JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES ROLLAND

Hypoellipticité partielle pour des opérateurs elliptiques et dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1976), p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976____A14_0>

HYPOELLIPTICITE PARTIELLE POUR DES OPERATEURS

ELLIPTIQUES ET DEGENERES

par

Jacques ROLLAND

On se propose d'étudier l'hypoellipticité partielle (i.e l'hypoellipticité à partir d'un espace de distributions C^∞ dans la direction normale) d'une classe d'opérateurs satisfaisant une certaine propriété de quasi homogénéité.

Soient $L(t, D_x, D_t)$ les opérateurs définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par :

$$L(t,D_x,D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ k+qj+q'|\alpha| \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}\, t^{k+q'|\alpha|+qj}\, D_x^\alpha\, D_t^j$$

où : $m \in \mathbb{N}$, $q > 0$, $q' \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $k + q\,m \in \mathbb{N}$ et $k + q'm \in \mathbb{N}$ et $a_{\alpha j} \in \mathbb{C}$. Leurs symboles $L(t,\xi,\tau)$ vérifient la propriété de quasi homogénéité suivante :

$$L(\frac{t}{\lambda} ;\ \lambda^{q'}\xi,\ \lambda^q\tau) = \lambda^{-k}\, L(t;\xi,\tau)$$

pour tout $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\tau \in \mathbb{R}$.

Plusieurs cas ont déjà été traités, en particulier par Bolley, Camus, Hellfer ([1], [2]), à savoir :

1) $q = 1$, $q' > 0$ qui est le cas des opérateurs du type de Fuchs; si $L(t, D_x, D_t)$ est elliptique pour $t \neq 0$, il est partiellement hypo-

elliptique si et seulement si l'équation $L(t,\xi,D_t)\,u(t) = 0$ n'admet que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De plus si la variété $t = 0$ n'est pas caractéristique pour l'opérateur L (i.e $k = -m$) on peut remplacer " partiellement hypoelliptique " par " hypoelliptique " .

2) $q \geq 1$ $q' = 0$. Sous des hypothèses d'éllipticité on obtient (cf [2]) l'hypoellipticité partielle et on montre que ces opérateurs ne sont pas hypoelliptique à partir d'espace de distributions qui ne sont pas C^∞ dans la direction normale.

Les autres cas, que l'on se propose d'étudier ici, sont les suivants :

1) $0 \leq q < 1$ et $q' \geq 0$. On utilise une méthode permettant de se ramener au cas $q = 1$ et $q' > 0$.

2) $q > 1$ et $q' > 0$. On impose une restriction sur la classe étudiée de manière à ce que la partie de l'opérateur la " moins dégénérée " vérifie aussi une propriété de quasi homogénéité, on étudie donc

$$L(t, D_x, D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ rr'\leq r|\alpha|+r'j}} a_{\alpha j}\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha D_t^j$$

et on distingue deux cas qui correspondent à deux formes de l'opérateur :

$$L_1(t, D_x, D_t) = \sum_{r|\alpha|+r'j=rr'} a_{\alpha j}\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha D_t^j$$

a) $q-q'\frac{r'}{r} \geq 1$. Sous des hypothèses d'ellipticité on montre que cet opérateur est partiellement hypoelliptique et on démontre qu'il n'y a pas hypoellipticité à partir d'espace de distributions qui ne sont pas C^∞ dans la direction normale.

b) $q-q'\frac{r'}{r} < 1$. Sous les hypothèses d'ellipticité on montre que $L(t,D_x,D_t)$ est partiellement hypoelliptique si l'équation $L_1(t,\xi,D_t)\ u(t) = 0$ n'admet que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si $k = -m = -qr$ et si $q' > 1$ $L(t,D_x,D_t)$ est hypoelliptique (cf Grusin [4]) et si $k = -qr$ $L(t,D_x,D_t)$ est également hypoelliptique.

I. - NOTATIONS ET RESULTATS.

On considère les opérateurs définis sur $I \times \Omega$ où I est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, par :

$$L(t,x,D_x,D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ k+qj+q'|\alpha| \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha\, D_t^j$$

où $t \in I$ et $x \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$, $q > o$, $q' \geqslant o$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $k+qm \in \mathbb{N}$ et $k+q'm \in \mathbb{N}$.

On suppose que les coefficients $a_{\alpha j}$ sont C^∞ dans $\overline{I \times \Omega}$ et que l'opérateur L satisfait la

<u>Condition 1</u> L'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ c'est à dire :

pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$, pour tout $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(t,x)\ t^{k+qj+q'|\alpha|}\ \xi^\alpha\ \tau^j \neq 0$$

On note $L(x,D_x,D_t)$ l'opérateur défini par

$$L(x,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|\cancel{+j\leq m}} a_{\alpha j}(0,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^{\alpha}\, D_t^{\,j}$$

On suppose que cet opérateur satisfait la

<u>Condition 2</u> L'opérateur $L(x,D_x,D_t)$ est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ c'est à dire : pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(0,x)\; t^{k+qj+q'|\alpha|}\; \xi^{\alpha}\; \tau^{j} \neq 0$$

<u>Remarque</u>. La condition 2 entraine la condition 1 dans un voisinage de $t = 0$ éventuellement plus petit que $I \times \Omega$.

(A) <u>Cas $0 < q < 1$, $q' \geq 0$</u>

Dans ce cas nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

<u>Condition 3</u> L'opérateur $\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(0,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^{\alpha}\, D_t^{\,j}$ vérifie pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$ avec $|\omega| = 1$ l'équation

$$\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(o,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|}\, v^{\alpha}\; D_t^{\,j}\; v(t) = 0$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1-1. Si l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$ c'est à dire : pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I;\mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ on a : $u \in C^\infty(\dot{I}' \times \Omega')$.

Pour $q > 1$ on se limite a des opérateurs de la forme :

$$L(t,x,D_x,D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ r|\alpha|+r'j \geq rr'}} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha D_t^j$$

et on distingue deux cas qui correspondent à deux types pour l'opérateur

$$L_1(x,D_x,D_t) = \sum_{r|\alpha|+r'j=rr'} a_{\alpha j}(o,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha D_t^j$$

ces deux cas étant déterminés par la valeur de $q - q'\frac{r'}{r}$.

Dans les deux cas on fait l'hypothèse d'ellipticité générale sur $L(x,D_x,D_t)$:

Condition 2' L'opérateur $L(x,D_x,D_t)$ vérifie : pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$ $t \neq 0$ et pour tout $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ r|\alpha|+r'j > rr'}} a_{\alpha j}(0,x)\ t^{k+qj+q'|\alpha|} \xi^\alpha\ \tau^j \neq 0$$

Suivant les cas on fait des hypothèses supplémentaires :

(B) Cas $q - q'\frac{r'}{r} \geq 1$, $q > 1$, $q' > 0$.

Dans ce cas on suppose que $L_1(x,D_x,D_t)$ vérifie :

Conditions 3' Pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\ \{0\}$ on a :

$$\hat{L}_1(x,\xi,\tau) = \sum_{r|\alpha|+r'j=rr'} a_{\alpha j}(o,x)t^{k+qj+q'|\alpha|}\xi^\alpha \tau^j \neq 0$$

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 1.2</u>. Si l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les conditions 1,2,2' et 3' il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$ c'est à dire : pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I;\mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ on a : $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

(C) <u>Cas $q - q'\frac{r'}{r} < 1$, $q'>o$, $q>1$</u>

On note $\sigma = k + (q-1)r$ et $\delta = q' - \frac{r}{r'}(q-1)$.

Sur l'opérateur $L_1(x,D_x,D_t)$ nous faisons les hypothèses suivantes :

<u>Condition 3"</u> Pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a :

$$L_1(x,\xi,\tau) = \sum_{r|\alpha|+r'j=rr'} a_{\alpha j}(0,x)t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\xi^\alpha \tau^j \neq 0$$

<u>Condition 3"'</u> Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, avec $|\omega| = 1$, et pour tout $x \in \Omega$ l'équation $L_1(x,\omega,D_t)\, u(t) = 0$

n'admet dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que la solution $u = 0$

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 1-3</u> Si l'opérateur $L(t,x,D_x;D_t)$ vérifie les conditions 1,2,2',3",3"' il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$

c'est à dire : pour tous ouverts $I' \subset \Omega$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \subset C^{\infty}(I,\mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^{\infty}(I' \times \Omega')$ alors on a : $u \in C^{\infty}(I' \times \Omega')$

Remarque Dans tous les cas, il se peut que les conditions imposées ne soient vérifiées que pour $t > 0$. S'il en est aussi, en notant $I_+ = \{t \in I;\ t \geq 0\}$ on obtient les résultats suivants :

Ⓐ Cas $0 < q < 1$, $q' \geqslant 0$

Théorème 1.4. Si l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 affaiblies, c'est à dire pour $t > 0$, alors $L(t,x,D_x,D_t)$ est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$.

Ⓑ Cas $q - q' \frac{r'}{r} \geq 1$, $q' > 0$, $q > 1$.

Théorème 1.5. Si l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les conditions 1,2,2',3' affaiblies, c'est à dire pour $t > 0$, alors $L(t,x,D_x,D_t)$ est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$.

Ⓒ Cas $q - q' \frac{r'}{r} < 1$, $q' > 0$, $q > 1$

Théorème 1.6. Si l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les conditions 1,2,2',3",3"' affaiblies, c'est à dire pour $t > 0$, alors $L(t,x,D_x,D_t)$ est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$.

Il est évident que les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 sont des corollaires des théorèmes 1.4, 1.5, 1.6, c'est pourquoi nous ne démontrerons que ces trois théorèmes.

II. PRELIMINAIRES.

II.1. Espaces de distributions.

Pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \; ; \; (1+|\xi|^2)^{s/2} \; \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}, H^r(\mathbb{R}^n))$ est l'espace

$$H^s(\mathbb{R}, H^r(\mathbb{R}^n)) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, H^r(\mathbb{R}^n)) \; ; \; (1+\tau^2)^{s/2} \mathcal{F}_t \; u(\tau) \quad L^2(\mathbb{R}, H^r(\mathbb{R}^n))\}$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace

$$H^{s,r}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \; ; \; (1+|\xi|^2+\tau^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{r/2} \mathcal{F}_{t,x} u(\tau,\xi) L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 2.1</u> Pour tous $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(s,r,\phi) > 0$ telle que pour tout $u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ on ait :

$$\|\phi u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq \sup|\phi| \cdot \|u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + C(s,r,\phi) \|u\|_{H^{s,r-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$$

(si $r = 0$, on peut remplacer dans le second membre $\|u\|_{H^{s,r-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$ par $\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$.

Pour $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}, H^r(\mathbb{R}^n))$ s'injecte algébriquement et topologiquement dans $H^{s,r)s}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Nous utiliserons les espaces suivants :

(A) <u>Cas ou $0 < q < 1$</u>.

On note $\sigma = k + (q-1)m$ et $\delta = q' - q + 1$

Si $p \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ on note $W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ l'espace

$$W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) ; t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{h+j} u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{\frac{p-h}{\sigma}+|\alpha|+s}(\mathbb{R}^n))\}$$

$$|\alpha|+j \le m, \quad \sigma + \delta|\alpha| + j \in \mathbb{N}, \quad 0 \le h \le p$$

muni de la norme canonique.

Ⓑ <u>Cas où $q - q'\frac{r'}{r} \geq 1$ avec $q > 1$ et $q' > 0$.</u>

Si $s \in \mathbb{R}$ on note $W^{r,q-q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ l'espace

$$W^{r,q-q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{r'+s}(\mathbb{R}^n)); t^{(q-q'\frac{r'}{r})j} D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+ H^{s+\frac{r'}{r}(r-j)}(\mathbb{R}^n))$$

$$j = 0,\dots,r$$

muni de la norme évidente.

On note $W^{m,r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ l'espace

$$W^{m,r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{u \in W^{r,q-q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n); \; t^{qj} D_t^j u \in W^{r,q-q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)\}$$

muni de la norme evidente.

Ⓒ <u>Cas où $q - q'\frac{r'}{r} < 1$ avec $q > 1$ et $q' > 0$.</u>

Avec $\sigma = k + (q-1)r$ et $\delta = q' - \frac{r}{r'}(q-1)$ si $s \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ on note $W^{r,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ l'espace :

$$W^{r,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n); \; t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{h+j} u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{\frac{p-h}{\sigma}+|\alpha|+s}(\mathbb{R}^n)$$

$$r|\alpha| + r'j \le rr', \quad \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}, \quad 0 \le h \le p$$

muni de la norme évidente.

On note $W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ l'espace :

$$W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{u \in W^{r,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \; ; \; t^{qj} D_t^j u \in W^{r,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)\}$$

$$j = 0,\dots,m-r$$

muni de la norme évidente.

II.2. Structure locale des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$

On désigne par $C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

On démontre les lemmes suivants :

Lemme 2.2. Etant donnés $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ $m \in \mathbb{N}$, $o < q < 1$, $q' \geq 0$ avec $mq \in \mathbb{N}$ et $mq' \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\, u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\sigma = k + (q-1)^m_{\cdot}$ et $\delta = q' - q+1$.

Lemme 2.3 Etant donnés $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $r' \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $q' > 0$ avec $mq \in \mathbb{N}$ $mq' \in \mathbb{N}$, $rq \in \mathbb{N}$, $r'q' \in \mathbb{N}$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\, u \in W_s^{m,r,q,q'}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.4. Etant donnés $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $r' \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, $q' > 0$ avec $k + mq \in \mathbb{N}$, $k + mq' \in \mathbb{N}$, $k + rq \in N$, $k + r'q' \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W_{q,q',k}^{m,r,p,s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Les démonstrations sont basées sur le fait que si $p \in \mathbb{N}$, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\, u \in H^p(R_+, H^s(\mathbb{R}^n))$ (cf [8]).

III. DEMONSTRATION DES RESULTATS

Cas $0 < q < 1$, $q' > 0$. Démonstration du théorème 1.4.

Pour démontrer ce théorème on utilise la méthode des quotients différentiels tangentiels à partir d'une estimation a priori.

III. A.1. Une estimation a priori.

Proposition 3.1. On suppose que l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les hypothèses 2 et 3. Pour tout $x_o \in \Omega$, il existe un entier $p_o \geq 0$ tel que pour tout entier $p \geq p_o$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe deux constantes $C_{p,s} > 0$ et $\varepsilon_p > 0$ telles que si

$u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec supp $u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega ; \|(t,x) - (0,x_o)\| < \varepsilon_p\}$

on ait :

$$\|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{p,s} \left\{ \sum_{n=o}^{p} \|D_t^h Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^{\frac{p-h}{\delta}+s}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,s-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \right\}.$$

(ici : $\sigma = k + (q-1)m$, $\delta = q' - q + 1$).

Démonstration. Notons $\mathcal{L}(t,x,D_x,D_t)$ l'opérateur

$$\mathcal{L}(t,x,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha D_t^j$$

En remarquant qu'il peut encore s'écrire

$$\mathcal{L}(t,x,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_x^\alpha D_t^j$$

on obtient, d'après la proposition 3.1 de [1], que :

pour tout $x_o \in \Omega$, il existe un entier $p_o \geq 0$ tel que pour tout entier $p \geq p_o$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe deux constantes $C_{p,s} > 0$ et $\varepsilon_p > 0$ telles que si $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec

supp $u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega ; \|(t,x) - (0,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ on ait :

$$\|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{p,s} \left\{ \sum_{h=o}^{p} \|D_t^h \mathcal{L}u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^{\frac{p-h}{\sigma}+s}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,s-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \right\}$$

On achève alors la démonstration de la proposition 3-1 en remarquant que pour tout $\eta > 0$ il existe $C_\eta > 0$ tel que si ε_p est assez petit et si $\operatorname{supp} u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega;\ \|(t,x)-(0,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ on a :

$$\sum_{h=o}^{p} \|D_t^{\,h}(L-\mathcal{L})\, u\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\ H^{\frac{p-h}{\delta}+s}(\mathbb{R}^n))} \leq \eta \|u\|_{W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)} + C_\eta \|u\|_{W^{m,p,s-1}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)}$$

III. A. 2. Régularité partielle.

Proposition 3.2. Si $u \in W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset \{\|(t,x)-(0,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ et si $D_t^h\, Lu \in L^2(\mathbb{R}_+,\ H^{\frac{p-h}{\delta}+s+1}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq h \leq p$ alors

$$u \in W^{m,p,s+1}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n).$$

Démonstration : On applique la méthode des quotients différentiels tangentiels à partir de l'estimation a priori de la proposition 3.1.

III. A.3. Démonstration du théorème 1.4.

Soit $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $L u \in C^\infty(I' \times \Omega')$ et soit $(t_o, x_o) \in I' \times \Omega'$. On doit montrer que u est indéfiniment différentiable au point (t_o, x_o).

Pour $t_o \neq 0$ le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq 0$.

Si $t_o = 0$ soit V un voisinage ouvert de $(0,x_o)$ avec $V \subset\subset I' \times \Omega'$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(I' \times \Omega')$ avec $\phi = 1$ sur V. D'après le lemme 2.2, pour tout entier $p \geq 0$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ $\varphi u = \varphi\phi u \in W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Choisissons $p \geq p_o$ où p_o est l'entier associé à x_o dans la proposition 3.1 et $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ de la forme $\varphi_1(t)\,\varphi_2(x)$ avec $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \{(t,x) \,/\, \|(t,x) - (0,x)\| < \varepsilon_p\}$. On vérifie alors que $D^h_t\, L\, u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{\frac{p-h}{\sigma}+s+1}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq h \leq p$.

Il en résulte : $\varphi u \in W^{m,p,s+1}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$; en itérant on a $\varphi u \in W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Comme $\bigcap\limits_{\substack{p \geq p_o \\ s \in \mathbb{R}}} W^{m,p,s}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ en on déduit que u est indéfiniment différentiable au point $(0,x_o)$; d'où le théorème 1.4.

B) Cas $q>1$, $q'>0$, $q - q'\frac{r'}{r} \geq 1$. Démonstration du théorème 1.5.

Pour démontrer ce théorème on utilise la méthode des quotients différentiels à partir d'une estimation a priori.

III.B.1. Une estimation a priori

Proposition 3.3. Pour tout $x_o \in \Omega$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_{s,\varepsilon} > 0$ telle que si $u \in W^{m,r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\mathrm{supp}\, u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega;\ \|(t,x)-(o,x_o)\| < \varepsilon\}$ on ait :

$$\|u\|_{W^{m,r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_n)} \leq C_{s,\varepsilon}\{\|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{m,r,q,q'}_{s-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)}$$

(En fait, pour plus de simplicité on a divisé l'opérateur L par $t^{k+q'r'}$

Démonstration. Par transformation de Fourier tangentielle on étudie l'opérateur différentiel ordinaire, dépendant du paramètre $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$L(x_o,\xi,D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m\\ r|\alpha|+r'j\geq rr'}} a_{\alpha j}(0,x_o)t^{q'|\alpha|+qj-q'r'}\xi^\alpha D_t^j$$

Nous avons divisé l'opérateur L par $t^{k+q'r'}$ ce qui est possible car on étudie l'hypoelliplicité partielle.

1°) Etude pour $|\xi| \geq A$,(A sera fixé ultérieurement)

Pour ξ fixé dans $\mathbb{R}^n$ nous étudierons $L(x_o,\xi,D_t)$ sur l'intervalle $[0,\delta[$ et nous sommes amenés à recouvrir cet intervalle pour les intervalles $[0,\tau[$ et $]\tau_2,\delta[$ avec $\tau_i = \delta_i|\xi|^{\frac{1}{q'}}$ $(0<\delta_2<\delta_1$ seront choisis ultérieurement)

a) Etude sur $[0,\tau_1[$.

Si $L_1(x_o,\xi,D_t)$ est l'opérateur

$$\sum_{r|\alpha|+r'j=rr'} a_{\alpha j}(o,x_o)t^{qj+q'|\alpha|-q'r'}\xi^\alpha D_t^j$$

on a, grâce aux conditions 2,2' et 3' , d'après [2] :

Il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\sum_{0\leq j\leq r}(1+|\xi|^2)^{s+\frac{r'}{r}(r-j)}\|t^{(q-q'\frac{r'}{r})j}D_t^j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C\,\{(1+|\xi|^2)^s\|L_1 v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$+\sum_{0\leq j\leq r-1}(1+|\xi|^2)^{s-1+\frac{r'}{r}(r-j)}\|t^{(q-q'\frac{r'}{r})}d_t^j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

pour tout $v\in\{v\in L^2(\mathbb{R}_+);\ t^{(q-q'\frac{r'}{r})j}D_t{}^j v\in L^2(R_+)\}$ telle que supp $v\subset[0,\tau_1$

Si l'on note $M(t,D_t)$ l'opérateur

$$M(t,D_t) = \sum_{j=o}^{m-r} \frac{a_{o,j+r}(o,x_o)}{a_{o,r}(o,x_o)} \; t^{qj} D_t^j$$

on a, grâce aux conditions 2,2' et 3', l'estimation a priori suivante :

$$(1+|\xi|^2)^s \sum_{j=o}^{m-r} \| t^{qj} \; D_t^j (L,v) \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C(1+|\xi|^2)^s \| M \circ L_1 v \|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

pour tout v tel que $\operatorname{supp} v \subset [0,\tau_1[$ (cf [7])

Nous devons estimer la quantité

$$\sum_{\ell=o}^{r} \sum_{j=o}^{m-r} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{r'}{r}(r-\ell)} \| t^{(q-q'\frac{r'}{r})\ell} D_t^{\ell} \{t^{qj} D_t{}^j v\}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

en supposant que $\operatorname{supp} v \subset [0,\tau_1[$.

Des estimations précédentes on obtient :

$$\sum_{\ell=o}^{r} \sum_{j=o}^{m-r} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{r'}{r}(r-\ell)} \| t^{(q-q'\frac{r'}{r})\ell} D_t^{\ell} \{t^{qj} D_t^j \; v\} \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq C \Big\{ (1+|\xi|^2)^s \| L \; v \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + (1+|\xi|^2)^s \| (L-M\circ L_1) v \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$+ \sum_{\ell=o}^{r-1} (1+|\xi|^2)^{s-1+\frac{r'}{r}(r-j)} \| t^{(q-q'\frac{r}{r})\ell} D_t^{\ell} \; v \|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \Big\}$$

On montre alors que pour tout $\eta > 0$ il existe $A > 0$, $\delta > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que si $\operatorname{supp} v \subset [0,\tau_1[$ et si $|\xi| \geq A$ on a :

$$(1+|\xi|^2)^s \| (L-M \circ L_1) v \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \eta \sum_{\ell=o}^{r} \sum_{j=o}^{m-r} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{r'}{r}(r-\ell)} \| t^{(q-q'\frac{r'}{r})\ell} D_t^{\ell} \, t^{qj} D_t^j v \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

Il est alors facile de montrer quel'on a :

$$\sum_{\ell=0}^{r}\sum_{j=0}^{m-r}(1+|\xi|^2)^{s+\frac{r'}{r}(r-\ell)}\|t^{(q-q'\frac{r'}{r})\ell} D_t^\ell t^{qj} D_t^j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq C\{(1+|\xi|^2)^s\|L(x_o,\xi,D_t)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}+\sum_{=o}^{r-1}\sum_{j=o}^{m-r}(1+|\xi|^2)^{s-1+\frac{r'}{r}(r-\ell)}\|$$

$$\|t^{(q-q'\frac{r'}{r})\ell} D_t^\ell t^{qj} D_t^j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

b) <u>Etude sur $[\tau_2,\delta[$.</u>

On note $\tau_2 = \delta_2|\xi|^{-\frac{1}{q'}}$ avec $\delta_2 < \delta_1$ et on étudie l'opérateur $L(x_o,\xi,D_t)$ de $H^m(\tau_2,\delta)$ dans $L^2(\tau_2,\delta)$.

Dans l'équation $h^{-1/2}L(x_o,\xi,D_t)\,v = h^{-1/2}\,f$

où $h(\xi,t) = \left[\dfrac{t^{q'r'}|\xi|^{r'} + t^{q'm}|\xi|^m}{t^{qm}}\right]^{1/m}$

on fait le changement de variables défini par

$$h(\xi,t)dt = dy$$

et le changement de fonctions

$$w(y) = h^{-\frac{1}{2}}\,t^{qm-q'r'}v(t)$$

$$f_1(t) = h^{-1/2}\,f(t).$$

On est alors ramené à l'étude d'une équation différentielle ordinaire à "coefficients peu variables " (cf [5]) et ainsi on obtient pour $L(x_o,\xi,D_t)$ l'estimation :

$$\sum_{|\alpha|+j\leq m}(1+|\xi|^2)^{s+|\alpha|}\|t^{qj+q'|\alpha|-q'r'}D_t^j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\leq C(1+|\xi|^2)^s\|L(x_o,\xi,D_t)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

c) <u>Etude sur $[0,\delta[$</u> .

On munit l'espace $W_s^{m,r,q,q'}(0,\delta)$ de la norme dépendant de ξ

$$\Big[\sum_{\ell=0}^{r}\sum_{j=0}^{m-r}(1+|\xi|^2)^{s+\frac{r'}{r}(r-\ell)}\,\|t^{(q-q'\frac{r'}{r})\ell}D_t^{\ell}(t^{qj}D_t^{j}v|_{0,\tau_1})\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\;+$$

$$+\sum_{|\alpha|+j\leq m}(1+|\xi|^2)^{s+|\alpha|}\,\|t^{qj+q'|\alpha|-q'r'}D_t^{j}v_{(\;2\;)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\Big]^{1/2}$$

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\phi_1^{\,2}+\phi_2^{\,2}=1 \quad \text{avec} \quad \phi_1(y)=0 \text{ si } y\geq \delta_1-\rho$$

et $\phi_2(y)=0$ si $y\leq \delta_2+\rho$ où $0<\rho<\dfrac{\delta_1-\delta_2}{2}$

On pose alors, pour $i=1,2$, $\varphi_i(t)=\phi_i(t|\xi|^{1/q'})$.

Soit alors $v\in W^{m,r,q,q'}(0,\delta)$ avec supp $v\subset[0,\delta[$ on a :

$$\|v\|^2_{W_{s,\xi}^{m,r,q,q'}(0,\delta)}\leq C\{(1+|\xi|^2)^s(\|L(\varphi,v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}+\|L(\varphi_2\,v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\;+$$

$$+\|\varphi_1\,v)\|^2_{W_{s-1}^{\,,r,q,q'}(o,\delta)}$$

d'où

$$\|v\|_{W_{s,\xi}^{m,r,q,q'}}\leq C\,\{(1+|\xi|^2)^s\,\|L(x_o,\xi,D_t)\,v\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}+\|v\|_{W_{s-1,\xi}^{m,r,q,q'}(0,\delta)}.$$

2°) <u>Etude pour $|\xi|\leq A$</u>.

Soit $\xi_o\in\mathbb{R}^n$ tel que $|\xi_o|\geq A$. Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$ tel que $|\xi|\leq A$ on a :

$$\|v\|^2_{W^{m,r,q,q'}_{s,\xi}(0,\delta)} \leq C\|v\|^2_{W^{m,r,q,q'}_{s,\xi_o}(0,\delta)} \leq C\left\{(1+|\xi|^2)^s \|L(x_o,\xi_o,D_t)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right.$$

$$\left. + \|v\|^2_{W^{m,r,q,q'}_{s-1,\xi_o}(0,\delta)}\right\}$$

d'où :

$$\|v\|^2_{W^{m,r,q,q'}_{s,\xi}(0,\delta)} < C\{(1+|\xi|^2)^s \|L(x_o,\xi,D_t)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|v\|^2_{W^{m,r,q,q'}_{s-1,\xi}(0,\delta)}\}.$$

3°) Fin de la démonstration de la proposition 3.3.

Soit $u \in W^{m,r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec supp $u \subset [0,\delta[\times \mathbb{R}^n$. En appliquant les estimations précédentes à $\hat{u}(t,\xi)$ et en intégrant par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$ on obtient :

$$\|u\|_{W^{m,r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)} \leq C\ \{\|L(x_o,D_x,D_t)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+,H^s(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{m,r,q,q'}_{s-1}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)}\}$$

En utilisant le lemme 2-1 on atteint le cas des coefficients variables et ainsi on a la proposition 3-3.

III.B.2. Régularité partielle.

Proposition 3.4. On suppose que l'opérateur $L(t,x;D_x,D_t)$ vérifie les conditions 2,2' et 3'. Pour tout $x_o \in \Omega$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que si $u \in W^{m;r,q,q'}_s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec supp $u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega, \|(t,x)-(0,x_o)\| < \varepsilon\}$ et $Lu \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ pour $s \in \mathbb{R}$ alors

$$u \in W^{m,r,q,q'}_{s+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Elle consiste à appliquer la méthode des quotients différentiels tangentiels à partir de l'estimation a priori obtenue à la proposition 3.3.

III.A.3. Un résultat de dérivées intermédiaires.

Lemme 3.1. Soient $s \in \mathbb{R}$, $s' \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Si $u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^n))$ et si $D^p\ u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{s'}(\mathbb{R}^n))$ alors $D_t^j\ u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{s\frac{j}{p}(s'-s)}(\mathbb{R}^n))$.

III.A.4. Démonstration du théorème 1.5.

Soit $u \in C^\infty(I_+, \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $L\ u \in C^\infty(I'_+ \times \Omega')$ et soit $(t_o, x_o) \in I'_+ \times \Omega'$. On veut montrer que u est indéfiniment dérivable au point (t_o, x_o).

Pour $t_o \neq 0$ le résultat est classique en utilisant la condition 1.

Pour $t_o = 0$, soit V un voisinage ouvert de $(0,x_o)$ dans $I'_+ \times \Omega'$ avec $V \subset\subset I'_+ \times \Omega'$ et soit $\phi \subset C_o^\infty(I' \times \Omega')$ avec $\phi = 1$ sur V. D'après le lemme 2-3 il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\ u \in W^{m,r,q,q'}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Soit alors $\varphi \in C_o^\infty(V)$ tel que $\varphi(t,x) = \varphi_1(t)\ \varphi_2(x)$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \{(t,x) \in I' \times \Omega'\ ;\ \|(t,x)-(0,x_o)\| < \varepsilon\}$ où ε est défini à la proposition 3.3.

On a $L(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ donc $\varphi u \in W_{s+1}^{m,r,q,q'}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. En itérant ce procédé on a :

$$\varphi\ u \in W_s^{m,r,q,q'}\ (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Soit maintenant $p_o \in \mathbb{N}$ et $s_o \in \mathbb{R}$ et soit à montrer que $D_t^{p_o}\ (\varphi\ u) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{s_o}(\mathbb{R}^n))$. D'après le lemme de structure des éléments de $C^{\infty}(\mathbb{R}_+, H^{s_q}(\mathbb{R}^n))$. il existe $s' \in \mathbb{R}$ tel que $D_t^{p_o+1}(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}_+ H^{s'}(\mathbb{R}^n))$; on choisit $s \in \mathbb{R}$ tel que $s + \frac{p_o}{p_o+1}(s'-s) = s_o$. Comme $\varphi u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^n))$ on a le résultat annoncé grâce au lemme 3-1.

Ainsi on a démontré que a est indéfiniment dérivable au point $(0, x_o)$.

C Cas $q > 1$, $q' > 0$, $q - q'\frac{r'}{r} < 1$. Démonstration du théorème 1.6.

On utilise encore la méthode des quotients différentiels à partir d'une estimation a priori.

III.c.1. Une estimation a priori

Proposition 3.5. On suppose que l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ vérifie les hypothèses 2,3" et 3"'. Pour tout $x_o \in \Omega$, il existe un entier $p_o \geq 0$ tel que pour tout entier $p \geq p_o$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe deux constantes $C_{p,s} > 0$ et $\varepsilon_p > 0$ telles que si

$$u \in W^{m,r,p,s}_{p,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) \text{ avec}$$

supp $u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega;\ \|(t,x) - (0,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ on ait :

$$\|u\|_{W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{p,s}\left\{\sum_{h=o}^{p} \|D_t^h L u\|_{L^2(\mathbb{R}_+ H^{\frac{p-h}{\sigma}+s}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{m,r,p,s-1}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)}\right\}$$

Démonstration. Par transformation de Fourier tangentielle on est ramené à l'étude de l'opérateur différentiel ordinaire

$$L(x_o, \xi, D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j<m \\ r|\alpha|+r'j>rr'}} a_{\alpha j}(0,x_o)\, t^{k+q'|\alpha|+qj}\, \xi^{\alpha} D_t^j$$

1°) Etude pour $|\xi| > A$ ($A > 0$ sera fixé ultérieurement).

Pour ξ fixé dans $\mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A$ on se propose d'étudier $L(x_o,\xi,D_t)$ sur l'intervalle $[0,\delta[$.
Pour cela on recouvre cet intervalle par $[0,\tau_1[$ et $]\tau_2,S[$ où $\tau_i = \delta_i\, |\xi|^{-\frac{1}{q'}}$ avec $0 < S_2 < S_1$. ($\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ sont choisis ultérieurement au cours des calculs).

a) Etude sur $[0,\tau_1[$.

D'après [1] les conditions 2, 3" et 3"' montrant qu'il existe un entier $p_o \geq 0$ tel que pour tout $p \geq p_o$, entier, il existe une constante $C_p > 0$ telle que si $v \in W^{m,p}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on a :

$$\sum_{h=o}^{p} \sum_{r|\alpha|+r'j<rr'} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{p-h}{\sigma}+|\alpha|} \| t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{h+j} v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq C_p \sum_{h=o}^{p} (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\sigma}+s} \|D_t^h\, L_1\, v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

En remarquant que les conditions 1 2,2' et 3" impliquent des propriétés de régulatés pour l'opérateur

$$M(t,D_t) = \sum_{j=o}^{m-r} \frac{a_{o,j+r}(0,x_o)}{a_{o,r}(0,x_o)}\, t^{qj}\, D_t^{\,j}$$

on a :

$$\sum_{h=o}^{p} \sum_{j=o}^{m-r} (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\sigma}+s} \|D_t^h(t^{qj}D_t^j(L_1 v))\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C \sum_{h=o}^{p} (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\sigma}+s} \|D_t^h\, MoL_1 v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

En regroupant ces inégalités on obtient :

$$\sum_{h=o}^{p}\ \sum_{r|\alpha|+r'j\leq rr'}\ \sum_{\ell=o}^{m-r}(1+|\xi|^2)^{|\alpha|\ \frac{p-h}{\delta}+s}\ \| t^{\alpha+\delta|\alpha|+j}\ D_t^{h+j}(t^{q\ell}D_t^{\ell}\ v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq\ C\{\ \sum_{h=o}^{p}(1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}+s}\ (\| D_t{}^{h}L\ v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}+\| D_t{}^{h}(L-MoL_1)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)})\ \}$$

On montre alors que, pour tout $\eta >\ 0$ il existe $\delta_1 > 0$ et $A > 0$ tel que si supp $v \subset [0,\tau_1[$ on a :

$$\sum_{h=o}^{p}(1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}+s}\ \|D_t^h(L-MoL_1)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+}$$

$$\leq\ \eta\sum_{h=o}^{p}\ \sum_{r|\alpha|+r'j\leq rr'}\ \sum_{=o}^{m-r}(1+|\xi|^2)^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+s}\|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\ D_t^{h+j}t^{q\ell}D_t v^{\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+}$$

On en déduit que si $|\xi| > A$ et si supp $v \subset [0,\tau_1[$:

$$\sum_{h=o}^{p}\ \sum_{|\alpha|+r'j\leq rr'}\ \sum_{\ell=o}^{m-r}(1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}+s+|\alpha|}\|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\ D_t^{j+h}\ t^{q\ell}D_t^{\ell}\ v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq\ C\ \sum_{h=o}^{p}(1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}+s}\ \|D_t^h\ L\ v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\ \}.$$

b) <u>Etude sur $]\tau_2,\delta[$</u>

On note $\tau_2 = \delta_2|\xi|^{\frac{1}{q}}$ avec $0< \delta_2< \delta_1$ et on étudie l'opérateur $L(x_o,\xi,D_t)$ de $H^{m+p}(\tau_2,\delta)$ dans $H^p(\tau_2,\delta)$

Dans l'équation $h^{-1/2} L v = 4^{-1/2} f$

où $$h(\xi,t) = \left| \frac{t^{q'r'}|\xi|^{r'} + t^{q'm}|\xi|^m}{t^{qm}} \right|^{1/m}$$

on fait le changement de variables défini par :

$$h(\xi,t)dt = dy$$

et le changement de fonctions : $W(y) = h^{m-\frac{1}{2}}\, t^{k+qm} v(t)$

$$f_1(y) = h^{-\frac{1}{2}} f(t).$$

On est alors ramené à l'étude d'une équation différentielle ordinaire à coefficients par variables " (cf [5]) et on obtient :

$$\sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ r|\alpha|+r'j\geq rr'}} (1+|\xi|^2)^{s+|\alpha|}\, \|t^{k+qj+q'|\alpha|} D_t^j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C(1+|\xi|^2)^s \|Lv\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

si supp v $\subset]\tau_2,\delta[$

Ensuite par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$\sum_{h=o}^{p} \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ r|\alpha|+r'j\geq rr'}} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{p-h}{\sigma}+} \|t^{k+qj+q'|\alpha|} D_t^{j+h} v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq C \sum_{h=o}^{p} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{p-h}{\sigma}} \|D_t^h L v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

c) <u>Etude sur $]0,\delta[$</u>

En utilisant les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 définies au (B) et en utilisant la même méthode on a :

$$\|v\|^2_{W^{m,r,p,s}_{q,q'k,\xi}(0,\delta)} \leq C\{ \sum_{h=0} (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\sigma}+s} \|D_t{}^h L v\|^2_{L2(\mathbb{R}_+)}\}$$

pour $v \in W^{m,r,p,s}_{q,q'k}(0,\delta)$ avec supp v $\subset [0,\delta[$

2°) Etude pour $|\xi| \leq A$.

Soit $\xi_o \in \mathbb{R}^n$ fixé avec $|\xi_o| \geq A$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| \leq A$ on a :

$$\|v\|^2_{W^{m,r,p,s}_{q,q',k,\xi}(0,\delta)} \leq \|v\|^2_{W^{m,r,p,s}_{q,q',k,\xi_o}(0,\delta)} \leq C\{\sum_{h=o}^{p}(1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}+s}\|D_t^h L(x_o,\xi_o,D_t)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\}$$

d'où, en utilisant des formules de Taylor,

$$\|v\|^2_{W^{m,r,p,s}_{q,q',k,\xi}(0,\delta)} \leq C\{\sum_{h=o}^{p}(1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}+s}\|D_t{}^h L(x_o,\xi,D_t)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|v\|^2_{W^{m,r,p,s-1}_{q,q'k,}(0,\delta)}\}$$

3°) Fin de la démonstration de la proposition 3.5

Si l'on prend $u \in W^{m;r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec supp $u \subset |0,\delta| \times \mathbb{R}^n$, en appliquant les inégalités précédentes à $\hat{u}(t,\xi)$ et en intégrant par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\|u\|_{W^{m,r,p,s}_{q,q'k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_n} \leq C\ \{\sum_{h=o}^{p}\|D_t^h\ L(x_o,t,D_x,D_t)v\|_{L^2(\mathbb{R}_+,H^{s+\frac{p-h}{\delta}}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \|u\|_{W^{m,r,p,s-1}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)}$$

On passe au cas des coefficients variables en utilisant le lemme 2.1 et des inégalités de Hardy et ainsi on a la proposition 3.5.

III.C.2. Régularité partielle

Proposition 3.6. Si $u \in W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec h supp $u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega\ ;\ \|(t,x) - (0,x_o)\| < \varepsilon_\rho\}$ et si $D_t^h\ Lu \in L^2\ (R_+, H^{\frac{p-h}{\delta}+s+1}(R^n))$ pour $0 \leq h \leq p$ alors :

$$u \in W^{m,r,p,s+1}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$$

Démonstration On applique la méthode des quotients différentiels tangentiels à partir de l'estimation a priori de la proposition 3.5.

III.C.3. Démonstration du théorème 1.6.

Soit u $C^\infty(I_+, \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $L\,u \in C^\infty(I_+ \times \Omega')$ et soit $(t_o, x_o) \in I'_+ \times \Omega'$. On doit montrer que u est indéfiniment différentiable au point (t_o, x_o).

Pour $t_o \neq 0$ le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq 0$.

Si $t_o = 0$, soit V un voisinage ouvert de $(0,x_o)$ avec $V \Subset I'_+ \times \Omega'$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(I'_+ \times \Omega')$ avec $\phi = 1$ sur V.

D'après le lemme 2.4, pour tout p entier ≥ 0 il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\, u \in W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ $\varphi\, u = \varphi\phi\, u \in W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$

Choisissons $p \geq p_o$ où p_o est l'entier associé à x_o dans la proposition 3.6 et $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ de la forme $\varphi_1(t)\,\varphi_2(x)$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;\ \|(t,x)-(0,x_o)\| < \varepsilon_p\}$. On vérifie alors que $D^h_t\, L(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{\frac{p-h}{\sigma}+s+1}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq h \leq p$.

Il en résulte : $\varphi\, u \in W^{m,r,p,s+1}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$; en itérant le procéde on a : $\varphi\, u \in W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Comme $\bigcap\limits_{\substack{p \geq p_o \\ s \in \mathbb{R}}} W^{m,r,p,s}_{q,q',k}(\mathbb{R}_+ \times R^n \subset C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on en déduit que u est indéfiniment différentiable au point $(0,x_o)$; d'où le théorème 1.6.

IV. REMARQUES.

<u>Remarque 1</u>. Lorsque nous sommes dans la classe décrite en C l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t)$ peut être hypoelliptique. Par exemple lorsque $k = - qr = - m$ l'opérateur entre dans la classe étudiée par dans [4] on a alors le résultat suivant :

Si $q' > 1$ et si les conditions 1, 2 et 2' sont satisfaites alors $L(t,x,D_x,D_t)$ est hypoelliptique.

<u>Remarque 2</u>. Pour les opérateurs du type B, on montre que lorsque les coefficients possèdent une propriété d'analyticité il n'y a pas hypoellipticité à partir d'un espace de distributions qui ne sont pas C^∞ dans la direction normale.

La démonstration consiste à employer les méthodes utilisées par Helffer -Zuily dans [6] et par Bolley - Camus - Helffer dans [2] pour l'opérateur $L_1(t,x,D_x,D_t)$ et à remarquer que l'opérateur $L(t,x,D_x,D_t) - L_1(t,x,D_x,D_t)$ est " suffisamment dégénéré " pour ne pas perturber la méthode.

V. <u>Extensions à d'autres classes d'opérateurs</u>

1°) On peut considérer des opérateurs de la forme

$$L(t,x,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(t,x)\; t^{[k+qj+q'|\alpha|]} D_x^\alpha\, D_t^{\,j}$$

où $[k+qj+q'|\alpha|]$ désigne le plus petit entier ≥ 0 supérieur ou égal à $k + qj + q'|\alpha|$.

On introduit un opérateur principal associé

$$\mathcal{L} = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ k+qj+q'|\alpha| \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha\, D_t^{\,j}$$

et les conditions 2,3 (ou 2,3' ou 2,3",3"') portent sur $\mathcal{L}$.

2°) Dans les cas B ou C, c'est à dire lorsque $q > 1$ et $q' > 0$ on peut considérer des opérateurs de la forme

$$\sum_{\substack{r|\alpha|+r'j\geqslant rr' \\ |\alpha|+j\leqslant m}} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{k+qj+q'|\alpha|} D_x^\alpha\, D_t^j \; x \sum_{r|\alpha|+r'j<rr'} a_{\alpha j}(t,x)\, t^{\ell\alpha j}\, D_x^\alpha\, D_t^j$$

$$= L(t,x,D_x,D_t) + Q(t,x,D_x,D_t),$$

lq forme des $\ell_{\alpha j}$ devant être :

$$\ell_{\alpha j} = k + q'r' + (q - q'\tfrac{r'}{r})j \quad \text{si } q-q'\tfrac{r'}{r} \geqslant 1$$

$$\ell_{\alpha j} = \sigma + \delta|\alpha| + j \qquad \text{si } q-q'\tfrac{r'}{r} < 1$$

$$\text{avec } \sigma = k + (q-1)r \quad \text{et } \delta = q'\tfrac{r}{r'}(q-1)$$

Les conditions 3' ou 3" et 3"' portent alors sur l'opérateur $\mathcal{L}_1(x,D_x,D_t) = L_1(x,D_x,D_t) + Q(0,x,D_x,D_t)$

VI. EXEMPLES.

A 1°. L'opérateur $t\,D_t^2 + D_x^{\,2} + i\,D_x$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 pour $t > 0$, il est donc partiellement hypoelliptique sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ $(q = \frac{1}{2},\ q' = 0,\ k = 0)$

2°. L'opérateur $D_t^2 + t\,D_x{}^2 + i\,D_x$ vérifie les conditions 1,2 et 3 pour $t > 0$, il est donc partiellement hypoelliptique sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. ($q = \frac{1}{2}$, $q' = 1$, $k = 1$).

(B) 1°. L'opérateur $t^7\,D_t^4 + t\,D_x^4 + t^3D_t^2 + D_x^2$ vérifie les conditions 1,2,2',3' pour $t > 0$, il est donc partiellement hypoelliptique (on a $m = 4$, $r = r' = 2$ $q = 2$ $q' = \frac{1}{2}$, $k = -1$).

2°) En tenant compte de ce qui a été dit au V on a le même résultat pour

$$t^7\,D_t^4 + t\,D_x^4 + t^3D_t^2 + D_x{}^2 + t^2\,D_t + D_x$$

car $\quad t^2D_t + D_x \;=\; t^{[3/2]}D_t + D_x$.

3°) L'opérateur $t^3\,D_t{}^2 + D_x^2 + it\,D_t$ est aussi partiellement hypoelliptique sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. On a $q = 2$, $q' = \frac{1}{2}$, $m = 2$ $r' = 2$ et $r = 1$ $k = -1$).

(C) L'opérateur $L = t^4\,D_t{}^4 + t^8\,D_x{}^4 + D_t{}^2 + t^2\,D_x{}^2$

est partiellement hypoelliptique sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Ici on a $m = 4$ $r = r' = 2 = 2$ $q = 2$, $q' = 3$, $k = -4$.

D'après V on obtient que l'opérateur

$$L = t^4\,D_t^4 + t^8D_x^4 + D_t^2 + t^2D_x^2 + \lambda D_x$$

est partiellement hypoelliptique sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ si $\lambda \neq \pm(2n+1), n \in \mathbb{N}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOLLEY-CAMUS-HELFFER. Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptique.

[2] BOLLEY-CAMUS-HELFFER. Hypoellipticité partielle pour des opérateurs dégénérés non fuschiens.

[3] GRUSIN(V.V). On a class of hypoelliptic operators.Math.Sbornik 83 (125),(1970),456-473(Math USSR Sbornik 12,1970, 458-476).

[4] GRUSIN (V.V). Hypoelliptic differential and pseudo différential operators with operator-valued. Math USSR Sbornik 17, 1972, 497-514.

[5] GRUSIN (V.V) et Visik(M.I) On a class of highter order degenerate elliptic équations. Math.USSR Sbornik, vol.8, 1969, n° 1, 1-32.

[6] HELFFER(8) et ZUILY (C). Non hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels. C.B Acad. Sc PARIS (Nov.1973).

[7] PREVOSTO (D) et ROLLAND (J). Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. C.R.Acad.Sc.Paris t.279.

[8] SCHWARTZ (L). Distributions à valeurs vectorielles I, II, Ann. Inst. Fourier 7 (1957), 1,141 ; 8, (1958), 1,209.