JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CLAUDE MATTERA

Théorème de traces pour une classe d'espaces de Sobolev singuliers

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 130-156

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____130_0>

THEOREME DE TRACES POUR UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV SINGULIERS

par

C. MATTERA

I. INTRODUCTION

R^n_+ désigne le demi-espace : $R^n_+ = \{(x,t) \ , \ x \in R^{n-1} \ , \ t > 0\}$.

On étudie les traces des espaces de Sobolev avec poids :

$$W^m(B_+) = \{v \in F \ , \ \varphi_{\alpha,j}(x,t) \ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \ \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \ (x,t) \in L^2(B_+) \ , \ |\alpha|+j \leqslant m\}$$

munis de leur semi-norme canonique avec les notations : $B_+ = B_o \times \left]0,\beta\right[$, B_o ouvert de R^{n-1} , $\beta \in \bar{R}_+$; F est un espace de distributions (par exemple $\mathcal{D}'(B_+)$) qui sera précisé à chaque fois ; $\varphi_{\alpha,j}(x,t)$ sont des fonctions continues sur B_+ à valeurs réelles.

On utilisera les définitions et les notations de ([10])([17]) pour les espaces de distributions.

Déterminer les traces de tels espaces, c'est définir un entier $p \in Z$, $p \geqslant -1$ (il y aura au total $p+1$ traces), des mesurables M_j de B_o , $0 < j < p$, et une topologie semi-normée sur les fonctions mesurables sur M_j tels que, si T^m_j est l'espace topologique ainsi défini, l'application $y_j : v \longrightarrow v_j(x) = \frac{\partial^t v}{\partial t^j} (x,0)$ soit linéaire et continue de $W^m(B_+)$ dans T^m_j $(0 \leqslant j \leqslant p)$ et qu'il existe une application inverse (relèvement) R_j telle que $Y_j \circ R_j = Id_{T^m_j}$ où $Id_{T^m_j}$ est l'application identique dans T^m_j .

On peut aussi chercher l'ensemble parcouru par $(y_o v, y_1 v, \dots, y_p v)$ qui sera noté T^m . Il est en général différent du produit des T^m_j . On notera R le relèvement associé.

On utilisera la notation : $v_j^\alpha(x) = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $x \in M_j$.

Le cas $\varphi_{\alpha,j}(x,t) \equiv 1$ pour tout (α,j) (espace H^m) a fait l'objet de nombreuses études (cf. (13) (14) (16) et leurs bibliographies). Deux méthodes peuvent être employées :

- l'utilisation de la transformée de Fourier tangentielle qui ramène à l'étude sur R_+ , dépendant d'un paramètre ;
- l'interpolation (14) .

Des espaces singuliers pour lesquels $\varphi_{\alpha,j}(x,t) = t^{\mu(\alpha,j)}$ ont été traités par des méthodes analogues (3) (4) .

Ces méthodes ne s'appliquent pas lorsque la dégénérescence est plus complexe. C'est ce que l'on va étudier ci-dessous, en particulier lorsque les fonctions poids sont :

- soit des fonctions de x seul,
- soit des fonctions de $t^2+|x|^2$ où $|x| = (\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2)^{1/2}$,
- soit des fonctions de $t+b(x)$, $b(x)$ fonction C^∞ de R^{n-1} , et, même parfois, des fonctions plus générales.

Remarquons que des problèmes différents mais aussi singuliers ont été étudiés dans (5) (6) (18) : il s'agit de l'étude des traces des espaces H^m dans des ouverts à bord irrégulier.

Les techniques utilisées sont celles inspirées par les semi-groupes (13) (14), le relèvement étant donné explicitement par un noyau de convolution. On reviendra plus loin sur le détail de ces méthodes.

Les mêmes techniques peuvent s'appliquer à l'étude d'espaces dans des ouverts non bornés (2) (8) (11) , avec dégénérescence à l'infini.

Dans le cas qui nous intéresse (bord régulier, ouvert borné mais fonctions poids singulières), les méthodes ci-dessus ne s'appliquent qu'avec de très notables modifications que l'on va décrire dans le reste de l'exposé.

Remarquons que certains espaces en $\varphi_{\alpha,j}(x,t) = (t^2+|x|^2)^{\mu(\alpha,j)}$ ont été étudiés par A. Kufner (12) du point de vue de la densité des fonctions régulières et des propriétés de dérivées intermédiaires. Mais les traces ne sont pas obtenues. Terminons en remarquant que l'intérêt du problème vient de ce que la régularité des opérateurs naturellement associés à ces espaces commence à être connue (7) (15).

II. ETUDE DE RELATIONS NORMALES

On commence par étudier les espaces $W^m(B_+)$ où $\varphi_{\alpha,j}(x,t) \equiv 0$ pour $\alpha \neq 0$.

1. 1er espace

Soient $\varphi_i(x)$ des fonctions $C^{\infty *}$ de la seule variable x, et considérons l'espace $W^m(B_+)$ suivant :

$$W^m(B_+) = \{v \in \mathcal{D}'(B_+) \ , \ \varphi_o(x)\ v(x,t) \in L^2(B_+) \ , \ \varphi_1(x) \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \in L^2(B_+) \ ,$$

$$\varphi_m(x) \ \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+)\}$$

muni de sa semi-norme naturelle que l'on suppose ici être une norme ($\varphi_o(x) \neq 0$ sur B_o) (B_o borné ou non).

Les résultats sont les mêmes si on a seulement $\varphi_i(x) \in L^\infty_{loc}(B_o)$.

On donne d'abord le résultat pour β infini : les traces des fonctions de $W^m(B_+)$ sont caractérisées par :

THEOREME 1. - Soit $j \leqslant m-1$, la jème trace existe si $M_j = \bigcup_{q>0} \{x, \varphi_{j+q}(x) \neq 0\}$ vérifie : mesure de $M_j \neq 0$.

Soit $p_j^1(x) = \sup \left\{ |\varphi_\ell(x)| \left| \frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2}} \right\}$, l'espace topologique est :

$$\begin{cases} \varphi_\ell(x) \neq 0 \cap \varphi_{j+q}(x) \neq 0 \\ \ell \leqslant j \quad \text{et} \quad q > 0 \ . \end{cases}$$

$T_j^m = \{v_j(x)$ fonctions mesurables sur M_j telles que $p_j^1(x)\ v_j(x) \in L^2(M_j)\}$ avec la semi-norme $\|p_j^1(x)\ v_j(x)\|_{L^2(M_j)}$.

Si β est fini, les traces des fonctions de $W^m(B_+)$ qui, pour tout x, sont à support compact dans $[0,\beta[$ sont caractérisées par :

THEOREME 1 bis. - Soit $j \leqslant m-1$, la jème trace existe si $M_j = \bigcup_{q>0} \{x, \varphi_{j+q}(x) \neq 0\}$ vérifie : mesure de $M_j \neq 0$.

Soit $p_j^2(x) = \sup\limits_{\substack{q>0,\ \ell\leqslant j \\ \varphi_\ell(x)\neq 0 \cap \varphi_{j+q}(x)\neq 0}} \left\{ |\varphi_{j+q}(x)| \ , \ |\varphi_\ell(x)| \left| \frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2}} \right\}$.

$T_j^m = \{v_j(x)$ fonctions mesurables sur M_j telles que $p_j^2(x)\ v_j(x) \in L^2(M_j)\}$ avec la semi-norme $\|p_j^2(x)\ v_j(x)\|_{L^2(M_j)}$.

REMARQUE 1. - En dehors de M_j , il n'existe pas de trace, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de $c > 0$ telle que, pour toute $v \in W^m(B_+)$,

$$|y(x)|^2 \leqslant c \{ \sum_{i=0}^{m} \int_0^{\beta} (\varphi_i(x))^2 \, |\frac{\partial^i v}{\partial t^i}(x,t)|^2 \, dt\} .$$

REMARQUE 2. - Autre expression du poids :

$$|\varphi_\ell(x)| \left|\frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)}\right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2\ell}} = |\varphi_\ell(x)|^{\frac{2q-1}{2j+2q-2\ell}} \, |\varphi_{j+q}(x)|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2\ell}} .$$

2) 2ème espace

Soient $r \in \mathbb{N}$, $b(x)$ une fonction C^∞ , définie sur tout B_o , $b(x) \geqslant 0$ (si $b(x) = |x|^2$, $(t^r+b(x))^{1/2}$ donne, pour $r = 2$, la distance au point O), et considérons l'espace $W^m(B_+)$ suivant : B_o ouvert de R^{n-1} , β fini ou infini.

$$W^m(B_+) = \{v \in \mathscr{D}'(B_+) \, , \, (t^r+b(x))^{\alpha_o} v(x,t) \in L^2(B_+) \, , \, (t^r+b(x))^{\alpha_1} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \in L^2(B_+) \, ,$$
$$(t^r+b(x))^{\alpha_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) \in L^2(B_+) \, , \, \ldots \, , \, (t^r+b(x))^{\alpha_m} \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+)\}$$

où $\alpha_i \geqslant 0$. Les traces des fonctions de $W^m(B_+)$, à support compact dans B_+ , sont données par le théorème 2 ci-dessous. On suppose β fini.

THEOREME 2. - Soit $j \leqslant m-1$.

a) S'il existe $q > 0$ tel que $\alpha_{j+q} < \frac{2q-1}{2r}$, $T_j^m = \{v_j(x) \in L^2(B_o)\}$;

$$\|v_j\|_{T_j^m} = \|v_j\|_{L^2(B_o)} .$$

Sinon :

b) S'il existe $q > 0$ tel que $\alpha_{j+q} = \frac{2q-1}{2r}$, $T_j^m = \{v_j(x)$ fonctions mesurables sur $b(x) \neq 0$, avec $\frac{v_j(x)}{|\text{Log } b(x)|^{1/2}} \in L^2(b(x) \neq 0)\}$

avec $\|v_j\|_{T_j^m} = \|\frac{v_j(x)}{|\text{Log } b(x)|^{1/2}}\|_{L^2(b(x) \neq 0)}$.

c) Si, pour tout $q > 0$, $\alpha_{j+q} > \frac{2q-1}{2r}$, $M_j = \{b(x) \neq 0\}$, et soient

$$p_j^1(x) = \sup_{q>0} \{(b(x))^{\frac{1}{2r}(2r\,\alpha_{j+q} + 1 - 2q)}\}$$

$$p_j^2(x) = \sup_{\substack{q>0 \\ \ell\leqslant j \\ \frac{\alpha_{j+q}-\alpha_\ell}{j+q-\ell} \geqslant \frac{1}{r}}} \{(b(x))^{\alpha_\ell + (j-\ell+\frac{1}{2})\left(\frac{\alpha_{j+q}-\alpha_\ell}{j+q-\ell}\right)}\} .$$

$T_j^m = \{v_j(x)$, <u>fonctions mesurables de</u> $b(x) \neq 0$, <u>telles que</u> $p_j^1(x)\ v_j(x) \in L^2(b(x)\neq 0)$ $p_j^2(x)\ v_j(x) \in L^2(b(x) \neq 0)\}$ <u>avec</u> :

$$\|v_j\|^2_{T_j^m} = \|p_j^1(x)\ v_j(x)\|^2_{L^2(b(x)\neq 0)} + \|p_j^2(x)\ v_j(x)\|^2_{L^2(b(x)\neq 0)} .$$

<u>REMARQUE</u>. - Lorsque les poids sont des puissances de t , on retrouve le fait que les traces, si elles existent, sont dans $L^2(B_o)$ et on retrouve aussi les valeurs critiques des paramètres $\alpha_{j+q} = \frac{2q-1}{2r}$. Ici, on voit que, "en dessous" de cette valeur, on a des traces dans L^2 . Pour la valeur critique, les traces sont "en logarithme". Pour les valeurs plus grandes, les traces sont dans des espaces avec poids sous forme de puissance de $b(x)$. La puissance de $b(x)$ dépend des "pentes" et de la différence des "pentes" des fonctions poids ainsi que des traces des fonctions poids. Dans les deux derniers cas, la trace n'existe que sur $b(x) \neq 0$.

On va appliquer ces méthodes à la démonstration de l'irrégularité de problèmes de Dirichlet.

<u>EXEMPLE ETUDIE</u>. - Soit Ω un ouvert borné de R^n , $\bar{\Omega}$ étant une variété compacte à bord de classe C^∞ , soit ω un ouvert de R^n de bord variété de classe C^∞ , avec $\Omega \subset \omega$ et δ une fonction équivalente à la distance au bord de ω :

$$\omega = \{x \in R^n ,\ \delta(x) > 0\} ,\quad \partial\omega = \{x \quad R^n ,\ \delta(x) = 0\} \qquad d\delta \neq 0 \ \text{sur}\ \partial\omega$$

($d\delta$ = différentielle de δ).

On considère, dans Ω , l'opérateur $Av = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1 \\ |\beta|\leqslant 1}} D^\beta (a_{\alpha\beta}\ \delta\ D^\alpha v) + cv$ où $a_{\alpha\beta}$ et $c \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et on considère le problème de Dirichlet homogène associé en faisant l'hypothèse de coercivité de la forme intégrodifférentielle associée sur l'adhérence $\mathring{V}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace variationnel V :

- si $\bar{\Omega} \subset \omega$, la régularité est connue, l'opérateur étant elliptique.
- si $\Omega = \omega$, la régularité a été étudiée dans [1]. L'opérateur est régulier.

Dans le cas général, ce problème ne peut être traité par aucune des méthodes connues et l'irrégularité n'est pas évidente. Ce problème correspond au cas exceptionnel de l'inégalité de Hardy.

On va construire un contre-exemple explicite : on considère dans Ω , voisinage ouvert de 0 dans $\bar{R}^2_+$, $\delta(x,t) = t+b(x)$, $b(x) \geqslant 0$ et l'opérateur :

$$Av = -\frac{\partial}{\partial t}\left((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial x}\right) + cv \qquad (\text{où } c \in \mathcal{D}(\Omega)) .$$

On va montrer qu'il existe des v dans $\overset{\circ}{V}$ tels que le groupe $\frac{\partial}{\partial t}\left((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ ne se sépare pas.

Pour cela considérons (on généralise un le problème au niveau H^k) :

3) <u>3ème espace</u>

Soit l'espace $W^m(B_+)$ suivant : B_o ouvert de R^{n-1} , β fini :

$$W^m(B_+) = \{v \in L^2(B_+) \ , \ (t+b(x))^{1/2}\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+) \ , \ \frac{\partial}{\partial t}\left((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial t}\right) \in L^2(B_+) \ , \ \ldots ,$$
$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\left((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial t}\right) \in L^2(B_+)\} .$$

<u>THEOREME 3</u>. - <u>L'adhérence des fonctions, à support compact dans</u> B_+ , <u>dans</u> $W^m(B_+)$ <u>a des traces caractérisées par</u> :

i) $\dfrac{v_o(x)}{|\mathrm{Log}\ b(x)|^{1/2}} \in L^2(b(x) \neq 0) \quad , \quad v_o(x) \in L^2(b(x) = 0)$

ii) $|\mathrm{Log}\ b(x)|^{1/2}\, b(x)\, v_1(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \quad , \quad v_1(x) \in L^2(b(x) = 0)$

iii) $|\mathrm{Log}\ b(x)|^{1/2}\, (b(x))^k\, v_k(x) \in L^2(b(x) \neq 0)$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, $v_k(x) \in L^2(b(x) = 0)$, $1 \leqslant k \leqslant m-2$

<u>auxquelles il convient d'adjoindre des relations de liens</u> :

$$\begin{cases} v_o(x) - b(x)\, v_1(x)\, \mathrm{Log}\ b(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \\ k\, v_k(x) + b(x)\, v_{k+1}(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-2 . \end{cases}$$

Le relèvement fait intervenir la totalité des traces sur $b(x) \neq 0$:

$$R(v_o,v_1,\dots,v_{m-1})(x,t) = \chi(t)(v_o(x)+b(x)\ v_1(x) \int_0^t \frac{d\zeta}{\zeta+b(x)} + (v_1(x)+b(x)\ v_2(x))$$

$$\int_0^t \frac{d\zeta}{\zeta+b(x)} + \dots + \frac{1}{(m-2)!}(b(x)\ v_{m-1}(x) + (m-2)\ v_{m-2}(x)) \int_0^t \frac{\zeta^{m-2}d\zeta}{\zeta+b(x)})$$

et sur $b(x) = 0$, $Rv_j(x,t) = \chi(t)\frac{t^j}{j!}v_j(x)$ où $\chi(t) \in \mathcal{D}([0,\beta[)$, $\chi(0) = 1$.

Il s'agit ici d'un espace tel que $T^m \neq \Pi_j T_j^m$. En effet, séparons les espaces T_j^m . Pour ce faire, prenant v_j dans l'espace topologique parcouru par v_j du fait du système ci-dessus, on construit les autres traces en annulant les relations de liens et on vérifie que l'ensemble des traces ainsi déterminé appartient bien à l'espace calculé au-dessus.

PROPOSITION 4. - Les espaces de traces sont (munis de leur norme canonique) :

$T_o^m = \{v_o(x)$, fonctions mesurables sur B_o , $\dfrac{v_o(x)}{|\mathrm{Log}\ b(x)|^{1/2}} \in L^2(b(x) \neq 0)$, $v_o(x) \in L^2(b(x) = 0)\}$,

$T_k^m = \{v_k(x)$, fonctions mesurables sur B_o , $(b(x))^k\ |\mathrm{Log}\ b(x)|^{1/2}\ v_k(x) \in L^2(b(x) \neq 0)$, $v_k(x) \in L^2(b(x) = 0)\}_{1\leq k\leq m-2}$,

$T_{m-1}^m = \{v_{m-1}(x)$, $(b(x))^{m-1}\ |\mathrm{Log}\ b(x)|^{1/2}\ v_{m-1}(x) \in L^2(b(x) \neq 0)\}$.

Revenons à l'irrégularité du problème de Dirichlet précédent : la méthode consiste à construire v à trace nulle telle que $\frac{\partial}{\partial t}((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial t}) \in L^2$ sans que $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2$. On travaille donc sur le relèvement avec v_o nul et on écrit la relation vérifiée par $v_1(x)$.

Contre-exemple explicité. - On considère, pour Ω voisinage ouvert de 0 dans $\bar{R}_+^2$, $\delta(x,t) = t+b(x)$, $b(x) \geqslant 0$ et l'opérateur :

$$Av = -\frac{\partial}{\partial t}((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial x}((t+b(x))\frac{\partial v}{\partial x}) + cv \ .$$

On prend pour contre-exemple : $v(x,t) = \zeta(x,t)\ \varphi(x)\ \mathrm{Log}\ (\frac{t+b(x)}{b(x)})$ où $\zeta(x,t)$ est une fonction C^∞ de troncature au voisinage de 0 . On peut prendre au niveau L^2 : $\{b(x) = x^6$, $\varphi(x) = x^2\}$ ou $\{b(x) = e^{-1/x^2}$, $\varphi(x) = e^{-3/x^2}\}$. On a des résultats analogues au niveau H^k .

4) Passons maintenant au détail des démonstrations. On commence par généraliser l'inégalité de Hardy pour pouvoir calculer les propriétés des fonctions à trace nulle et de dérivées intermédiaires.

A) 2 généralisations de l'inégalité de Hardy

Définitions et notations. - Soit $[a,b]$ un intervalle non vide, a étant éventuellement $-\infty$ et $b+\infty$, et (t) une fonction mesurable, nulle sur un ensemble de mesure nulle, telle que, pour tout intervalle fermé et borné $[c,d]$, $[c,d] \subset]a,b[$, $\int_c^d \frac{dt}{(\varphi(t))^2}$ existe. Si $\int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}$ existe pour tout $a < t < b$, on définit la transformée de φ relative à a, $h_\varphi(t)$ par : $h_\varphi(t) = \dfrac{1}{\varphi(t) \int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}}$.
On peut faire de même en b (soit $H_\varphi(t)$ la transformée).

LEMME 1. - Soient $]a,b[$ un intervalle non vide, fini ou infini, $\varphi(t)$ une fonction mesurable nulle sur un ensemble de mesure nulle telle que, pour tout $a < t < b$, $\int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}$ existe.

Il existe une constante $c > 0$, indépendante de $v, \varphi, a, b,$ telle que pour toute fonction $v \in C^1[a,b]$ avec $\varphi(t) \frac{\partial v}{\partial t}(t) \in L^2[a,b]$.

$$\int_a^b \frac{|v(t)-v(a)|^2 \, dt}{(\varphi(t))^2 \left(\int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}\right)^2} \leqslant c \int_a^b (\varphi(t))^2 \left|\frac{\partial v}{\partial t}(t)\right|^2 dt .$$

Démonstration. - La démonstration se fait par intégrations par parties.

REMARQUE 1. - On a un lemme analogue au point b. Si $\varphi(t) = t^\alpha$, on retrouve les inégalités de Hardy classiques [3] [9].

REMARQUE 2. - On appliquera l'inégalité ci-dessus aux fonctions $t \to \varphi(x,t)$; d'après le calcul ci-dessus, c sera indépendante de x.

REMARQUE 3. - On ne peut pas, en général, calculer h_φ et H_φ mais on peut les encadrer par $c_1 \psi_x(t)$ et $c_2 \psi_x(t)$, où $\psi_x(t)$ dépend de x et c_1 et c_2 sont deux constantes non nulles.

EXEMPLE D'APPLICATION :

PROPOSITION. - Soit $\delta > \frac{1}{2r}$, soient B_o un ouvert de R^{n-1} et $\beta > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute $v \in C^1[[0,\beta[,M_x]$ (où M_x est l'ensemble des fonctions mesurables en x) avec $v(x,\beta) = 0$:

$$\int_{B_o} \left(\int_0^\beta (t^r+b(x))^{2\delta-\frac{2}{r}} |v(x,t)|^2 dt\right) dx \leqslant c \int_{B_o} \left(\int_0^\beta (t^r+b(x))^{2\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right|^2 dt\right) dx .$$

B) Cas de $\varphi(x,t) \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+)$

Espace étudié. - $W^m(B_+)$ est l'espace des fonctions mesurables qui, pour presque tout x, sont dérivables à l'ordre m au sens des distributions et dont les dérivées sont mesurables dans B_+ et qui vérifient les conditions d'annulation en β :

$$v(x,\beta) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,\beta) = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}(x,\beta) = 0 .$$

On munit cet espace de la semi-norme $\left\| \varphi(x,t) \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \right\|_{L^2(B_+)}$. On commence par introduire les $(M_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ où on définira la jème trace.

Notation : $M_n = \{x \in B_o , \displaystyle\int_0^\beta \frac{\sigma^{2m-2j-2} d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2} < \infty\}$ pour $j \leqslant m-1$. Ils vérifient :

$M_o \supset M_1 \supset \dots \supset M_{q-1} \supset M_q \supset M_{q+1} \dots$. Si la mesure de M_o est nulle, il n'y a pas de trace. Si la mesure de M_o est non nulle, on note p le plus grand entier ℓ tel que : mesure $(M_\ell) \neq 0$ (il y a alors au total $(p+1)$ traces).

PROPOSITION 1. - $T_j^m = \{v_j(x)$, fonctions mesurables sur M_j avec

$$\left\| \frac{v_j(x)}{\left(\int_0^\beta \frac{\sigma^{2m-2j-2} d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2}\right)^{1/2}} \right\|_{L^2(M_j)} < \infty \}$$ avec la norme canonique.

PROPOSITION 2. - Soient $L_j = \{(x,t) \in B_+$ tel que

$$\left(\int_t^\beta \int_{\sigma_1}^\beta \int_{\sigma_{m-j-1}}^\beta \frac{\sigma_{m-j}^{m-j} d\sigma_{m-j} \, d\sigma_{m-j-1} \dots d\sigma_1}{(\varphi(x,\sigma_{m-j}))^2}\right)^{1/2} < \infty\} .$$ On pose pour $(x,t) \in L_j$:

$$\psi_j(x,t) = \frac{1}{\left(\int_t^\beta \int_{\sigma_1}^\beta \int_{\sigma_{m-j-1}}^\beta \frac{\sigma_{m-j}^{m-j} d\sigma_{m-j} \, d\sigma_{m-j-1} \dots d\sigma_1}{(\varphi(x,\sigma_{m-j}))^2}\right)^{1/2}}$$. Il existe $c > 0$ telle

que, pour tout $v \in W^m(B_+)$:

$$\int_{L_j} (\psi_j(x,t))^2 \left|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,t)\right|^2 dt\, dx \leqslant c \int_{B_t} (\varphi(x,t))^2 \left|\frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t)\right|^2 dt\, dx .$$

REMARQUE 1. - $M_\ell \times [0,\beta[\subset L_j$ pour tout $j \leqslant m-1$, pour tout $\ell \in [0,q]$.

REMARQUE 2. - Il y a compatibilité entre les dérivées intermédiaire et les traces $\varphi(x,t) \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(M_o \times [0,\beta[)$ et $\psi_j(x,t) \dfrac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,t) \in L^2(M_o \times [0,\beta[)$ impliquent la même relation sur v_o.

C) Séparation des traces

LEMME 2

A) S'il existe $c > 0$ telle que $\forall (x,t) \in B_+$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $|\varphi_{\alpha,j}(x,\frac{t}{r})| \leqslant c\, |\varphi_{\alpha,j}(x,t)|$ il existe une application linéaire et continue P_j de $W^m(B_+)$ dans $W^m(B_+)$ telle que : $\gamma_j(P_j v) = \gamma_j v$, $\gamma_k(P_j v) = 0$ $\forall k \neq j$.

B) S'il existe $c > 0$ telle que $\forall (x,t) \in B_+$, $\forall r \in \mathbb{N}$ avec $(x,rt) \in B_+$, $|\varphi_{\alpha,j}(x,rt)| \leqslant c\, |\varphi_{\alpha,j}(x,t)|$, alors on a la même proposition.

REMARQUE. - B) est aussi vrai pour $M \times [0,s(x)[$ au lieu de B_+, M mesurable de B_o, $s(x) > 0$ (par exemple $M = \{b(x) < 0\}$, $s(x) = |b(x)|$).

D) Démonstration succinte des théorèmes sur les relations normales

On se contente de la donner pour les $\varphi_i(x)$. Voyons d'abord la partie traces. On considère d'abord 2 fonctions $\varphi_\ell(x)$ et $\varphi_m(x)$ et les relations $\varphi_\ell(x) \dfrac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}(x,t) \in L^2$ et $\varphi_m(x) \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2$.

On pose $\omega_\ell(x,t) = \dfrac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}(x,t) - \dfrac{t^{j-\ell}}{(j-\ell)!} \dfrac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0)$.

On peut supposer, d'après le paragraphe C), que v a toutes ses traces (sauf la jème) nulles : $\omega_\ell(x,t)$ a toutes ses traces nulles.

De $\varphi_{j+q}(x) \dfrac{\partial^{j+q-\ell}}{\partial t^{j+q-\ell}}(\omega_\ell(x,t)) \in L^2$, on déduit $\dfrac{\varphi_{j+q}(x)}{t^{j+q-\ell}} \omega_\ell(x,t) \in L^3(\varphi_{j+q}(x) \neq 0 \times]0,\beta[)$ (par applications successsives de A)).

On compare alors $\varphi_\ell(x)$ et $\dfrac{\varphi_{j+q}(x)}{t^{j+q-\ell}}$; soit t_1 tel que les 2 poids soient égaux :

$$t_1 = \left(\frac{|\varphi_{j+q}(x)|}{|\varphi_\ell(x)|}\right)^{\frac{1}{j+q-\ell}} .$$

Le calcul de $c = \int_{\varphi_{j+q}(x)\neq 0 \,\cap\, \varphi_\ell(x)\neq 0} \left(\int_0^{t_1} \frac{t^{2j-2\ell}dt}{((j-\ell)!)^2}\right) |\varphi_\ell(x)|^2 \left|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0)\right|^2 dx$

nous conduit au poids $p_j(x) = \sup\limits_{\substack{\ell\leq j,\, q>0 \\ \varphi_{j+q}(x)\neq 0 \,\cap\, \varphi_\ell(x)\neq 0}} \left\{ |\varphi_\ell(x)| \left|\frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)}\right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2\ell}} \right\}$.

Au niveau du relèvement, on introduit un couple $\{\ell_1 \leq j$ et $q_1 > 0\}$ tel que $\varphi_{\ell_1}(x)$ et $\varphi_{j+q_1}(x)$ donnent le poids principal et on pose :

$$q(x) = \left(\frac{|\varphi_{j+q_1}(x)|}{|\varphi_{\ell_1}(x)|}\right)^{\frac{1}{j+q_1-\ell_1}} .$$

On prend $Rv_j(x,t) = \chi(t/q(x)) \frac{t^j}{j!} v_j(x)$. Puisque β est infini, c'est un relèvement.

On vérifie ensuite toutes les relations en utilisant le fait que, puisque le poids est maximum, on a pour $\ell \leq j$ et $q > 0$:

$$|\varphi_\ell(x)| \left(\left|\frac{\varphi_{j+q_1}(x)}{\varphi_\ell(x)}\right|\right)^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} \leq |\varphi_{\ell_1}(x)| \left(\left|\frac{\varphi_{j+q_1}(x)}{\varphi_{\ell_1}(x)}\right|\right)^{\frac{2j-2\ell_1+1}{2j+2q_1-2\ell_1}}$$

$$|\varphi_{\ell_1}(x)| \left(\left|\frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_{\ell_1}(x)}\right|\right)^{\frac{2j-2\ell_1+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} \leq |\varphi_{\ell_1}(x)| \left(\left|\frac{\varphi_{j+q_1}(x)}{\varphi_{\ell_1}(x)}\right|\right)^{\frac{2j-2\ell_1+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} .$$

La démonstration est analogue pour β fini (on utilise l'annulation en β et on modifie le relèvement).

Les démonstrations pour $(t^r+b(x))^{\alpha_i}$ sont plus délicates mais de même nature.

III. EXEMPLES D'ESPACES DE TRACES

On se placera dans le cadre suivant : $B_o = (]-\mu,+\mu[)^{n-1}$, $\beta > 0$, $B_+ = B_o \times]0,\beta[$, $v \in C^m(\overline{R^n_+})$, supp $v \subset B_1 \cup B_o$.

EXEMPLE 1. - Soit $b(x)$ une fonction C^{∞}, $b(x) \geqslant 0$, et soit $\delta_p \geqslant 0$, $p = 1,2,\dots,n-1$, $\delta_p > \frac{1}{2}-\frac{1}{r}$ ou $\delta_p = 0$.

$$W^1(B_+) = \{v \in L^2(B_+)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+)\ ,\ (t^r+b(x))^{\delta_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \in L^2(B_+)\}\ ,\ p=1,2,\dots,n-1.$$

PROPOSITION 1. - La trace vérifie (on prouvera que ces relations caractérisent la trace) :

A) Il existe $c > 0$ telle que, pour toute $v \in W^1(B_+)$, $\operatorname{supp} v \in B_+ \cup B_o$:

$$\|v_o(x)\|_{L^2(B_o)} \leqslant c\ \|v\|_{W^1(B_+)} .$$

B) Pour tout $p = 1,2,\dots,n-1$, il existe $c > 0$ telle que, pour toute $v \in W^1(B_+)$, $\operatorname{supp} v \in B_+ \cup B_o$:

$$\int_{B_o} \left(\int_0^{\beta} \frac{1}{t^2}\ |v_o(x+t(t^r+b(x))^{\delta_p} e_p) - v_o(x)|^2\, dt\right)dx \leqslant c\ \|v\|^2_{W^1(B_+)} .$$

ABUS DE NOTATION. - Dorénavant, pour alléger les écritures, on remplacera $\leqslant c\ \|v\|_{W^1(B_+)}$ par $< \infty$.

REMARQUE 1. - Le cas $\delta_p = 0$ donne $H^{1/2}$. Le cas $b(x) \equiv 0$ donne l'espace dissymétrique $H^{\frac{1}{2(r\delta_p+1)}}$ où on a noté :

$$H^{s_1,s_2,\dots,s_p} = \{v \in L^2(R^n)\ ,\ (1+\zeta_1^{s_1}+\zeta_2^{s_2}+\dots+\zeta_{n-1}^{s_{n-1}})\ \hat{v}(\zeta) \in L^2(R^n)\} .$$

REMARQUE 2. - La condition $\delta_p > \frac{1}{2}-\frac{1}{r}$ ou $\delta_p = 0$ est toujours vérifiée par $t+b(x)$, $b(x)$ C^{∞}, $b(x) \geqslant 0$ ou par $t^2+|x|^2$. Si cette condition n'est pas vérifiée, les espaces de traces ont une expression différente dépendant de la forme de $b(x)$ (cf. remarques complémentaires à la fin).

EXEMPLE 2. - Soit $b(x)$ une fonction C^{∞}, $b(x) \geqslant 0$ et soit $\delta_p \geqslant 0$, $p = 1,2,\dots,n-1$, $\delta_p > \frac{1}{2}-\frac{1}{r}$ ou $\delta_p = 0$ et $\delta_p > \frac{1}{2r}$;

$$W^m(B_+) = \{v \in L^2(B_+)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+)\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(B_+)\ ,\ (t^r+b(x))^{\delta_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \in L^2(B_+)\ ,$$

$$(t^r+b(x))^{\delta p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_p \partial t} \in L^3(B_+)\ ,\ (t^r+(x))^{\delta_p+\delta_q} \frac{\partial^2 v}{\partial x_p \partial x_q} \in L^2(B_+)\}\ ,$$

$p = 1,2,\dots,n-1$ et $q = 1,2,\dots,n-1$.

PROPOSITION 2

A) La trace v_1 est caractérisée par $v_1 \in L^2(B_o)$ et

$$\int_{B_o} \int_0^\beta \frac{1}{t^2} |v_1(x+t(t^r+b(x))^{\delta_p} e_p) - v_1(x)|^2 \, dt\, dx < \infty \quad \text{pour } p = 1,2,\dots,n-1 .$$

B) Soit $v_o^p = \frac{\partial v_o}{\partial x_p}$. La trace v_o est caractérisée par les propriétés L^2 avec poids : $\{v_o \in L^2(B_o)\ ,\ (b(x))^{\delta_p - \frac{1}{2r}} v_o^p(x) \in L^2(b(x) \neq 0)$ pour tout $p=1,2,\dots,n-1\}$ et les relations intégrales :

i) $$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(t^r+b(x))^{2\delta_p}}{t^2} |v_o^p(x+t(t^r+b(x))^{\delta_q} e_q)-v_o^p(x)|^2 \, dt\, dx < \infty$$

pour tout $p = 1,2,\dots,n-1$ et tout $q = 1,2,\dots,n-1$;

ii) $$\int_{B_o} \int_0^\beta \frac{1}{t^2(t^r+b(x))^{2/r}} |v_o(x+t(t^r+b(x))^{\delta_p} e_p)-v_o(x)|^2 \, dt\, dx < \infty$$

pour tout $p = 1,2,\dots,n-1$.

REMARQUES. - Une remarque générale est que pour les espaces en $t^r+b(x)$, $b(x) \geqslant 0$ (en particulier $t+b(x)$, $b(x) \geqslant 0$ ou $t^2+|x|^2$), l'espace parcouru par le produit des traces est le produit des espaces parcourus par les traces séparément.
Il en est de même pour les espaces en $\varphi_i(x)$.
Sous des conditions autres que : $\{\delta_p > \frac{1}{2}-\frac{1}{r}$ ou $\delta_p = 0$ et $\delta_p > \frac{1}{2r}\}$, les espaces de traces ont une autre expression (cf. remarques complémentaires à la fin).

<u>EXEMPLE 3</u>. - $\{v \in H^m \ , \ (t^r+b(x))^\mu \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \dfrac{\partial^j v}{\partial t^j} \in L^2(B_+) \ , \ |\alpha|+j \leqslant m+k\} \ , \ k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $r\mu \geqslant k$.

Cette dernière hypothèse est faite pour ne pas surcharger l'exemple, ce n'est pas une restriction. Les traces d'ordre j $(j \leqslant m-1)$ (on peut aussi calculer les autres) vérifient les propriétés caractéristiques suivantes :

$$T_j^m = \{v_j \in L^2(B_o) \ , \ v_j^\alpha \in L^2(B_o) \ , \ |\alpha|+j \leqslant m-1 \ ,$$

$$(b(x))^{\frac{1}{2r}(2|\alpha|+2j-2m+2r\mu-2k+1)} v_j^\alpha(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \quad \text{pour} \quad m \leqslant |\alpha|+j \leqslant m+k-1\}$$

avec les relations intégrales :

$$\Big\{ \int_{B_o} \int_0^\beta \frac{1}{\sigma^2} |v_j^\alpha(x+\sigma e_p) - v_j^\alpha(x)|^2 \, d\sigma \, dx < \infty \quad \text{pour} \quad |\alpha|+j = m-1 \quad \text{et}$$

$p = 1,2,\ldots,n-1$

$$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(\sigma^r+b(x))^{2\mu}}{\sigma^2} |v_j^\alpha(x+\sigma e_p)-v_j^\alpha(x)|^2 \, d\sigma \, dx < \infty$$

pour $|\alpha|+j = m+k-1 \Big\}$.

<u>REMARQUE</u>. - Il y a d'autres relations intégrales (surabondantes) sur les dérivées intermédiaires des y (entre y^α où $|\alpha| = m-j-1$ et v_j^α où $|\alpha| = m+k-1$), à savoir :

$$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(\sigma^r+b(x))^{2\mu}}{\sigma^2 (\sigma^r+b(x))^{2/r(m+k)1-|\alpha|-j)}} |v_j^\alpha(x+\sigma e_p)-v_j^\alpha(x)|^2 \, d\sigma \, dx < \infty$$

pour $p = 1,2,\ldots,n-1$.

On voit, sur ces exemples, apparaître la structure des espaces de traces formés par :

A) Des propriétés L^2 avec poids sur les traces et leurs dérivées. Les propriétés L^2 avec poids opèrent sur le domaine où la trace existe et sur les domaines M_j^α où les dérivées des traces sont localement dans L^2 .
<u>Remarque</u> : On a les inclusions : $M_j^\alpha \subset M_j$ et $M_j^\beta \subset M_j^\alpha$ si $\beta > \alpha$.

B) Des relations intégrales sur des couches : $\{M_j \times [0,s_j(x)[\}$; $\{M_j^\alpha \times [0,s_j(x)[\}$ construites sur les M_j et les M_j^α : $s_j^\alpha(x) \leqslant s_j(x)$.

L'accroissement dans une direction donnée est commun à tous les y et les y^α . Si $M_j^\beta = M_j^\alpha$ pour $\beta > \alpha$, les relations intégrales sur les M_j^α ne sont pas indispensables pour définir l'espace (elles sont surabondantes).

On voit comment se généralise la structure des espaces de traces où $\varphi_{\alpha,j} = t^{\mu(\alpha,j)}$ (3) (4) (14) qui était formée de :

- propriétés L^2 avec poids sous la forme $v_\ell \in L^2(B_o)$ ou $v_\ell^\alpha \in L^2(B_o)$, $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$;
- des relations intégrales sur les dérivées v_ℓ^α (éventuellement) de la forme :
$$\int_{R^{n-1}} \int_0^\beta \frac{1}{t^{2s+1}} \, |v_\ell^\alpha(x+te_p)-v_\ell^\alpha(x)|^2 \, dt \, dx < \infty$$ où $s = s_{\ell,\alpha,p}$, α étant le plus grand multi-indice tel que $v_\ell^\alpha \in L^2(B_o)$.

Ceci est en particulier le cas des espaces H^s $(s \in \mathbb{N})$ et de leurs traces.

IV. TRACES D'ESPACES DE SOBOLEV. METHODES

1) Décomposition de v

On se place dans le cadre suivant : $B_+ = B_o \times]0,\beta[$ avec $B_o = (]-\mu,+\mu[)^{n-1}$ 0 . Les fonctions v considérées vérifieront : $v \in C^m(\overline{R^n_+})$, supp $v \in B_+ \cup B_o$. Les espaces de traces sont définis par des propriétés L^2 avec poids et par des relations intégrales. Sauf exceptions (cf. remarques complémentaires à la fin), les propriétés L^2 avec poids résultent du II.
Voyons les relations intégrales : on commence par décomposer toute fonction v sous la forme de la somme d'une fonction à traces nulles et d'une fonction des traces. Ceci s'effectue au-dessus de chaque N_k où N_k est une partition convenable de la base B_o .

<u>EXEMPLE</u>. - Si on a une seule relation normale : $\varphi(x,t) \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2$, on introduit M_o où existe v_o et M_j où existe la trace v_j . On a les relations :

$$B_o \supset M_o \supset M_1 \supset \ldots \supset M_j \supset \ldots \supset M_r \supset M_{r+1} \supset \ldots \supset M_p \ .$$

On introduit les ensembles $N_o = B_o - M_o$, $N_1 = M_o - M_1$, ... , $N_r = M_r - M_{r+1}$ et on prend les décompositions : $v(x,t) = (v(x,t)) + 0$ sur N_o ,
$v(x,t) = (v(x,t)-v(x,0)) + (v(x,0))$ sur N_1 jusqu'à :

$$\begin{aligned} v(x,t) = {} & \left(v(x,t)-v(x,0)-t\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) - \ldots - \frac{t^r}{r!}\frac{\partial^r v}{\partial t^r}(x,0)\right) \\ & + \left(v(x,0)+t\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) + \ldots + \frac{t^r}{r!}\frac{\partial^r v}{\partial t^r}(x,0)\right) \quad \text{sur } N_r \ . \end{aligned}$$

Soit $v(x,t) = \omega(x,t) + L(x,t)$ une décomposition où $\omega(x,t)$ est une fonction à traces nulles et $L(x,t)$ une fonction des traces.

2) Le lemme intégral

HYPOTHESES. - On se place dans R^n_+ . Soient M un ensemble mesurable de R^{n-1} et $s(x)$ une fonction mesurable sur M , $s(x) > 0$ (M peut être et $s(x) = +\infty$).
Soit $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ la base de R^n .
Soient $\varphi(x,t)$ et $\psi_p(x,t)$ deux fonctions mesurables dans R^n_+ . On suppose que, parmi les semi-normes qui définissent l'espace, figurent les relations :

$$\begin{cases} \varphi(x,t) \dfrac{\partial^q v}{\partial t^q}(x,t) \in L^2(B_+) \\ \psi_p(x,t) \dfrac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta}(x,t) \in L^2(B_+) \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1 \ . \end{cases}$$

On considère une décomposition de v : $v(x,t) = \omega(x,t) + L(x,t)$.

Soient $h_p(x,t)$ et $\nu(x,t)$ deux fonctions à valeurs réelles, définies sur $M \times \left]0,s(x)\right[$ avec, de plus, $\nu(x,t) > 0$.

LEMME 3

. On suppose que le changement de variable :

$$S = x + \zeta h_p(x,t)e_p, T = t \qquad (1)$$

est possible avec un jacobien uniformément borné par rapport à ζ où $|\zeta| \leqslant 1$.

. On suppose qu'il existe $c > 0$ telle que, pour tout (x,t,ζ) , $x \in M$, $t \in [0,s(x)]$, $|\zeta| \leqslant 1$:

$$\begin{cases} \nu(x,t) \leqslant c\ \nu(x+\zeta h_p(x,t),t) & (2) \\ \psi_\ell(x,t) \leqslant c\ \psi_p(x+\zeta h_p(x,t),t) & (2)' \end{cases}$$

$\nu(x,t)$ et $h_p(x,t)$ vérifiant : $\nu(x,t)(h_p(x,t))^{2\beta} \leqslant c(\psi_p(x,t))^2$ pour $(x,t) \in M \times [0,s(x)]$ (3) .

. On suppose que pour c' indépendante de $(x,\mu) \in \mathrm{Im}_\zeta\ (M \times [0,s(x)])$ (Im_ζ = image par le difféomorphisme relatif à ζ) :

$$\int_0^\mu \nu(x,t)\ |\omega(x,t)|^2\ dt \leqslant c' \int_0^\mu (\varphi(x,t))^2 \left|\frac{\partial^q v}{\partial t^q}(x,t)\right|^2 dt \quad (4) .$$

. On suppose les relations de dérivées intermédiaires : pour $r \in [1,\beta-1]$, il existe $c'' > 0$ telle que pour toute fonction v :

$$\int_M \left(\int_0^{s(x)} (x,t)(h_p(x,t))^{2r} \left|\frac{\partial^r v}{\partial x_p^r}(x,t)\right|^2 dt\right)dx$$

$$\leqslant c'' \left\{\int_{B_+} (\quad (x,t))^2 \left|\frac{\partial^q v}{\partial t^q}(x,t)\right|^2 dt\ dx\right.$$

$$\left. + \int_{B_+} (\psi_p(x,t))^2 \left|\frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta}(x,t)\right|^2 dt\ dx\right\} \quad (5)$$

alors il existe $c_1 > 0$ telle que pour tout $v \in C^m(R_+^n)$, supp $v \in B_+ \cup B_o$:

$$\int_M \left(\int_0^{s(x)} \nu(x,t)\ |L(x+h_p(x,t)e_p,t) - L(x,t)|^2\ dt\right)dx$$

$$\leqslant c_1 \left\{\int_{B_+} (\quad (x,t))^2 \left|\frac{\partial^q v}{\partial t^q}(x,t)\right|^2 dt\ dx\right.$$

$$\left. + \int_{B_+} (\psi_p(x,t))^2 \left|\frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta}(x,t)\right|^2 dt\ dx\right\} \quad (6) .$$

3) Exemple d'application

On démontre, sur l'exemple 2, pour v_o , la relation :

$$\int_{B_o}\int_0^{\beta} \frac{1}{t^2(t^r+b(x))^{2/r}} \left|v_o(x+t(t^r+b(x))^{\delta_p} e_p) - v_o(x)\right|^2 dt\, dx < \infty .$$

On peut, par le critère de séparation, supposer v_1 nul. On pose, avec les notations précédentes :

$$\omega(x,t) = v(x,t) - v(x,0) \quad , \quad L(x,t) = v(x,0)$$

$$\nu(x,t) = \frac{1}{t^2(t^r+b(x))^{2/r}} \quad , \quad h_p(x,t) = t(t^r+b(x))^{\delta_p} .$$

Vérifions alors chaque hypothèse :

(1) (2) (2)' résultent de l'hypothèse $\delta_p > \frac{1}{2}-\frac{1}{r}$; (3) est évident ; (4) résulte du fait que $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2$ et $v_1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega(x,t)}{t^2} \in L^2$; (5) résulte du fait que l'on a la formule de dérivée intermédiaire $(t^r+b(x))^{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L^2 \Rightarrow (t^r+b(x))^{\delta-\frac{1}{r}} \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2$ car $\delta > \frac{1}{2r}$.

4) Lemmes à l'ordre 1 (ces lemmes sont des applications du lemme précédent)

LEMME 4. - Soit un espace $\{\varphi_o(x,t)\, v(x,t) \in L^2(B_+)$, $\varphi(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \in L^3(B_+)$, $\varphi_p(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t) \in L^2(B_+)\}$ et $s(x) > 0$ mesurable et $M \subset \{x \in B_o$, $\int_0^t \frac{d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2}$ existe pour tout $t \in [0,s(x)]\}$.

On suppose que $h_p(x,t) = \frac{\psi_p(x,t)}{h_p(x,t)}$ et que :

i) le changement de variable $X = x+\zeta_p h_p(x,t) e_p , T = t$ est possible avec un jacobien borné uniformément par rapport à ζ_p avec $|\zeta_p| \leqslant 1$;

ii) il existe $c > 0$ telle que, pour tout (x,t,ζ) , $x \in M$, $t \in [0,s(x)]$, $|\zeta| \leqslant 1$:

$$\begin{cases} h\varphi(x,t) \leqslant c\, h\varphi(x+\zeta h_p(x,t),t) \\ \psi_p(x,t) \leqslant c\, \psi_p(x+\zeta h_p(x,t),t) \end{cases}$$

(ce qui implique d'abord que $h\varphi(x+\zeta h_p(x,t),t)$ existe) alors il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout v, $v \in W^1(B_+)$, et si $v_o(x) = v(x,0)$:

$$\int_M \left(\int_0^{s(x)} (h\varphi(x,t))^2 \left|v_o\left(x+\frac{\psi_p(x;t)}{h\varphi(x,t)} e_p\right) - v_o(x)\right|^2 dt\right) dx$$

$$\leqslant c \left\{ \int_{B_+} (\varphi(x,t))^2 \left|\frac{\partial^q v}{\partial t^q}(x,t)\right|^2 dt\, dx \right.$$

$$\left. + \int_{B_+} (\psi_p(x,t))^2 \left|\frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta}(x,t)\right|^2 dt\, dx \right\} .$$

LEMME 5. - Soit un espace $\{\varphi_o(x,t)\, v(x,t) \in L^2(B_+)$, $\varphi(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \in L^2(B_+)$, $\varphi_p(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t) \in L^2(B_+)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1\}$.

Soit M un ensemble mesurable, $M \subset B_o$, $s(x)$ une fonction mesurable définie sur M, $s(x) > 0$ sur M et $\nu(x,t) > 0$ une fonction sur $M \times [0,s(x)]$, $h_p(x,t)$ une fonction sur $M \times [0,s(x)]$ à valeurs réelles.

On suppose :

i) que le changement de variable $X = x+\zeta h_p(x,t), T = t$ est possible avec un jacobien borné uniformément par rapport à ζ où $|\zeta| \leqslant 1$ (1) ;

ii) qu'il existe $c_1 > 0$ telle que pour tout (x,t,ζ), $x \in M$, $t \in [0,s(x)]$, $|\zeta| \leqslant 1$:

$$\nu(x,t) \leqslant c_1\, \nu(x+\zeta h_p(x,t),t) \qquad (2)$$

$$|\varphi_p(x,t)|^2 \leqslant c_1\, |\varphi_p(x+\zeta h_p(x,t),t)| \qquad (2)'$$

$\nu(x,t)$ et h_p vérifiant : $\nu(x,t)\,(h_p(x,t))^2 \leqslant c_1(\varphi_p(x,t))^2$ (3) .

iii) On suppose que pour c_2 indépendante de $x,t,s(x)$:

$$\int_0^{s(x)} \nu(x,t) \left|\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x,\sigma)d\sigma\right|^2 dt \leqslant c_2 \int_0^{s(x)} (\varphi(x,t))^2 \left|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right|^2 dt \qquad (4)$$

alors il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour toute fonction $v \in C^1(\overline{R^n_+})$, supp $v \subset B_+ \cup B_o$ et si $v_o(x) = v(x,0)$:

$$\int_M \int_0^{s(x)} \nu(x,t)\ |v_o(x+h_p(x,t)e_p) - v_o(x)|^2\ dt\ dx$$

$$\leqslant \quad c_3\ \{\int_{B_+} (\varphi(x,t))^2\ |\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)|^2\ dt\ dx$$

$$+ \quad \int_{B_+} (\varphi_p(x,t))^2\ |\frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t)|^2\ dt\ dx\ \} \quad .$$

<u>REMARQUE</u>. - On en déduit les propriétés des traces de nombreux espaces d'ordre 1 . En effet, sous les hypothèses ci-dessus, la trace $v_o(x)$ vérifie sur $M_o = \{x \in B_o\ ,\ \int_0^\beta \frac{d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2} < \infty\}$ les propriétés suivantes :

i) $$\frac{v_o(x)}{\left(\int_0^\beta \frac{d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2}\right)^{1/2}} \in L^2(M_o) \quad .$$

ii) Si $(\omega(x,t))^2 = \inf\ \{(\varphi_o(x,t))^2, (h_\varphi(x,t))^2\}$,

$$\int_{M_o} \left(\int_0^\beta (\omega(x,t))^2 dt\right) |v_o(x)|^2 dx < \infty \ .$$

Cette relation s'obtient en écrivant : $v(x,0) = v_o(x) = v(x,0)-v(x,t)+v(x,t)$ et en utilisant les relations : $\varphi_o(x,t)\ v(x,t) \in L^2(M_o \times [0,\beta])$ et $h\varphi(x,t)\,(v(x,t)-v(x,0)) \in L^2(M_o \times [0,\beta])$.

iii) La relation intégrale ci-dessus pour $s(x)$ convenable.

<u>EXEMPLE</u>

i) Soit l'espace $\{ v \in L^2(B_+)\ ,\ |x|^{2\alpha_n} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+)\ ,\ |x|^{2\alpha_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \in L^2(B_+) \}$, $p = 1,2,\dots,n-1$, muni de sa norme canonique avec : $\alpha_n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_p \in \mathbb{N}$, et $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

ii) La trace vérifie : elle existe sur $|x| \neq 0$ et $|x|^{\alpha_n} v_o(x) \in L^2(|x| \neq 0)$. De plus, on a les relations intégrales :

$$\int_{|x|\neq 0} \int_0^{s(x)} \frac{|x|^{4\alpha_n}}{t^2}\ |v_o(x+t|x|^{2\alpha_p-2\alpha_n} e_p) - v_o(x)|^2\ dt\ dx \quad < \infty \quad \text{pour tout}$$

$p = 1,2,\dots,n-1$ où $s(x) = |x|^{2\alpha_n}$ ($t = s(x)$ est la couche suivant laquelle on tronque : $\{v \in L^2 , |x|^{2\alpha_n} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2\}$ (cf. II, 4), D)). La vérification des hypothèses nous conduit à l'hypothèse (H) : pour tout $p = 1,2,\dots,n-1$, $\alpha_p \neq 0$.

iii) On verra que, sous cette hypothèses (H), les relations ci-dessus caractérisent la trace.

UN EXEMPLE D'ESPACE DE SOBOLEV

Espace étudié. - On considère l'espace de Sobolev avec poids défini par : $r \in \mathbb{N}$, $b(x)$ est une fonction C^∞, $b(x) \geqslant 0$ définie sur R^{n-1} et :

$$W^m(B_+) = \{v \in \mathcal{D}'(B_+) ,\ (t^r+b(x))^{\alpha_o} v(x,t) \in L^2(B_+) ,\ (t^r+b(x))^{\alpha} \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+) ,$$
$$(t^r+b(x))^{\alpha_p} \frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t) \in L^2(B_+)\} .$$

Si $b(x) \equiv 0$, on prend $B_+ = R^n_+$ et on a affaire à un espace de trace H^s dissymétrique. La valeur limite pour qu'il y ait une trace est $\alpha = \frac{2m-1}{2r}$; si $\alpha \geqslant \frac{2m-1}{2r}$, il n'y a pas de trace ; si $\alpha < \frac{2m-1}{2r}$, il y a une trace v_o dans $L^2(B_o)$.
Les propriétés L^2 avec poids des traces sont : $v_\ell \in L^2(B_o)$ si $\ell < \frac{2m-2r\alpha-1}{2}$.
Les espaces de traces sont obtenus en complétant les propriétés L^2 avec poids par les relations intégrales :

$$\int_{R^{n-1}} \int_0^\infty \frac{t^{2r\alpha}\, t^{2\ell}}{t^{2m}} |v_\ell(x+t^{m+r\alpha_p-r\alpha} e_p) - v_\ell(x)|^2 \, dt\, dx < \infty \quad \text{pour } p=1,2,\dots,n-1$$

Si $b(x)$ est quelconque, on prend B_+ petit voisinage de 0 et on introduit les quantités :

$$\nu(x,t) = \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha}}{t^{2m}} ,\quad \nu_\ell(x,t) = \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha}\, t^{2\ell}}{t^{2m}} ,\quad h_p(x,t) = t^m(t^r+b(x))^{\alpha_p-\alpha}$$

et on pose : hypothèse H_1 : $\alpha_p > \alpha + \frac{1}{2} - \frac{m}{r}$ ou $\alpha_p = \alpha$ (cela correspond à la relation (1) du lemme intégral). Dans le cas particulier où $b(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^{\mu_i}$ où $\mu_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \geqslant 0$, on introduit l'hypothèse H_2 : $\frac{m}{r} + \alpha_p - \alpha - \frac{1}{\mu_p} > 0$ ou $\alpha_p = \alpha$.

On a alors :

THEOREME 4. - Sous l'hypothèse H_1 (resp. H_2 si $b(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^{\mu_i}$ où $\alpha_i \geqslant 0$ et $\mu_i \in \mathbb{N}$) :

a) Si $\alpha < \frac{2m-2\ -1}{2r}$, la trace v_ℓ est caractérisée par :

$$v_\ell \in L^2(B_o) \quad \text{et} \quad \int_{B_o} \int_0^\beta \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha}\, t^{2\ell}}{t^{2m}} \, |v_\ell(x+t^m(t^r+b(x))^{\alpha_p-\alpha} e_p)-v_\ell(x)|^2 dtdx < \infty$$

pour $p = 1,2,\ldots,n-1$.

b) Si $\alpha \geqslant \frac{2m-2\ -1}{2r}$

i) si $\alpha - \alpha_o < \frac{m}{r}$, la trace v_ℓ est caractérisée par :

$$(b(x))^{\frac{1}{2r}(2r\alpha+2\ell-2m+1)} v_\ell(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \quad \text{et}$$

$$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{(b(x))^{\frac{1}{r}}} \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha}\, t^{2\ell}}{t^{2m}} \, |v_\ell(x+t^m(t^r+b(x)^{\alpha_p-\alpha} e_p)-v_\ell(x)|^2 dtdx < \infty$$

pour $p = 1,2,\ldots,n-1$;

ii) si $\alpha - \alpha_o \geqslant \frac{m}{r}$, la trace v_ℓ est caractérisée par :

$$(b(x))^{\alpha_o+(\ell+\frac{1}{2})(\frac{\alpha-\alpha_o}{m})} v_\ell(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \quad \text{et}$$

$$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{(b(x))^{\frac{\alpha-\alpha_o}{m}}} \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha}\, t^{2\ell}}{t^{2m}} \, |v_\ell(x+t^m(t^r+b(x))^{\alpha_p-\alpha} e_p)-v_\ell(x)|^2 dtdx < \infty$$

pour $p = 1,2,\ldots,n-1$.

V. RELEVEMENT DES ESPACES DE TRACES

1) Formule de relèvement

Etant donnée y définie sur M_j , on la prolonge par 0 hors de M_j et hors de B_o . On

On prend pour formule de relèvement : $Rv_j(x,t) = \mu(x,t) \frac{t^j}{j!} \int_{R^{n-1}} R(\zeta) v_j(x+\zeta H(x,t),t) d\zeta$

où $\left\{\begin{array}{l} \mu(x,t) \text{ est une fonction de troncature} \\ R(\zeta) \in \mathcal{D}((]-1,+1[)^{n-1}) \text{ , } R(\zeta) \text{ réelle, } \int_{R^{n-1}} R(\zeta)d\zeta = 1 \\ H(x,t) = (H_1(x,t),H_2(x,t),\ldots,H_{n-1}(x,t)) \text{ , } H_i(x,t) \in R \text{ .} \end{array}\right.$

2) Méthode

Le point essentiel, au niveau du relèvement, est que les relèvements avec noyaux soient : $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} H_i(x,t)} \int_{R^{n-1}} R(\frac{\eta_i - x_i}{H_i(x,t)})\, \omega(\eta)\, d\eta$ où $R(\zeta) = R(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_{n-1})$ vérifie : $R(\zeta) \in \mathcal{D}((]-1,+1[)^{n-1})$, $\int_{R^{n-1}} R(\zeta)d\zeta = 1$, ont des dérivées qui peuvent se mettre sous plusieurs formes différentes (en fait, déduites les unes des autres par intégrations par parties). On pourra donc, compte tenu des expressions des traces ci-dessus, utiliser telle ou telle de ces expressions après avoir découpé B_+ en zones.

EXEMPLE D'EXPRESSIONS DIFFERENTES DES DERIVEES DU RELEVEMENT. - La dérivée par rapport à x_ℓ peut s'écrire :

- soit

$$-\sum_{p=1}^{n-1} \frac{\frac{\partial}{\partial x_\ell}(H_p(x,t))}{H_p(x,t)} \int_{R^{n-1}} P_p(\zeta)\omega(x_i+\zeta_i H_i(x,t)d\zeta - \frac{1}{H_\ell(x,t)}\int_{R^{n-1}} P^\ell(\zeta)\omega(x_i+\zeta_i H_i(x,t))d\zeta$$

où $P_p(\zeta)$ dépend de ζ et de p , $P_p(\zeta) \in \mathcal{D}((]-1,+1[)^{n-1})$, supp $P_p(\zeta) \subset$ supp $R(\zeta)$, $\int_{R^{n-1}} P_p(\zeta)d\zeta = 0$ (mêmes propriétés pour $P^\ell(\zeta)$) (on pourra donc remplacer $\int_{R^{n-1}} P_p(\zeta)\omega(x_i+\zeta_i H_i(x,t))d\zeta$ par $\int_{R^{n-1}} P_p(\zeta)(\omega(x_i+\zeta_i H_i(x,t))-\omega(x_i))d\zeta)$;

- soit $\sum_{r=1}^{n-1} \int_{R^{n-1}} R(\zeta)\zeta_p \frac{\partial}{\partial x_\ell}(H_r(x,t) \frac{\partial\omega}{\partial x_p}(x_i+\zeta_i H_i(x,t))d\zeta + \int_{R^{n-1}} R(\zeta) \frac{\partial\omega}{\partial x_\ell}(x_i+\zeta_i H_i(x,t))d\zeta$

où, si on pose $Q_\ell(\zeta) = R(\zeta)\zeta_\ell$, $Q_\ell(\zeta) \in \mathcal{D}((]-1,+1[)^q)$, supp $Q_\ell(\zeta) \subset$ supp $R(\zeta)$, $\int_{R^q} Q_\ell(\zeta)d\zeta$ quelconque.

On a plus généralement :

Formules de dérivation des relèvements

LEMME 6. - Soit un relèvement précédent : $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} H_i(x,t)} \int_{R^{n-1}} R\left(\dfrac{\eta_i - x_i}{H_i(x,t)}\right) \omega(\eta)\, d\eta$.

a) Si on fait porter toutes les dérivations sur le noyau, une dérivée d'ordre $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ se présente sous la forme d'une combinaison linéaire de termes en :

$$\frac{1}{(H_1(x,t))^{\beta_1}(H_2(x,t))^{\beta_2}\ldots(H_q(x,t))^{\beta_{n-1}}} \; \frac{\prod_{i=1}^{n-1} D^{\mu_i}(H_{r_i}(x,t))}{\prod_{i=1}^{s} H_{r_i}(x,t)}$$

$$\int_{R^{n-1}} R_{\alpha,\beta,\mu_i}(\zeta)\; \omega(x_i+\zeta_i H_i(x,t))\, d\zeta$$

où $\beta_1 \leq \alpha_1$, $\beta_2 \leq \alpha_2$, ... , $\beta_{n-1} \leq \alpha_{n-1}$, $\int_{R^{n-1}} R_{\alpha,\beta,\mu_i}(\zeta)\, d\zeta = 0$ sauf si $\alpha = 0$,
$\sum_{i=1}^{s} \mu_i \leq \alpha$, $s + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \leq |\alpha|$.

b) Si on fait porter toutes les dérivations sur ω , une dérivée d'ordre $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ se présente sous la forme d'une combinaison linéaire de termes en :

$$\sum_{i=1}^{s} D^{\mu_i}(H_{r_i}(x,t)) \int_{R^{n-1}} R_{\mu_i}(\zeta)\; \frac{\partial\beta'}{\partial x\beta'}\, \omega(x_i+\zeta_i H_i(x,t))\, d\zeta$$

avec $|\beta'| \leq |\alpha|$, $\int_{R^{n-1}} R_{\mu_i}(\zeta)\, d\zeta$ de valeur quelconque, $\sum_{i=1}^{s} \mu_i \leq \alpha$, $s \leq |\alpha|$.

REMARQUE. - Pour avoir le cas général, on combine ces 2 formules.

On a besoin aussi de la majoration de certaines expressions :

LEMME 7

a) Soit $b(x)$ une fonction C^∞ , $b(x) \geq 0$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $\chi(t) \in \mathcal{D}([0,1[)$, $\chi(t) \equiv 1$ sur $[0,\frac{1}{2}[$; il existe une constante $c > 0$, dépendant de (α', α_n) , telle que, pour tout $(x,t) \in B_+$:

$$\left| \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial t^{\alpha_n}} \left(\chi(t^r/(b(x))\nu) \right) \right| \leqslant \frac{c}{(b(x))^{\alpha_n \nu/r + |\alpha'|/2}} .$$

b) <u>Soit</u> $b(x)$ <u>une fonction</u> C^∞ , $b(x) \geqslant 0$ <u>et</u> $\mu > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$; <u>il existe une constante</u> $c > 0$, <u>dépendant de</u> (α',α_n) , <u>telle que, pour tout</u> $(x,t) \in B_+$:

$$\left| \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial t^{\alpha_n}} \left(\frac{t}{(t^r+b(x))^\nu} \right) \right| \leqslant c \ (t^r+b(x))^{\mu/r - \nu - |\alpha'|/2 - \alpha_n/r} .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour établir ces majorations, on utilise une récurrence et le fait que, si $|\mu_i| = 1$, $|D^{\mu_i} b(x)| \leqslant c(b(x))^{1/2}$ ( ) . Illustrons par un exemple la technique de relèvement. On prend le cas de la trace v_o de l'exemple 2 et le relèvement $Rv_o(x,t) = \chi(t) \int_{R^{n-1}} R(\zeta)\ v_o(x+\zeta H(x,t))d\zeta$.

On décompose B_+ en $t < (b(x))^{1/r}$ et $t > (b(x))^{1/r}$.

Pour $t > (b(x))^{1/r}$, on procède par dérivation sur R ce qui conduit à des termes majorés par :

$$\|v_o\|_{L^2(B_o)} \quad \text{et} \quad \int_{B_o} \int_0^\beta \frac{1}{t^2(t^r+b(x))^{2/r}} \left| v_o(x+t(t^r+b(x))^\delta) - v_o(x) \right|^2 dt\, dx ,$$

relations qui figurent dans l'espace de trace, et, pour $t < (b(x))^{1/r}$, on procède en faisant porter les dérivations une fois sur v_o ce qui conduit à :

$$\|v_o\|_{L^2(B_o)} \ ; \ \left\| (b(x))^{\delta - \frac{1}{2r}} \frac{\partial v_o}{\partial x_p} \right\|_{L^2(b(x)\neq 0)} , \quad p = 1,2,\dots,n-1 \quad \text{et}$$

$$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(t^r+b(x))^{2\delta}}{t^2} \left| v_o^p(x+t(t^r+b(x))^\delta) - v_o^p(x) \right|^2 dt\, dx ,$$

autres relations de l'espace de trace.

<u>REMARQUES COMPLEMENTAIRES</u>

A) La restriction $r\delta > \frac{1}{2}$ dans l'exemple 2 est effective puisque, par exemple, l'espace $\{v \in L^2(B_+)$, $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+)$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(B_+)$, $(t+b(x))^\delta \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(B_+)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $(t+b(x))^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t} \in L^2(B_+)$, $(t+b(x))^{2\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leqslant v,j \leqslant n-1\}$

a pour traces :

. si $\delta < \frac{1}{2}$: $\{v_o \in L^2(B_o)$, $\frac{\partial v_o}{\partial x_i} \in L^2(B_o)$, $1 \leq i \leq n-1$,

$$\int_{B_o} \int_0^{\beta} \frac{(t+b(x))^{2\delta}}{t^2} \left|\frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x+t(t+b(x))^{\delta} e_p) - \frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x)\right|^2 dt\, dx < \infty$$

pour tous $1 \leq i,p \leq n-1\}$.

. si $\delta = \frac{1}{2}$: $\{v_o \in L^2(B_o)$, $\frac{\partial v_o}{\partial x_i} \in L^2(B_o)$, $1 \leq i \leq n-1$,

$$\int_{b(x)\neq 0} \int_0^{b(x)} \frac{(t+b(x))}{t^2} \left|\frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x+t(t+b(x))^{1/2} e_p) - \frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x)\right|^2 dt\, dx < \infty$$

pour tous $1 \leq i,p \leq n-1\}$.

B) On peut aussi obtenir, dans certains cas, les traces dans le théorème 4 dans les cas où les hypothèses H_1 (resp. H_2) ne sont pas vérifiées ou dans le cas des coefficients exceptionnels ($\alpha = \frac{2m-2\ell-1}{2r}$) . Il apparaît des propriétés L^2 avec poids supplémentaires et une modification des couches d'intégration. Voyons un exemple dans R_+^2 au voisinage de 0 :

$\{v \in L^2(B_+)$, $(t+x^2)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+)$, $\frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(B_+)\}$ a pour trace : $v_o \in L^2$,

$$\int_{|x|\neq 0} \int_0^{x^2} \frac{(t+x^2)}{t^2} \left|v_o\left(x+\frac{t}{(t+x^2)^{1/2}} e_p\right) - v_o(x)\right|^2 dt\, dx < \infty \qquad \text{pour tout}$$

$p = 1,2,\ldots,n-1$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rational Mech. Anal. 34 n°5 (1969), 361-379.

(2) J. BARROS NETO : Inhomogeneous boundary value problems in a half space, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1965), 331-365.

(3) P. BOLLEY et J. CAMUS : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Rennes (1968), 1-68.

(4) P. BOLLEY et J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables, Bull. Soc. Math. Francs, Mémoire 34 (1973), 55-140.

(5) P. GRISVARD : Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. J. Math. Pures Appl. 45 (1966), 143-190.

(6) P. GRISVARD : Théorèmes de traces relatifs à un polyèdre, C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), série A, 1518-1583.

(7) V. V. GRUŠIN : Hypoelliptic differential equations and pseudo-differential operators with operator symbols, Mat. Sb. 88 (130) (1972) n°4.

(8) B. HANOUZET : Problèmes aux limites elliptiques dans des ouverts non bornés, Colloque d'Analyse Fonctionnelle, Bordeaux (1971), Bull. Soc. Math. France, Mémoire 31-32 (1972), 191-199.

(9) G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYÀ : Inequalities, Cambridge Univ. Press (1959).

(10) L. HORMANDER : Linear partial differential operators, Springer Verlag (1964).

(11) L. D. KUDRYACEV : Imbedding theorems for functions defined on unbounded regions, Soviet. Math. Dokl. 4 (1963), 1715-1717.

(12) A. KUFNER : Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungs Funktion, Czekoslovak Math. J. 15 (90) (1965), 597-620.

(13) J. L. LIONS : Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal (été 1962).

(14) J. L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod Paris (1968) volume I.

(15) C. MATTERA : Régularité pour des problèmes elliptiques singuliers, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 24 février 1976.

(16) J. NEČAS : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson Paris (1967).

(17) L. SCHWARTZ : Théorie des distributions, Hermann Paris (1950).

(18) G. N. YAKOVLEV : The Dirichlet problem for domains with non liptschitzian boundaries, Differentcial'nye Uravneija 1 n°8 (1965), 1085-1098.

ECOLE POLYTECHNIQUE
Centre de Mathématiques

91128 PALAISEAU Cedex