JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANDRÉ UNTERBERGER

La transformation de Fourier portative

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A14_0>

Conférence n° 14

LA TRANSFORMATION DE FOURIER PORTATIVE

par A. UNTERBERGER

A la suite de Maslov, le professeur Leray a insisté, dans ses travaux sur l'Analyse lagrangienne, pour que les outils définis en vue d'applications à la mécanique quantique soient invariants par les changements de repères symplectiques de l'espace de phase $\mathbb{R}^{2\nu}$. Nous adoptons ici le point de vue qu'un repère $\omega = (Y,\theta)$ est constitué par la donnée d'un point $Y = (y,\eta)$ de l'espace de phase (autrement dit d'une origine dans l'espace de configuration, et d'une origine dans l'espace des moments conjugués), et d'une norme symplectique $\| \ \|_\theta$ sur l'espace de phase, entendant par là toute norme euclidienne se déduisant de la norme canonique de $\mathbb{R}^{2\nu}$ par une transformation symplectique ; il revient au même de se donner la "transformation de Fourier" $\mathcal{F}_\omega$ définie ($Op_{1/2}$ étant la quantification de Weyl-Wigner) par

$$\mathcal{F}_\omega = Op_{1/2}(2^{\nu/2} e^{\frac{i\pi\nu}{4}} \exp - 2i\pi \|X - Y\|_\theta^2) ,$$

ou encore l'oscillateur harmonique $\Lambda_\omega = Op_{1/2}(\pi\|X - Y\|_\theta^2) - \frac{\nu}{2}$, ou encore l'espace propre de niveau d'énergie zéro de celui-ci, ou enfin le point Y et la structure complexe sur l'espace de phase pour laquelle la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire B définie par $B(X_1,X_2) = (X_1,X_2)_\theta + i[X_1,X_2]$ ($[\ ,\ ]$ étant la forme symplectique) est sesquilinéaire. Introduisant les "translations de phase" τ_Y définies par :

$$(\tau_Y u)(x) = u(x - y)e^{2i\pi\langle x - \frac{y}{2},\eta\rangle} , \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu) ,$$

l'état fondamental de Λ_ω est donné par $\varphi_\omega = \tau_Y \varphi_\theta$, avec

$$\varphi_\theta(x) = (\det A)^{-1/4}\, 2^{\nu/4}\, e^{-\pi(A^{-1}x,x)} e^{i\pi(A^{-1}Bx,x)} ,$$

où $i(A + iB)$ est l'image par la représentation de Siegel de l'inverse de la matrice de la forme $\| \ \|_\theta^2$; on obtient les autres états propres de Λ_ω sous la forme $\varphi_\omega^\alpha = (\alpha!)^{-1/2} A_\omega^\alpha \varphi_\omega$, où les $A_\omega^{(j)}$ $(1 \le j \le \nu)$ sont une base de l'espace des opérateurs de création, définis comme $Op_{1/2}(f(X-Y))$ (f étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ antiholomorphe pour la structure complexe définie par ω). Pour chaque repère ω, on introduit les normes $\mathcal{H}_{\omega,k}$ $(k = 0,1,\ldots)$ définies par

$$\|u\|_{\omega,k} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|A_\omega^\alpha u\|^2\Big)^{1/2} \quad , \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu).$$

Soit σ l'isomorphisme de $(\mathbb{R}^{2\nu})^*$ sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ défini par l'identité $\langle X,\Xi\rangle = -[X,\sigma\Xi]$.

Deux repères $\omega = (Y,\theta)$ et $\omega' = (Y',\theta')$ définissent un repère $\omega \circ \omega'$ dans la théorie (dont l'introduction est indispensable) pour laquelle l'ancien espace de phase est le nouvel espace de configuration : il convient de poser $\omega \circ \omega' = (\frac{Y+Y'}{2}, \sigma^{-1}(Y-Y'), \Theta)$, avec

$$\|(X,\Xi)\|_\Theta^2 = \|X + \frac{\sigma\Xi}{2}\|_\theta^2 + \|X - \frac{\sigma\Xi}{2}\|_{\theta'}^2 \quad .$$

On pose aussi

$$\|X\|_{\theta,\theta'}^2 = 2\inf\{\|X - Z\|_\theta^2 + \|Z\|_{\theta'}^2\} \ ,$$

et l'on appelle $\det_{\theta,\theta'}$ le déterminant de la forme quadratique ainsi introduite.

<u>Définition 1</u> : un espace d'observateurs est défini par la donnée d'un espace Ω et d'une mesure positive σ-finie $d\omega$ sur Ω, ainsi que, pour chaque $\omega \in \Omega$, d'un repère (Y,θ), noté aussi ω par abus commode. On suppose les conditions suivantes vérifiées :

(i) pour N assez grand, la fonction

$$(\omega,\omega') \mapsto \det_{\theta,\theta'}^{1/4} (1 + \|Y - Y'\|_{\theta,\theta'}^2)^{-N}$$

est le noyau d'un opérateur borné sur $L^2(\Omega)$.

(ii) il existe une application mesurable $\omega \mapsto a_\omega$ de Ω dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2\nu})$ telle que d'une part la norme $\|a_\omega\|_{\omega\circ\omega,k}$ soit bornée pour tout k, et que d'autre part on ait $1 = \int a_\omega(X)d\omega$ en un sens faible (il y en a bien un) à préciser. Le cas où $\Omega = \mathbb{R}^{2\nu}$, le repère attaché à $Y \in \mathbb{R}^{2\nu}$ étant (Y,θ_Y), est plus traditionnel et a été étudié par divers auteurs (Beals, Hörmander, Unterberger) dans des degrés de généralité variés.

Théorème : Quels que soient les multi-indices α et β, et quelle que soit la fonction k sur $\Omega\times\Omega$, noyau d'un opérateur borné sur $L^2(\Omega)$, l'opérateur défini par

$$u \mapsto \iint k(\omega,\omega')(u,\varphi^{\alpha}_{\omega'})\varphi^{\beta}_{\omega}\, d\omega\, d\omega'$$

est borné sur $L^2(\mathbf{R}^{\nu})$.

Il existe $n\in\mathbf{N}$ et des noyaux $k_{\alpha\beta}$ de ce genre tels que l'on ait identiquement

$$u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq n\\ |\beta|\leq n}} \iint k_{\alpha\beta}(\omega,\omega')(u,\varphi^{\alpha}_{\omega'})\varphi^{\beta}_{\omega}\, d\omega\, d\omega'$$

pour tout $u\in L^2(\mathbf{R}^{\nu})$.

Définition 2 : Soient Ω et Ω' deux espaces d'observateurs, N et N' répondant à l'hypothèse (i) de la définition 1, et $k > 2(N+N')$. On appelle opérateur métadifférentiel d'ordre 0 et de classe $\mathcal{K}^k$ (relatif à Ω, Ω') tout opérateur $A = Op_{1/2}(a)$, avec $a = \iint a_{\omega,\omega'}\, d\omega\, d\omega'$, où $(\omega,\omega')\mapsto a_{\omega,\omega'}$ est une application mesurable de $\Omega\times\Omega'$ dans $\mathcal{K}^k(\mathbf{R}^{2\nu})$ telle que $\|a_{\omega,\omega'}\|_{\omega\circ\omega',k}$ soit le noyau d'un opérateur borné de $L^2(\Omega')$ dans $L^2(\Omega)$.

Propriétés et utilisation

Les opérateurs métadifférentiels d'ordre 0 sont bornés sur $L^2(\mathbf{R}^{\nu})$; ils se composent entre eux (à condition d'augmenter un peu k et d'introduire trois espaces d'observateurs) ; une classe extrêmement générale d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 rentre dans cette définition (avec $\Omega = \Omega' = \mathbf{R}^{2\nu}$, $\theta = \theta'$, $a_{\omega,\omega'}$ étant nul pour (ω,ω') loin de la diagonale); dans le cas où $\Omega = \Omega' = \mathbf{R}^{2\nu}$ (les champs de normes θ et θ' pouvant être distincts), et où de plus $a_{\omega,\omega'} = a_{Y,Y'}$ est concentré, en un certain sens, près du graphe d'une transformation canonique, l'opérateur A est proche d'une version généralisée (il n'y a pas ici d'hypothèse d'homogénéité) d'un opérateur intégral de Fourier ; les opérateurs métaplectiques sont des opérateurs métadifférentiels.

La représentation des opérateurs métadifférentiels comme somme de projecteurs (un peu comme dans le théorème plus haut), sans introduction de phases globales, évite certaines difficultés liées aux singularités de Maslov, et au caractère oscillant des intégrales rencontrées dans la description usuelle des opérateurs pseudo-différentiels et intégraux de Fourier ; elle est utile pour l'équation de Schrödinger, et éclaire en particulier le lien entre la représentation de Schrödinger et celle d'Heisenberg.

---

[1] Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[2] Sur la continuité L^2 des opérateurs pseudo-différentiels, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles en dimension infinie, IHP 1978.

[3] Extensions du lemme de Cotlar et applications, Note C. R. A. S., février 1979.

[4] Les opérateurs métadifférentiels, Note C. R. A. S., mars 1979.

[5] Les opérateurs métadifférentiels (article développé en préparation).

*
* *
*