JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ALAIN GRIGIS

Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A16_0>

PROPAGATION DES SINGULARITES POUR DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par A. GRIGIS

1. Soit X une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n, et $\omega = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$ la 2-forme canonique sur T^*X. On considère une sous-variété conique Σ de T^*X vérifiant

(1.1) $\omega|_\Sigma$ est de rang constant (on supposera ce rang non maximum pour éviter un cas trivial)

(1.2) le champ radial n'est orthogonal pour ω à $T\Sigma$ en aucun point de Σ.

Proposition 1 : La variété Σ admet un feuilletage canonique. L'espace tangent à une feuille Γ est $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$, il est transverse au champ radial.

En effet $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$ est le radical de $\omega|_\Sigma$ qui est une 2-forme fermée.

On considère maintenant un opérateur pseudodifférentiel classique P elliptique en dehors de Σ et dont le symbole principal p_m (supposé réel positif) s'annule exactement à l'ordre 2 sur Σ.

On impose de plus une condition sur le terme d'ordre m-1 de P, condition qui s'exprime ainsi de manière invariante :

$$I_2(P) + \Sigma\lambda_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma \tag{1.3}$$

(on a noté $I_2(P)$ le symbole sous-principal de P et λ_j les réels positifs tels que $\pm i\lambda_j$ soient les valeurs propres non nulles de la matrice hamiltonienne de p_m comptées avec leur multiplicité).

On sait d'après [3], [4], [6] que P n'est pas hypoelliptique avec perte d'une dérivée (il faudrait $I_2(P) + \Sigma\lambda_j > 0$).

Théorème : Soit P vérifiant les hypothèses ci-dessus. Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ $Pu \in C^{\infty}(X)$ et si $\rho \in WF(u)$ alors $\Gamma_{\rho} \subset WF(u)$, où Γ_{ρ} désigne la feuille canonique passant par ρ.

On dit que P propage les singularités sur les feuilles canoniques.

Dans le cas où la variété Σ est involutive, le résultat est dû à J. Sjöstrand [9]. Notre démonstration consiste à se ramener à ce cas. La condition (1.3) est dite "condition de Lévi". Si elle n'est pas vérifiée, alors on a des phénomènes de propagation le long de courbes tracées sur les feuilles caractéristiques, semblables à ceux étudiés par R. Lascar [7] et L. Boutet de Monvel [2].

2. Modèle microlocal

On travaille microlocalement et à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique, on se ramène au modèle suivant : P_o + perturbation P'. On pose

$$Y = \mathbb{R}_y^{n-d'} = \mathbb{R}_{y'}^{n-d'-d''} \times \mathbb{R}_{y''}^{d''}$$

$$X = \mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}_t^{d'} \times Y$$

$$(2.1) \quad P_o = \sum_{1 \leq j,j' \leq d'} a_{jj'}(y,D_{y'})Z_j Z_{j'}^* + \sum_{\substack{|\alpha|=2 \\ \alpha \in \mathbb{N}^{d''}}} b_{\alpha}(y,D_{y'})D_{y''}^{\alpha}$$

où .

$$Z_j = D_{t_j} + it_j |D_{y'}| \qquad j = 1,\dots,d'$$

et $a_{jj'}$ et b_{α} sont des symboles homogènes (qu'on supposera de degré -1) ne dépendant que de (y',y'',η').

La matrice $a_{jj'}$ est hermitienne définie positive, ses valeurs propres sont les invariants $\lambda_j |\eta'|^{-1}$, et la matrice (b_{α}) est réelle définie positive.

La variété caractéristique Σ : $t = \tau = \eta'' = 0$ vérifie (1,1) et (1,2) et P_o vérifie la condition de Lévi.

La perturbation P', inévitable, est un opérateur pseudodifférentiel classique de degré 1 dont le symbole principal s'annule à l'ordre 3 sur Σ et le terme suivant à l'ordre 1 (si bien que la condition de Lévi n'est pas perturbée!)

Dans la suite, on étudie l'opérateur $P = P_o + P'$, et on montre qu'il propage les singularités "en y" ".

3. Hypoellipticité fine

L'opérateur P n'est pas hypoelliptique avec perte d'une dérivée. Pourtant on va d'abord montrer de l'hypoellipticité dans des voisinages quasihomogènes.

Considérons l'opérateur

$$(3.1) \qquad A = A(t,D_t) = \sum_{1\le j,j'\le d'} a_{jj'}(D_{tj} + it_j)(D_{tj'} - it_{j'})$$

où $a_{jj'}$ est une matrice hermitienne définie positive.

C'est un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t^{d'})$ qui a pour valeurs propres $\sum_{j=1}^{d'} 2\alpha_j\lambda_j$ (α_j entiers ≥ 0, λ_j valeurs propres de $(a_{jj'})$).

L'opérateur A n'est pas inversible (0 est valeur propre!) mais si b est > 0, l'opérateur $A + b$ est inversible.

Posons maintenant

$$(3.2) \qquad P_o^G = \Sigma\, a_{jj'}(y,\eta')(D_{tj} + it_j|\eta'|)(D_{tj'} - it_{j'}|\eta'|) + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(y,\eta')\eta''^\alpha$$

Considérant P_o^G comme un opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t^{d'})$ dépendant des paramètres (y,η',η'') on voit que P_o^G est inversible si $\eta'' \neq 0$.

D'autre part si on pose $\mathcal{D}_\lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'})$ défini par

$$(\mathcal{D}_\lambda f)(t) = \lambda^{d'/4} f(\lambda^{1/2} t)$$

on a

$$(3.4) \qquad P^G_{o(y,\lambda\eta',\lambda^{1/2}\eta'')} \circ \mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_\lambda \circ P^G_{o(y,\eta',\eta'')} \qquad \lambda > \eta \quad |\eta'| > 1$$

Utilisant un inverse de P_o^G on peut construire une paramétrixe de P dans tout ouvert quasi homogène du type

$$V \cap \{|\eta''|^2 > \varepsilon|\eta'|\} \qquad \varepsilon > 0$$

où V est un ouvert conique dans T*X (la quasi homogénéité est liée aux dilatations $(t,y;\tau,\eta',\eta'') \mapsto (t,y;\lambda\tau,\lambda\eta',\lambda^{1/2}\eta'')$.

4. Réduction au cas involutif

On utilise une méthode due à Grušin et utilisée dans [8] et [5].

L'opérateur A (3.1) n'est pas inversible, son noyau et son conoyau sont de dimension un, engendrés tous deux par la fonction :

$$h_o(t) = \pi^{d'/4}\, e^{-t^2/2}\ , \ (t^2 = \sum_{j=1}^{d'} t_j^2)\ . \tag{4.1}$$

On définit les opérateurs

$$\begin{aligned} F^+ &: z \in \mathbb{C} \to z\, h_o(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) \\ F^- &: f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) \mapsto \int h_o(t)\, f(t)dt \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{4.2}$$

On vérifie aisément que le système

$$\begin{pmatrix} A & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) = \mathbb{C}$ et admet un inverse qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} F & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

avec F opérateur pseudodifférentiel de degré -2 .

Si b est une constante de module assez petit ($|b| < \inf \lambda_j$), le système

$$\begin{pmatrix} A + b & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

admet aussi un inverse

$$\begin{pmatrix} F & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix} + \sum_1^{\infty} (-1)^j b^j \begin{pmatrix} F^{j+1} & F^j F^+ \\ F^- F^j & F^- F^{j-1} F^+ \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

L'opérateur de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\Sigma(-1)^j b^j F^- F^{j-1} F^+$, mesure l'effet de $A + b$ sur la fonction h_o .

Suivant ces considérations on envisage le système opérant de $\mathcal{C}_0^\infty(X)\times\mathcal{C}_0^\infty(Y)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X)\times\mathcal{C}^\infty(Y)$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & H \\ H^* & 0 \end{pmatrix}$$

où H est l'opérateur de Hermite (au sens de [1]) défini ainsi

$$Hf(t,y) = \int e^{iy\eta}|\eta'|^{d'/4} h_o\,(t|\eta'|^{1/2})d\eta$$

et H^* est l'adjoint de H.

On montre que le système $\mathcal{P}$ admet une paramétrixe

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E^+ \\ E^- & E^\pm \end{pmatrix}$$

dans un voisinage quasihomogène de Σ : $V \cap \{|\eta''|^2 < \varepsilon_o|\eta'|\}$ (où V est un ouvert conique de T^*X). Le terme E^+ (E^-) est un opérateur de Hermite (adjoint), et $E^\pm$ est un opérateur pseudodifférentiel sur Y à caractéristiques doubles sur $\Sigma : \eta'' = 0$ qui dans le voisinage où il est défini admet le développement

$$E^\pm = \sum_{|\alpha|\le 2} C_\alpha(y,D_y)\, D^\alpha_{y''}$$

les C_α sont quasihomogènes au sens de [7] de degré -1.

Le point important est que $E^\pm$ vérifie la condition de Lévi (c'est à dire que le terme de degré quasihomogène $-\frac{1}{2}$ s'annule sur Σ).

5. Propagation des singularités

On peut appliquer le résultat de Sjöstrand à l'opérateur $E^\pm$ avec de petites modifications car $E^\pm$ n'est pas classique.

Donc $E^\pm$ propage les singularités "en y'' ".

On en déduit le résultat pour P en considérant les identités

$$EP + E^+H^* \equiv I$$
$$E^-P + E^\pm H^* \equiv 0$$

Le théorème est démontré. On peut montrer de plus que P n'est pas hypoelliptique.

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, C.P.A.M. 27 (1974) pp.585-639.

[2] L. Boutet de Monvel : Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger, Springer Lecture Notes 459 (1975) pp.1-14.

[3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifferentiels à caractéristiques multiples, Astérisque 34-35 (1976) pp.93-121.

[4] A. Grigis : Hypoellipticité et parametrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Astérisque 34-35 (1976) pp.183-205.

[5] B. Helffer : Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte de 3/2 dérivées), Bull. Soc. Math. France 51-52 (1977) pp.13-61.

[6] L. Hörmander : A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics, Math. Ann. 217 (1975) pp.165-188.

[7] R. Lascar : Propagation des singularités des solutions d'équations quasihomogènes, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 27-2 (1977) pp.79-123.

[8] J. Sjöstrand : Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics, Arkiv för Mat. 12 (1974) pp.85-130.

[9] J. Sjöstrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics, Ann . de l'Inst. Fourier, Grenoble 26-1 (1976) pp.141-155.

* * * *