).

§ 2. Rappelons la définition de A. Melin et J. Sjöstrand de la positivité ([4], [5]). Soit tout d'abord V une variété analytique réelle, W un complexifié de V , ν "l'application" de W dans TV qui, dans une carte locale réelle sur V , à $z \in W$ associe $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in TV$. Si α est une 1-forme sur V , la fonction $z \rightarrow \langle \alpha, \nu(z) \rangle$ est bien définie (indépendamment du choix d'une carte) modulo $I_3(V)$, l'espace des fonctions nulles à l'ordre 3 sur V .

Définition 2 [5] : Soit Λ_0 une variété analytique réelle conique de T^*X , \mathbf{R} -lagrangienne et I -symplectique. Soit Λ une partie conique de T^*X , et p un point de Λ_0 . On dit que (Λ_0, Λ) est positif en p si pour $(z, \zeta) \in \Lambda$ on a dans un voisinage de p :

$$-\frac{1}{i} \langle \omega, \nu(z, \zeta) \rangle \geq 0 \quad \text{mod } I_3(\Lambda_0).$$

Dans un système de coordonnées locales symplectiques sur T^*X , ces coordonnées étant réelles sur Λ_0 , cette condition s'exprime aussi par :

$$-\langle \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} \zeta \rangle \geq -C(|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} \zeta|)^3$$

pour $(z, \zeta) \in \Lambda$ au voisinage de p , et pour une constante $C > 0$.

On démontre alors :

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert strictement pseudo-convexe de X , de frontière analytique réelle $\partial\Omega$, et soit $\partial\Omega^+$ la partie de T^*X définie plus haut. Soit $p \in \partial\Omega^+$, Λ une partie \mathbb{C} -conique de T^*X . On suppose $(\partial\Omega^+, \Lambda)$ positif en p . Alors il existe un voisinage \mathcal{U} de p dans T^*X tel que :

$$\pi(\mathcal{U} \cap \Lambda) \cap \Omega = \emptyset$$

On peut donner une réciproque à ce théorème si l'on suppose que Λ est le fibré conormal à une hypersurface analytique complexe de X .

On peut supposer seulement Λ conique (i.e. : \mathbb{R}_+^* -conique) si Λ est le fibré conormal à une hypersurface réelle S de classe C^2 , et si $\hat{\Lambda} \cap \partial\Omega^+ = \Lambda \cap \partial\Omega^+$.

§ 3. Soit P un opérateur micro-différentiel défini au voisinage d'un point $p \in T^*X$. Soit $\sigma(P)$ son symbole principal. Soit L une variété analytique complexe conique involutive de T^*X . Rappelons [2] (cf. aussi [8]) que l'on dit qu'un vecteur $\theta \in T_p T^*X$ est non micro-caractéristique pour P sur L , si, m étant l'ordre d'annulation de $\sigma(P)$ sur L , $\sigma(P)$ s'annule exactement à l'ordre m sur L dans la direction θ .

Théorème 2 : Soit M une variété analytique réelle de complexifié X , p un point de T_M^*X , P un opérateur micro-différentiel au voisinage de p . On suppose qu'il existe une variété lagrangienne complexe conique L de T^*X (au voisinage de p) telle que :

- i) $p \in L$ et (T_M^*X, L) est positif en p
- ii) $\sigma(P)(p) = 0$, et il existe un vecteur $\theta \in T_p T^*X$, avec $\langle \omega, \theta \rangle = 0$ θ étant non micro-caractéristique pour P sur L .

Alors il existe une microfonction $u \in \mathcal{C}_M$, définie au voisinage de p , solution de l'équation $Pu = 0$, et de support $T_M^*X \cap L$.

Pour la démonstration, on utilise une transformation canonique complexe qui échange T_M^*X avec un fibré $\partial\Omega^+$, pour un ouvert strictement pseudo-convexe Ω , et L avec T_Y^*X , Y désignant une hypersurface complexe de

X. L'hypothèse de positivité entraîne $Y \cap \Omega = \emptyset$, et il reste à construire des solutions holomorphes ramifiées sur Y, mais non holomorphes, de l'équation $Pu = 0$, ce qui est possible par [8]. Quand P est à caractéristiques complexes simples, J. Sjöstrand [12] a construit (sous les hypothèses adéquates) à l'aide de variétés lagrangiennes positives, des solutions de l'équation $Pu = 0$ dont le support est exactement une courbe ou une feuille bicaractéristique. Dans le cas différentiel M. S. Baouendi, F. Treves, E. C. Zachmanoglou [1] ont donné des conditions suffisantes pour l'existence de fonctions de type positif (au sens de [10]) solutions de l'équation caractéristique, donc pour l'existence de variétés lagrangiennes positives contenues dans la variété caractéristique de P, et ont construit ainsi des solutions non triviales de l'équation $Pu = 0$.

Si Λ_1 est un germe de variété analytique réelle conique \mathbf{R} -lagrangienne et \mathbf{I} -symplectique, nous appellerons par abus de langage, faisceau \mathcal{C}_{Λ_1} un faisceau sur Λ_1 obtenu par transformation canonique à partir du faisceau \mathcal{C}_M sur T_M^*X , (ce faisceau n'est donc défini qu'à un isomorphisme de \mathcal{E}_X -module près, ce qui n'importe pas pour la suite).

Théorème 3 : Soit Λ_1 une variété analytique réelle conique \mathbf{R} -lagrangienne et \mathbf{I} -symplectique, au voisinage de $p \in T_M^*X$. On suppose :

i) (Λ_1, T_M^*X) positif en p, et $\widehat{\Lambda}_1 \cap T_M^*X = \Lambda_1 \cap T_M^*X$.

ii) $T_p(T_M^*X) \cap T_p\Lambda_1$ de codimension inférieure ou égale à 1 dans $T_p\Lambda_1$.

Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent au voisinage de p. On suppose

iii) $(\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \Gamma(\Lambda_1 \cap T_M^*X)(\mathcal{C}_{\Lambda_1})))_p = 0$.

Alors $(\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M))_p = 0$.

Autrement dit si dans Λ_1 , les solutions du système \mathcal{M} à support dans $\Lambda_1 \cap T_M^*X$, sont nulles, le système est hypoelliptique analytique dans T_M^*X aux points de $\Lambda_1 \cap T_M^*X$. La démonstration consiste à faire une transformation canonique complexe qui échange simultanément T_M^*X et Λ_1 en $\partial\Omega_0^+$ et $\partial\Omega_1^+$, où Ω_0 et Ω_1 sont deux ouverts strictement pseudo-convexes (ceci grâce à l'hypothèse ii). L'hypothèse i) entraîne l'inclusion $\Omega_1 \subset \Omega_0$, d'où, en notant \mathcal{O}_0^+ (resp. \mathcal{O}_1^+) le faisceau sur $\partial\Omega_0^+$ (resp. $\partial\Omega_1^+$) défini plus haut, un morphisme injectif de \mathcal{E}_X -modules :

$$\mathcal{O}_0^+|_{\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1} \rightarrow \Gamma(\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1)(\mathcal{O}_1^+) .$$

On peut utiliser les résultats de [9] pour vérifier la condition iii).

Un exemple : (Opérateurs de Lewy-Mizohata généralisés).

Plaçons-nous dans $T^*(\mathbb{C}^n)$ muni des coordonnées (z, ζ) , $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (\zeta_1, \zeta'', \zeta_n)$, et soit P un opérateur micro-différentiel d'ordre m , dont le symbole principal s'écrit :

$$P_m(z, \zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z, \zeta) (\zeta_1 + iz_1^k \zeta_n)^{\alpha_1} (\zeta'')^{\alpha''} \left((z_n - \frac{i}{k+1} z_1^{k+1}) \zeta_n \right)^{\alpha_n}$$

où les a_α sont des symboles d'ordre 0, avec $a_{(m, 0, \dots, 0)} \equiv 1$, et k est un entier impair.

a) Soit $p^- = (0; 0, \dots, -i) \in T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$. Alors l'opérateur P n'est pas hypoelliptique analytique en p^- (il existe des micro-fonctions non nulles au voisinage de p^- solutions de $Pu = 0$) : cela résulte immédiatement du théorème 2.

b) Soit $p^+ = (0; 0, \dots, i) \in T^*_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C}^n)$. L'opérateur P est hypoelliptique analytique en p^+ (autrement dit c'est un morphisme injectif de $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})_{p^+}$ dans lui-même). Pour appliquer le théorème 3 on appelle Λ_1 la variété déduite de $T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$ par la transformation canonique associée à $\langle z, \theta \rangle + i \frac{z_1^{k+1}}{k+1} \theta_n$. On est ramené à vérifier que si l'opérateur Q a pour symbole principal

$$Q_m(z, \zeta) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha(z, \zeta) (\zeta')^{\alpha'} (z_n \zeta_n)^{\alpha_n}$$

avec $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$, b_α symboles d'ordre 0, $b_{(m, 0, \dots, 0)} \equiv 1$, les micro-fonctions sur \mathbb{R}^n , définies au voisinage de p^+ et à support dans l'hypersurface N d'équation $\{x_1 = 0\}$ sont nulles. Cela résulte du théorème 2.2 de [11].

c) En fait le théorème 2.2 de [11] est plus précis. Si u est une micro-fonction sur \mathbb{R}^n à support dans N (au voisinage de p^+) et si les (v_j) ($j = 0, \dots, m-1$) sont des microfonctions de la variété N , l'équation :

$$Qu + \sum_{j=0}^{m-1} v_j \otimes \delta_N^j = 0$$

entraîne $u = 0$. On en conclut facilement que l'opérateur P n'est pas résoluble dans les microfonctions au point p^+ (ce n'est pas un morphisme surjectif de $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})_{p^+}$).

Nous avons eu plusieurs discussions fructueuses avec J. Sjöstrand.
Nous sommes heureux de l'en remercier ici.

-
- [1] M. S. Baouendi, F. Trèves, E. C. Zachmanoglou : Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients. *Duke Math. J.* (1979), à paraître.
- [2] J. M. Bony : Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.
- [3] L. Boutet de Monvel : Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t.287 (1978) 855-856.
- [4] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex valued phase functions. *Lecture Notes in Math.* 459 Springer (1975) 120-223.
- [5] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operator with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem. *Comm. in Partial Diff. Eq.* 1 (1976), 313-400.
- [6] M. Kashiwara : Exposés à l'Université Paris-Nord (1976) non publiés.
- [7] M. Kashiwara, T. Kawai : Seminar on linear P. D. E., Princeton 1977, à paraître.
- [8] M. Kashiwara, P. Schapira : Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe. *Inventiones Math.* 46 (1978), 17-38.
- [9] M. Kashiwara, P. Schapira : Micro-hyperbolic systems. *Acta Mathematica* 142 (1979), 1-55.
- [10] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudodifferential equations. *Lecture Notes in Math.* 287, Springer (1973), 265-529.
- [11] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles II. Sem. Goulaouic-Schwartz (1976-77), exposé 9.
- [12] J. Sjöstrand : Applications of Fourier distributions with complex phase functions. *Lecture Notes in Math.* 459 Springer (1975), 255-282.