

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LOUIS BOUTET DE MONVEL

JOHANNES SJÖSTRAND

Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 123-164

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____123_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA SINGULARITÉ DES NOYAUX DE BERGMAN ET DE SZEGÖ

par L.Boutet de Monvel et J.Sjöstrand

Introduction

- §1 Description des résultats : singularité des noyaux de Bergman et de Szegö.
 - a. Description des résultats.
 - b. Remarques.
- §2 Construction d'un projecteur approximatif.
 - a. Le modèle local.
 - b. Cas général.
 - c. Cas de $\bar{\partial}_b$.
- §3 Le noyau de Bergman.
 - a. Notations.
 - b. Réduction au bord.
 - c. Construction d'un projecteur approximatif.
 - d. Fin de la démonstration.
 - e. Le noyau de Szegö.
- §4 Calcul du terme dominant.

Introduction.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{C}^n , de frontière C^∞ $X = \partial\Omega$ strictement pseudo-convexe. Les fonctions holomorphes dans Ω sont les fonctions qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann, ie. telles que $d''f = 0$. Si f est continue dans $\bar{\Omega}$, holomorphe dans Ω , la trace $f|_X$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites : $\bar{\partial}_b f|_X = 0$; inversement on sait (cf. [14]) que toute fonction g sur X telle que $\bar{\partial}_b g = 0$ est la trace d'une fonction holomorphe dans Ω .

Le projecteur de Bergman B est le projecteur orthogonal sur l'espace des fonctions holomorphes de carré sommable, dans $L^2(\Omega)$. Le projecteur de Szegö est le projecteur orthogonal S

sur le sous-espace des traces de fonctions holomorphes , de carré sommable dans X (ie. $\text{Ker } \bar{\partial}_b \cap L^2(X)$), dans $L^2(X)$.

Dans cet article , nous allons donner une description très précise des singularités des noyaux de B et de S (qui sont au moins des distributions sur $\bar{\Omega}^2$ (resp. X^2) , C^∞ en dehors de la diagonale de X dans $\bar{\Omega}^2$ d'après [10]) . Celle ci est décrite au §1 . Nous retrouvons en particulier le résultat de C. Fefferman [6] (qui décrit complètement la singularité au bord de Ω de la restriction du noyau $B(x,y)$ de B à la diagonale $x = y$) .

L'idée de la démonstration est la suivante : nous commençons par fabriquer un projecteur orthogonal approximatif sur $\text{Ker } \bar{\partial}_b$ (ie. un projecteur mod. les opérateurs à noyau C^∞) , ou sur le sous espace des fonctions annulées par un système d'opérateurs pseudo-différentiels simulant $\bar{\partial}_b$ (§2) . Il se trouve que dans tous les cas , il existe un tel projecteur approximatif , qui est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe , au sens de [15] . Pour $\bar{\partial}_b$, on peut choisir une phase particulièrement simple (§1.a et §2.c)

On passe de là au noyau de Bergman en exploitant le fait qu'une fonction holomorphe est harmonique , donc s'exprime en fonction de sa trace sur le bord au moyen du noyau de Poisson (§3.b).

Il reste encore à prouver que le projecteur approximatif diffère du vrai projecteur par un opérateur à noyau C^∞ . Ceci est fait au §3.c et §3.d pour le noyau de Bergman , et au §3.e pour le noyau de Szegő . A ce point nous devons utiliser des résultats plus précis de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes - ici , les inégalités de J.J.Kohn [11] , [12] , [13] . (Le résultat analogue pour un système d'opérateurs pseudo-différentiels simulant $\bar{\partial}_b$ est en général faux - du moins si la dimension est $n = 2$, ie. la dimension réelle du bord X est 3 , et $\bar{\partial}_b$ se réduit à une équation , comme le montre un contre-exemple de L. Nirenberg [16]) .

Enfin au §4 . nous montrons comment le développement asymptotique de la méthode de la phase stationnaire de [15] permet de retrouver simplement le terme dominant dans la sin-

gularité de B ou de S ; il permet théoriquement de trouver un développement asymptotique complet pour cette singularité .

Notre travail a évidemment été inspiré par celui de C. Fefferman [6] : le développement asymptotique de C. Fefferman ressemble de façon frappante à ceux qu'on obtient dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels , et nous espérons que ce travail contribuera à clarifier cette ressemblance . Comme on verra , l'article s'appuie de façon essentielle sur la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe de A.Melin et J.Sjöstrand [15] . Il utilise aussi des résultats de [3] ou [17] (ou de [5] dans le cas $n = 2$) sur les opérateurs à caractéristiques doubles et ceux qui s'y ramènent (ici $\bar{\partial}_b$ et $\square_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$).

Ce travail a été commencé lors d'un séjour des auteurs à l'Institut Mittag-Leffler , et nous tenons à remercier les organisateurs pour l'accueil chaleureux et l'ambiance inspiratrice que nous y avons trouvés . Nous remercions tout particulièrement L.Hörmander dont le manuscrit [8] nous a beaucoup aidé au début de cette recherche ; nous lui devons en particulier l'idée de la phase ψ du §1 . Nous remercions aussi N. Øvrelid pour les discussions qu'il a eues avec l'un de nous .

§1. Description du résultat : singularité des noyaux de Bergman et de Szegő .

a. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{C}^n , de frontière C^∞ $X = \partial\Omega$ strictement pseudo-convexe. Ω est donc défini par une inéquation $\rho < 0$, où ρ est une fonction réelle C^∞ sur \mathbb{C}^n , strictement pseudo-convexe (ie. la matrice de Levi $\partial^2\rho/\partial z_j \partial \bar{z}_k$ est hermitienne positive, non dégénérée) et $d\rho \neq 0$ si $\rho = 0$. Le bord X est la variété d'équation $\rho = 0$.

(1.1) Proposition.- Il existe une fonction $\psi(x,y) \in C^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ telle que

(i) $\psi(x,x) = \frac{1}{i} \rho(x)$, et $d_x''\psi$, $d_y'\psi$ sont nulles d'ordre infini pour $x = y$.

(ii) $\psi(x,y) = -\overline{\psi(y,x)}$

(deux telles fonctions diffèrent par une fonction nulle d'ordre infini pour $x = y$)

Ce résultat est bien connu ; la condition (i) détermine complètement le développement de Taylor de ψ le long de la diagonale $x = y$:

$$\psi(x+h,x) \sim \frac{1}{i} \sum \frac{\partial^\alpha \rho}{\partial z^\alpha} (x) h^\alpha / \alpha!$$

qui implique, comme on voit aussitôt

$$\psi(x+h,x+k) \sim \frac{1}{i} \sum \frac{\partial^{\alpha+\beta} \rho}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} (x) \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\bar{k}^\beta}{\beta!}$$

et on sait qu'on peut choisir $\psi \in C^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ admettant le développement de Taylor ci-dessus le long de la diagonale $x=y$.

D'autre part si ψ satisfait à (i), il en est de même de la fonction $-\overline{\psi(y,x)}$, donc aussi de $\frac{1}{2}(\psi(x,y) - \overline{\psi(y,x)})$, qui satisfait à (ii), parceque ρ est réelle.

Dans la suite ψ désigne une fonction C^∞ qui satisfait aux conditions (i) et (ii) de la proposition(1.1)

(1.2) Proposition. - On a

$$\frac{1}{i} [\Psi(x,y) + \Psi(y,x) - \Psi(x,x) - \Psi(y,y)] = L_{\rho}(x-y) + o(|x-y|^3)$$

où $L_{\rho}(z) = \sum \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} z_j \bar{z}_k$ est la forme hermitienne associée à la matrice de Levi de ρ .

On le voit aussitôt en faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 à partir du point (x,x) : si $\Phi(x,y)$ désigne le membre de gauche de la proposition (1.2), on a, pour $y = x$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{i} \Psi(y,x) + \rho(y)\right) = 0 \quad (\text{pour } x = y)$$

(puisque $d_y^{\alpha} \Psi(x,y)$ est nul d'ordre infini pour $x = y$), et de même $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \Phi = 0$ pour $x = y$. Enfin

$\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} \Phi = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_j \partial \bar{y}_k}(x)$ pour $x = y$ (les dérivées mixtes des autres termes sont toutes nulles pour $x = y$).

(1.3) Corollaire. - Il existe un nombre $C > 0$ tel qu'on ait

$$\text{Im } \Psi(x,y) \geq C (d(x,X) + d(y,X) + |x-y|^2) + o(|x-y|^3)$$

pour $x, y \in \bar{\Omega}$.

($d(x,X)$ désigne la distance de x à X , ou à $\bar{\Omega}$)

En effet on a $\text{Im } \Psi(x,y) = \frac{1}{2i} (\Psi(x,y) - \overline{\Psi(y,x)})$, et comme $\rho < 0$ dans Ω , et $d\rho \neq 0$ sur X , il existe un nombre $C' > 0$ tel que $\frac{1}{i} \Psi(x,x) = -\rho(x) \geq C' d(x,X)$ pour $x \in \bar{\Omega}$ (donc aussi $\frac{1}{i} \Psi(y,y) \geq C' d(y,X)$ pour $y \in \bar{\Omega}$).

Quitte à ajouter à Ψ une fonction nulle au voisinage de la diagonale, de partie imaginaire ≥ 0 et assez grande hors d'un petit voisinage de la diagonale, on peut alors supposer que Ψ satisfait à l'inégalité

$$(1.4) \quad \text{Im } \Psi(x,y) \geq C (d(x,X) + d(y,X) + |x-y|^2) \quad \text{pour } x, y \in \bar{\Omega}$$

C étant une constante > 0 convenable .

Dans toute la suite, Ψ désigne une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de la proposition (1.1), et à (1.4). Notre but est de prouver le résultat suivant :

(1.5) Théorème. - Il existe un symbole $s \in S^{n-1}(X \times X \times \mathbb{R}_+)$, admettant un développement asymptotique

$$s(x, y, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{n-1-k} s_k(x, y)$$

tel que le noyau de Szegő $S(x, y)$ diffère par une fonction C^∞ de la distribution définie par l'intégrale oscillante

$$\int_0^\infty e^{it\Psi(x, y)} s(x, y, t) dt$$

Il existe un symbole $b \in S^n(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$, de développement asymptotique

$$b(x, y, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{n-k} b_k(x, y)$$

tel que le noyau de Bergman $B(x, y)$ diffère par une fonction C^∞ sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{it\Psi(x, y)} b(x, y, t) dt$$

Des formules classiques (valables si $p \neq 0$, $\text{Re } p \geq 0$)

$$(1.6) \quad \text{pf} \int_0^\infty e^{-tp} t^m dt = \begin{cases} m! p^{-m-1} & \text{si } m \text{ est entier } \geq 0 \\ \frac{(-1)^m}{(-m-1)!} p^{-m-1} (\text{Log } p + \gamma - \sum_0^{m-1} 1/j) & \text{si } m \text{ est entier } < 0 \end{cases}$$

(où γ désigne la constante d'Euler : $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_1^m \frac{1}{j} - \text{Log } m$)
on déduit alors aussitôt

(1.7) Corollaire. - Il existe des fonctions C^∞ F, G sur $X \times X$
 (resp. F', G' sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$) telles que

$$S = F (-i \psi)^{-n} + G \text{Log}(-i \psi)$$

$$B = F' (-i \psi)^{-n-1} + G' \text{Log}(-i \psi)$$

(sur X^2 , on a noté, un peu abusivement, par $(-i \psi)^{-n}$, la distribution limite pour $\varepsilon \rightarrow +0$ des fonctions $(-i \psi + \varepsilon)^{-n}$)

Les formules (1.6) fournissent en fait des fonctions F, G, F', G' telles que

$$(1.8) \begin{aligned} F &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k)! s_k (-i \psi)^k \text{ mod. } \psi^n \\ F' &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)! b_k (-i \psi)^k \text{ mod. } \psi^{n+1} \\ G &\sim \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}/k! s_{n+k} (-i \psi)^k \\ G' &\sim \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}/k! b_{n+k+1} (-i \psi)^k \end{aligned}$$

où dans les deux dernières relations, le signe \sim signifie que les deux membres ont même série de Taylor le long de la diagonale de X dans X^2 ou $\bar{\Omega}^2$.

On retrouve le résultat de C. Fefferman [6] en faisant $x = y$. Nous verrons au n°4 comment la méthode de la phase stationnaire de [15] permet de retrouver le terme dominant, c'est à dire la restriction de $F(x, y)$ ou de $F'(x, y)$ à la diagonale de X .

b. Faisons pour terminer quelques remarques sur les développements asymptotiques qui interviennent dans les énoncés (1.6) (1.7) et (1.8) .

Remarquons d'abord qu'il résulte de (1.4) que , dans $\bar{\Omega}$ toute dérivée de ψ^{-1} est majorée (à une constante près) par une puissance de $1/d$, si d désigne la distance du point (x,y) à la diagonale de X . Par suite

(1.9) Pour qu'une fonction f , C^∞ sur X^2 ou sur $\bar{\Omega}^2$ soit divisible par ψ , il faut et il suffit que la série de Taylor de f soit divisible par celle de ψ en tout point de $\text{diag}(X)$. En particulier si f est nulle d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$, $f \psi^{-m}$ et $f \text{Log}(-i\psi)$ sont C^∞ .

(1.10) Remarque.- Soit $a(x,y,t) \sim \sum a_k(x,y) t^{m-k}$ un symbole (sur $X^2 \times \mathbb{R}_+$, ou sur $\bar{\Omega}^2 \times \mathbb{R}_+$) , et soit T la distribution $\int_0^\infty e^{it\psi} a dt$ (sur X^2 ou $\bar{\Omega}^2$) . Alors la classe de T mod. les fonctions C^∞ ne dépend que des séries de Taylor de ψ et des a_k le long de $\text{diag}(X)$.

On a en effet comme ci-dessus

$$T = \sum_0^m k! a_k (-i\psi)^{-k-1} + G \text{Log}(-i\psi) \quad \text{mod. } C^\infty$$

où la série de Taylor de G le long de $\text{diag}(X)$ est donnée par

$$G \sim \sum_{k < 0} (-1)^k / (1-k)! a_k (-i\psi)^{1-k}$$

Il est clair que la série de Taylor de G le long de $\text{diag}(X)$ ne dépend que de celles de ψ et des a_k . D'autre part si $\psi - \psi'$ est nulle d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$, $1 - \psi'/\psi = (\psi - \psi')/\psi$ est C^∞ , nulle d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$, donc aussi $\text{Log}(\psi'/\psi)$, et $\psi'^{-k} - \psi^{-k}$, pour tout k .

(Il est d'ailleurs aisé de vérifier que si $a \sim \sum_{k \leq m} t^k a_k$ et $b \sim \sum_{k \leq m} t^k b_k$ sont deux symboles, et si $\psi' - \psi$ et tous les $a_k - b_k$ sont nuls d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$,

$$e^{it\psi} a - e^{it\psi'} b$$

est un symbole de degré $-\infty$ sur $X^2 \times \mathbb{R}_+$ ou $\bar{\Omega}^2 \times \mathbb{R}_+$)

(1.11) Proposition. - Si $T = F \psi^{-m-1} + G \text{Log}(-i\psi)$ est une fonction C^∞ (sur X^2 ou $\bar{\Omega}^2$), alors F est divisible par ψ^{m+1} , et G est nulle d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$.

preuve: commençons par la remarque élémentaire suivante : si $f(u)$ et $h(u)$ sont deux fonctions C^∞ sur la demi-droite $u \geq 0$, avec $\text{Re } h \geq 0$ et $h'(0) \neq 0$, et si $f \text{Log } h$ est C^∞ pour $u \geq 0$, alors f est nulle d'ordre infini pour $u = 0$. En effet on a $h(u) = u h_1(u)$, avec $\text{Re } h_1 \geq 0$ et $h_1(0) \neq 0$, donc $\text{Log } h - \text{Log } u$ est C^∞ ; d'autre part si f n'est pas nulle d'ordre infini pour $u = 0$, il existe un entier k et une fonction $C^\infty f_1$ tels que $f_1(0) \neq 0$, $f = u^k f_1$; donc $f \text{Log } h - f_1 u^k \text{Log } u$ est C^∞ , et $f \text{Log } h$ n'est pas plus C^∞ que $u^k \text{Log } u$.

Si alors T est C^∞ (sur X^2 ou $\bar{\Omega}^2$), la fonction $G \text{Log}(-i\psi) \psi^{m+1}$ est C^∞ sur toute demi-courbe (paramétrée par $u \geq 0$) de X^2 (ou $\bar{\Omega}^2$) issue d'un point $(x, x) \in \text{diag}(X)$ et dont le vecteur tangent à l'origine n'est pas annulé par $d\psi$, et la restriction de $\psi^{m+1} G$ (donc aussi celle de G) à une telle courbe est nulle d'ordre infini à l'origine. Mais comme $d\psi \neq 0$ le long de $\text{diag}(X)$, ceci implique évidemment que G est nulle d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$.

Ceci peut se formuler de la façon équivalente suivante : si $T = \int_0^\infty e^{it\psi} a dt$ (où $a \sim \sum_{k \leq m} t^k a_k(x, y)$) est une fonction C^∞ , il existe un symbole $b \sim \sum t^k b_k$ tel que $e^{it\psi} a \sim \frac{d}{dt}(e^{it\psi} b)$ (ie. $a \sim (i\psi + \frac{d}{dt})b$). En particulier le terme dominant a_m est divisible par ψ . Ceci équivaut au résultat sur le symbole de [15] §6, dans le cas particulier où la phase est précisément la fonction ψ .

§2 Construction d'un projecteur approximatif .

Dans la suite de l'article , nous notons C^∞ l'espace des fonctions de classe C^∞ , et $C^{-\infty}$ l'espace des distributions (si X est une variété C^∞ , E un fibré vectoriel C^∞ sur X , $C^\infty(X,E)$ désigne l'espace des sections C^∞ de E , et $C^{-\infty}(X,E)$ l'espace des sections distribution) .

Si f est une distribution sur une variété X , on dit que f est de classe C^∞ au voisinage d'un vecteur cotangent non nul $\xi \in T^*X \setminus 0$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel A elliptique en ξ tel que $Af \in C^\infty$. Le spectre singulier de f est le cône $\text{Sp Sing } f$ des $\xi \in T^*X \setminus 0$ tels que f ne soit pas de classe C^∞ au voisinage de ξ .

Nous dirons qu'un opérateur A sur les distributions est régulier s'il est propre (ie. pour tout compact K il existe un compact L tel que $\text{supp } f \subset K$ implique $\text{supp } Af \subset L$, et $\text{supp } f \subset \text{int } L$ implique $\text{supp } Af \subset \text{int } K$) , et s'il diminue le spectre singulier (de façon équivalente , A est propre et le spectre singulier de son noyau-distribution est contenu dans l'anti-diagonale , ensemble des $(x,x,\xi,-\xi)$ de T^*X^2)

Si A et B sont deux opérateurs sur les distributions , nous écrirons $A \sim B$ si $A-B$ est un opérateur de degré $-\infty$ (de noyau-distribution C^∞) . Si A et B sont deux opérateurs réguliers , et U un cône ouvert de $T^*X \setminus 0$, nous dirons que A et B sont équivalents dans U ($A-B \sim 0$ dans U) si $(A-B)f$ est de classe C^∞ au voisinage de tout point de U , pour toute distribution f (de façon équivalente , le spectre singulier du noyau-distribution de U est disjoint de $U \times U$) .

a. Le modèle local .

On se place sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, où on note la variable (x, y) ($x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$) , et on note (ξ, η) la variable duale.

Soit D_0^\pm le système d'opérateurs pseudo-différentiels

$$(2.1) \quad D_0^\pm = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \pm x_j |D_y| \right) \quad , \quad j = 1, \dots, p$$

où comme d'habitude $|D_y|$ est défini par $\widehat{|D_y|} f = |\eta| \widehat{f}$ (en fait D_0 n'est pas vraiment un opérateur pseudo-différentiel , car la fonction $|\eta|$ n'est pas C^∞ au voisinage de $\eta = 0$; mais nous ne nous intéressons qu'au comportement de D_0^\pm au voisinage du cône caractéristique $x = \xi = 0$. Si on veut un vrai système d'opérateurs pseudo-différentiels , on peut remplacer $|\eta|$ par $\chi(|\xi|/|\eta|) |\eta|$, où χ est une fonction réelle C^∞ , avec $\chi(t) = 1$ si $t \leq 1$, $\chi(t) = 0$ si $t \geq 2$: le système obtenu en modifiant ainsi D_0^\pm est encore elliptique pour $\xi \neq 0$, et son symbole total coïncide avec celui de D_0^\pm pour $|\xi| < |\eta|$).

Soit R l'opérateur linéaire continu : $C_0^\infty(\mathbb{R}^q) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$(2.1) \quad Rf(x, y) = (2\pi)^{-q} \int e^{iy \cdot \eta} e^{-\frac{1}{2} |\eta|^2} |\eta| (|\eta|/\pi)^{p/4} \widehat{f}(\eta) d\eta$$

On constate aussitôt qu'on a $D_0^+ R = 0$, $R^* R = \text{Id}$. On sait en outre (cf. [3] , [17]) qu'il existe un opérateur régulier L_0^\pm tel que

$$(2.3) \quad \text{Id} \sim R R^* + L_0^+ D_0^+$$

$$\text{Id} \sim L_0^- D_0^-$$

En fait , avec les notations de [3] , on peut choisir $L_0 \in \text{OPS}^{-1, -1}(\mathbb{R}^n, \Sigma)$ où Σ est le cône symplectique $x = \xi = 0$. En particulier L_0 est un opérateur pseudo-différentiel de type $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, de degré $-\frac{1}{2}$, donc est continu $H_{\text{loc}}^s \rightarrow H_{\text{loc}}^{s+\frac{1}{2}}$ pour tout s .

L'opérateur $R R^*$ est défini par l'intégrale oscillante

$$(2.4) \quad R R^* f(x, y) = (2\pi)^{-q} \iint \exp[i\langle y - y', \eta \rangle - \frac{1}{2}(|x|^2 + |x'|^2) |\eta|] \left(\frac{|\eta|}{\pi}\right)^{\frac{p}{2}} f(x, y) dx' dy' d\eta$$

Donc $R R^*$ est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe, au sens de [15]; son symbole total est une fonction homogène (ici de degré $p/2$)

Nous renvoyons à [15] pour l'étude systématique de ces opérateurs, et nous bornons ici à faire les rappels suivants: dans [15] on considère des distributions définies par une intégrale oscillante:

$$(2.5) \quad \langle T, f \rangle = \iint e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) f(x) dx d\theta$$

où $a \in S_c^m$ est un symbole 'classique', c'est à dire admet un développement asymptotique

$$a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k}(x, \theta)$$

où a_{m-k} est homogène de degré $m-k$ en θ , et C^∞ pour $\theta \neq 0$ (ici le degré m sera toujours entier ou demi-entier; mais les degrés des termes du développement asymptotique diffèrent tous par des entiers). La phase φ satisfait aux conditions suivantes:

(2.6) (i) φ est C^∞ , homogène de degré 1 en θ (ie. $\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda \varphi(x, \theta)$ pour $\lambda > 0$) pour $\theta \neq 0$, et $\text{Im } \varphi \geq 0$.

(ii) φ n'a pas de point critique (ie. $d_x \varphi \neq 0$ si $d_\theta \varphi = 0$) et les différentielles $d(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j})$ sont linéairement indépendantes là où les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}$ sont toutes nulles.

Plus généralement on considère des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe, définis par une intégrale oscillante:

$$(2.7) \quad A f(x) = \iint e^{i\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) f(y) dy d\theta$$

où a est à nouveau un symbole 'classique', et φ satisfait aux conditions (2.6)(i),(ii), avec en outre

$$(2.6)(iii) \quad d_x \varphi \neq 0 \quad \text{et} \quad d_y \varphi \neq 0 \quad \text{si} \quad d_\theta \varphi = 0$$

Pour étudier ces opérateurs il est commode d'utiliser le langage et la technique des fonctions et des variétés presque analytiques ([15], §1) : si f est une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \setminus 0$, nous écrirons $f \sim 0$ si f est nulle d'ordre infini sur le sous-espace réel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0$; f est presque analytique si $d''f \sim 0$. Toute fonction C^∞ à valeurs complexes $f(x, \theta)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0$ possède un prolongement presque analytique \tilde{f} , qu'on peut choisir homogène de degré m en θ (resp. dans $S^m(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \setminus 0)$) si f est homogène de degré m en θ (resp. $F \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$); et deux tels prolongements sont équivalents.

Une sous-variété $\Lambda \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \setminus 0$ lisse, de codimension réelle $2p$, est presque analytique si elle est localement définie par p équations $\varphi_j = 0$, $j=1, \dots, p$, où les φ_j sont presque analytiques, et les différentielles $d\varphi_j$ sont linéairement indépendantes au voisinage des points réels de Λ ; l'idéal de Λ est alors l'idéal de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$ engendré par les restrictions des φ_j aux réels. Deux variétés presque analytiques Λ, Λ' sont équivalentes si elles peuvent être définies localement par des équations équivalentes, ou, ce qui revient au même d'après [15], §1, si elles ont même idéal. Si Λ est une variété presque analytique, une fonction f sur Λ est presque analytique si c'est la restriction d'une fonction presque analytique; on écrit $f \sim f'$ si $f-f'$ est la restriction à Λ d'une fonction ~ 0 , ou, ce qui revient au même d'après [15] §1, si $|f-f'| = O(|\text{Im } z|^N)$ pour tout N , pour $z \in \Lambda$. Les classes de fonctions presque analytiques équivalentes correspondent aux classes mod. l'idéal de Λ de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$.

Dans la situation (2.5) ci-dessus, on introduit des prolongements presque analytiques $\tilde{\varphi}$, \tilde{a} de φ et a .

On note \tilde{N} la variété presque complexe d'équations $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \theta_j} = 0$ ($d'_\theta \tilde{q} = 0$), et $\tilde{\Lambda}$ l'image de \tilde{N} par l'application $(x, \theta) \mapsto (x, d'_x \tilde{q})$. $\tilde{\Lambda}$ est une variété presque analytique (d'après [15] §3), Lagrangienne, ie. $\sum d\xi_j \wedge dx_j \sim 0$ sur $\tilde{\Lambda}$, ou, ce qui revient au même, $\tilde{\Lambda}$ est de dimension n et son idéal est stable par crochet de Poisson.

De même dans la situation (2.7) ci-dessus, on introduit la variété presque analytique \tilde{C} image de \tilde{N} par l'application $(x, y, \theta) \mapsto (x, y, d'_x \varphi, -d'_y \varphi)$. C'est une relation canonique (ie. \tilde{C} est Lagrangienne pour la forme $\sum d\xi_j \wedge dx_j - \sum d\eta_k \wedge dy_k$).

On montre (dans [15] §4) que l'ensemble des opérateurs de la forme (2.7), avec $a \in S_c^{m'}$, $m' = m + 1/4(\dim X + \dim Y) - \frac{1}{2}N$ ne dépend que de la relation canonique \tilde{C} (et pas de φ , ni de N); on note cet ensemble $I_c^m(X, Y, \tilde{C})$.

Dans le cas présent la phase est

$$\varphi = \langle y - y', \eta \rangle + i/2(|x|^2 + |x'|^2) |\eta| \quad (|\eta| = (\sum \eta_j^2)^{\frac{1}{2}})$$

Elle est analytique, donc a un prolongement holomorphe dans un voisinage conique de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^q \setminus 0$ dans $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^q \setminus 0$.

Nous noterons \sum^0 le cône complexe d'équation

$$(2.8) \quad \mathcal{G}(D_0^+) = 0 \quad (\text{c'est à dire } \xi = ix |\eta|)$$

$\sum^0 \wedge \overline{\sum^0}$ est le complexifié du cône réel $x = \xi = 0$.

\tilde{N} est le cône complexe $y - y' + i/2(|x|^2 + |x'|^2) \frac{\eta}{|\eta|} = 0$, et la relation canonique \tilde{C} , que nous noterons C_0^+ , est le cône complexe des $(x, y, x', y', \xi, \eta, \xi', \eta')$ tels que

$$(2.9) \quad \begin{cases} y' &= y + i/2(|x|^2 + |x'|^2) \\ \xi &= ix |\eta| \\ \xi' &= -ix' |\eta| \\ \eta' &= \eta \end{cases}$$

(2.10) Remarque. - Il est clair que C_0^+ est contenue dans $\Sigma^0 \times \bar{\Sigma}^0$, et contient $\text{diag}(\Sigma^+)$ (Σ^+ désignant le cône $x = \xi = 0$; on le voit en faisant $x = x' = 0$ dans les formules (2.9)).

En fait C_0^+ est la seule relation canonique qui ait ces propriétés : en effet si C' est une telle relation canonique, C'_1 est involutive (pour la forme $\sum_1^p d\xi_j \wedge dx_j - d\xi'_j \wedge dx'_j + \sum_1^p d\eta_j \wedge dy_j - d\eta'_j \wedge dy'_j$), donc tangente au feuilletage bicaractéristique de $\Sigma^0 \times \bar{\Sigma}^0$ (qui est involutive) ; or on constate aussitôt que le fibré tangent du feuilletage bicaractéristique de $\Sigma^0 \times \bar{\Sigma}^0$ est linéairement disjoint du fibré tangent de $\text{diag}(\Sigma^+)$: le long de $\text{diag}(\Sigma^+)$, il est engendré par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_j} + i|\eta_j| \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $\frac{\partial}{\partial x_j} - i|\eta_j| \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ($j=1, \dots, p$) ; et comme $\dim(\Sigma^+) + \text{codim}(\Sigma^0 \times \bar{\Sigma}^0) = 2n$, C' est nécessairement la réunion des feuilles bicaractéristiques passant par $\text{diag}(\Sigma^+)$, donc égale à C_0^+ .

En outre C_0^+ est strictement positive au sens de [15], §3 (presque par définition)

Remarquons aussi que dans le cas présent, Σ^0 (et C_0^+) coupe transversalement le sous espace réel, et la partie imaginaire d'un point de Σ^0 (ou de C_0^+) a même ordre de grandeur que la distance de ce point à la partie réelle de Σ^0 (ou de C_0^+) ; aussi la classe d'une fonction presque analytique sur Σ^0 (ou C_0^+) est entièrement déterminée par son développement de Taylor le long des points réels, ce qui rend la situation plus 'algébrique'.

b. Cas général .

Soit X une variété C^∞ (séparée, dénombrable à l'infini), et soit $D = (D_1, \dots, D_p)$ un système de p opérateurs pseudo-différentiels 'classiques' de degré m tels que

(2.11) (i) $[D_j, D_k] \sim \sum A_{jk}^m D_m$, où les A_{jk}^m sont des opérateurs pseudo-différentiels 'classiques' de degré $\leq m-1$.

(ii) La matrice $\mathcal{G}([D_j, D_k^*]) = \frac{1}{i} \{d_j, \bar{d}_k\}$ est ou bien hermitienne positive non dégénérée, ou bien hermitienne négative non dégénérée sur les zéros communs des $d_j = \mathcal{G}(D_j)$

(Pour définir les adjoints , nous munissons X d'une mesure de densité C^∞ , >0 - par exemple le volume pour une métrique Riemannienne C^∞ . Les assertions ci-dessous ne dépendent pas du choix d'une telle mesure .)

Nous noterons Σ^\pm le cône $d_j = 0$, $\pm \frac{1}{i} \{d_j, \bar{d}_k\} \gg 0$ dans $T^*X \setminus 0$: c'est un cône lisse , symplectique , de codimension $2p$ (l'hypothèse $\pm \frac{1}{i} \{d_j, \bar{d}_k\} \gg 0$ implique que les différentielles des d_j , \bar{d}_j sont linéairement indépendantes le long de Σ^\pm).

On note encore Σ^0 la (classe de) variété presque analytique définie par les équations $\tilde{d}_j = 0$, $j=1, \dots, p$, où \tilde{d}_j est un prolongement presque analytique de d_j . La condition (2.11)(i) implique que Σ^0 est involutive (l'idéal engendré par les d_j est stable par crochet de Poisson)

Il résulte de [3] (cf. aussi [9] dans le cas où les D_j sont analytiques) que pour tout $\xi \in \Sigma^\pm$, il existe un isomorphisme canonique ϕ défini au voisinage de ξ , et un opérateur intégral de Fourier V associé à ϕ et elliptique au voisinage de ξ , tels qu'on ait , au voisinage de ξ , U désignant une parametrix de V

(2.12) $D \sim U C D_0 V$ (au voisinage de ξ) , où C est une matrice elliptique d'opérateurs pseudo-différentiels classiques.

(2.13) Proposition.- Il existe une (classe de) relation canonique C^+ presque analytique sur $T^*X \times T^*X$, unique à équivalence près , telle

(i) $C^+ \subset \Sigma^0 \times \overline{\Sigma^0}$

(ii) L'ensemble des points réels de C^+ est exactement la diagonale de Σ^+ .

C^+ est strictement positive (au sens de [15], §3) .

En effet on se ramène aussitôt au cas du modèle local de a. , grâce à la transformation canonique ϕ ci-dessus , et la proposition résulte de la remarque (2.10) .

(2.14) Théorème. - Il existe des opérateurs réguliers S et L tels que (i) $S \sim S^* \sim S^2$

(ii) $DS \sim 0$, et $Id \sim S + LD$

S est complètement déterminé à un opérateur de degré $-\infty$ près par ces conditions , et on a $S \in I_c^0(X^2, C^+)$

preuve: remarquons pour commencer que l'assertion du théorème est locale . Tout d'abord , si W est un cône ouvert de $T^*X \setminus 0$, et si S, L, S', L' sont deux systèmes d'opérateurs réguliers satisfaisant aux conditions (i) et (ii) dans W , on a

$$S \sim (S' + L'D)S \sim S'S \text{ dans } W$$

et , de même $S' \sim S S'$ dans W . En outre , comme $S \sim S^*$ et $S' \sim S'^*$ (dans W) , on a

$$S' \sim S S' \sim (S S')^* = S'^* S^* \sim S'S \sim S$$

Ceci démontre l'unicité de S (à un opérateur de degré $-\infty$ près).

Soit maintenant W_α un recouvrement ouvert localement fini de $T^*X \setminus 0$, et pour tout α , soient S_α, L_α des opérateurs réguliers satisfaisant à (i) et (ii) dans W_α . Choisissons , comme il est loisible , une partition pseudo-différentielle de l'unité Q_α subordonnée aux W_α (ie. $Q_\alpha \sim 0$ au voisinage de \bar{W}_α , la somme $\sum Q_\alpha$ est localement finie , et $\sum Q_\alpha \sim Id$) . Posons

$$S \sim \sum Q_\alpha S_\alpha \quad , \quad L \sim \sum Q_\alpha L_\alpha$$

On a alors $S_\alpha \sim S$ dans W_α , pour tout α (car $S_\alpha \sim S_\beta$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$, donc $Q_\beta S_\beta \sim Q_\beta S_\alpha$ dans U_α pour tout β , de sorte qu'on a , pour tout α , $S = \sum_\beta Q_\beta S_\alpha \sim S_\alpha$ dans W_α). On a aussi $LD = \sum Q_\alpha L_\alpha D \sim \sum Q_\alpha (1 - S_\alpha) \sim \sum Q_\alpha (1 - S) \sim Id - S$.

Il suffit donc de prouver le théorème au voisinage de chaque point de $T^*X \setminus 0$. Il n'y a pas de difficulté en dehors de la variété caractéristique $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, où D est

elliptique (on peut donc prendre, dans le complémentaire de Σ , $S = 0$, $L \sim (D^*D)^{-1} D^*$, où $(D^*D)^{-1}$ désigne une parametrix de l'opérateur D^*D , qui est elliptique). Il n'y a pas non plus de difficulté au voisinage d'un point de Σ^- (on peut prendre $S = 0$, $L \sim U L_0^- C^{-1} V$, U et V étant comme dans (2.12), et C^{-1} désignant une parametrix de C). Reste à examiner ce qui se passe au voisinage des points de C^+ : dans un premier essai, nous choisissons (U, V , et C étant comme dans (2.12))

$$S_1 = U R R^* V, \quad L_1 = U L_0^+ C^{-1} V.$$

On a évidemment $S_1 \sim S_1^2$, $D S_1 \sim 0$, et $\text{Id} \sim S_1 + L_1 D$, mais il n'y a aucune raison pour qu'on ait $S_1 \sim S_1^*$.

Pour corriger, nous remarquons que $R^* U^* U R$ est un opérateur pseudo-différentiel classique elliptique. Soit B une parametrix, et posons

$$S = U R B R^* U^*$$

On a $B \sim B^*$, donc $S \sim S^*$. Des relations $R^* V U R \sim \text{Id}$, et $B R^* U^* U R \sim \text{Id}$, on déduit

$$S S_1 = (U R B R^* U^*) (U R R^* V) = U R (B R^* U^* U R) R^* V \sim S_1$$

$$S_1 S = (U R R^* V) (U R B R^* U^*) = U R (R^* V U R) B R^* U^* \sim S$$

D'où $D S \sim D S_1 S \sim 0$, $S^2 \sim S S_1 S \sim S_1 S \sim S$, et

$$(1-S)(1-S_1) = 1 - S - S_1 + S S_1 \sim 1 - S$$

D'où, avec $L = (1-S) L_1$

$$S + L D = S + (1-S) L_1 D \sim S + (1-S)(1-S_1) \sim \text{Id}$$

Enfin dans [15], §7, on prouve que $S = U R B R^* U^*$, qui est composé d'opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle ou complexe, et à symbole total classique, est encore

un opérateur intégral de Fourier à phase complexe , et à symbole total classique . Ici B est associé à la relation canonique identique (c'est un opérateur pseudo-différentiel) donc $R R^*$ et $R B R^*$ sont associés à la même relation canonique C_0^+ . U est associé à l'isomorphisme canonique ϕ^{-1} , et son adjoint U^* est associé à l'isomorphisme inverse ϕ , de sorte que $S = U R B R^* U^*$ est associé à la relation canonique $\phi^{-1} \circ C_0^+ \circ \phi = C^+$. Ceci achève la démonstration du théorème .

c. Cas de $\bar{\partial}_b$.

Nous reprenons les notations du n°1 : Ω désigne l'ouvert borné $\bar{\Omega} < 0$, sa frontière X est définie par $\bar{\Omega} = 0$, et on a $d\bar{\Omega} \neq 0$ sur X .

On note $T'' \subset TX \otimes \mathbb{C}$ l'ensemble des vecteurs anti-holomorphes tangents à X : les éléments de T'' en un point x de X sont donc les vecteurs $\sum a_j \partial/\partial \bar{z}_j$ tels que $\sum a_j \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}_j}(x) = 0$. T'' est un sous-fibré vectoriel C^∞ de $TX \otimes \mathbb{C}$; dans l'ouvert X_k de X où on a $\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}_k} \neq 0$, T'' admet pour base les champs (à coefficients C^∞)

$$D_j^k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}_k} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} , \quad j \neq k$$

T'' satisfait à la condition d'intégrabilité de Frobenius (autrement dit si X et Y sont deux sections C^∞ de T'' , il en est de même du crochet $[X, Y]$ - en fait on a $[D_j^k, D_m^k] = 0$ dans X_k) . L'orthogonal de T'' dans $T^*X \otimes \mathbb{C}$ admet pour base les restrictions $d\bar{z}_j|_X$.

Rappelons que $\bar{\partial}_b$ est l'opérateur différentiel : $C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X, T''^*)$ défini par $\bar{\partial}_b f = df|_{T''}$; on a aussi $\bar{\partial}_b f = d''\tilde{f}|_{T''}$ si \tilde{f} est n'importe quel prolongement C^∞ de f sur \mathbb{C}^n . Dans X_k , T''^* admet pour base les $d\bar{z}_j|_{T''}$, $j \neq k$, et on a

$$\bar{\partial}_b f = \sum_{j \neq k} D_j^k f \, d\bar{z}_j|_{T''}$$

Le cône caractéristique Σ de $\bar{\partial}_b$ est le sous-fibré vectoriel réel de T^*X orthogonal de T'' (donc aussi du conjugué $T' = \overline{T''}$). Il est engendré par la forme

$$\frac{1}{i} d'\varphi|_X = -\frac{1}{i} d''\varphi|_X$$

(en tant que fibré vectoriel ; en tant que cône, une fois qu'on a ôté la section nulle, il reste deux nappes, engendrées l'une par $\frac{1}{i} d'\varphi|_X$, l'autre par $-\frac{1}{i} d'\varphi|_X$.

Si $Z = \sum a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, $W = \sum b_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ sont deux sections C^∞ de T'' (que par commodité nous prolongeons en champs anti-holomorphe C^∞ au voisinage de X), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}([Z, W^*]) \left(\frac{1}{i} d'\varphi \right) &= -\mathcal{G}([Z, \bar{W}]) \left(\frac{1}{i} d'\varphi \right) = \\ &= -i \langle [Z, \bar{W}], \frac{1}{i} d'\varphi \rangle = -\langle [Z, \bar{W}], d'\varphi \rangle \end{aligned}$$

Mais la composante holomorphe de $[Z, \bar{W}]$ est $\theta_Z \bar{W} = \sum a_j \frac{\partial \bar{b}_k}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_k}$. On a donc

$$-\langle [Z, \bar{W}], d'\varphi \rangle = -\sum a_j \frac{\partial \bar{b}_k}{\partial z_j} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} \quad (\text{sur } X)$$

Comme on a $\langle \bar{W}, d'\varphi \rangle = \langle \bar{W}, d\varphi \rangle = 0$ sur X , et comme Z est tangent à X , on a

$$\theta_Z \langle \bar{W}, d'\varphi \rangle = \sum a_j \left(\frac{\partial \bar{b}_k}{\partial z_j} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} + \bar{b}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_k} \right) = 0 \quad \text{sur } X$$

d'où finalement

$$\mathcal{G}([Z, W^*]) \left(\frac{1}{i} d'\varphi \right) = \sum a_j \bar{b}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_k} = L_\varphi(Z, W)$$

où L_φ est la forme sesquilinéaire hermitienne associée à la matrice de Levi de φ (comme dans (1.2)).

Ainsi si φ est strictement pseudo-convexe, $\bar{\partial}_b$ satisfait aux hypothèses du théorème (2.14). La variété caractéristique Σ est symplectique, et Σ^\pm est la nappe des multiples positifs de $\pm \frac{1}{i} d'\varphi|_X$.

Le théorème (2.14) affirme qu'il existe $S' \in I_C^0(X \times X, C^+)$

et L' régulier (en fait $L' \in OPS^{-1,-1}(X, \Sigma)$ avec les notations de [3]) tels que

$$(2.15) S' \sim S'^* \sim S'^2, \quad \bar{\partial}_b S' \sim 0, \quad Id \sim S' + L' \bar{\partial}_b$$

C^+ désigne la relation canonique presque analytique définie par la proposition(2.13) .

(2.16) Proposition.- C^+ est la relation canonique associée à la phase $(x,y,t) \mapsto t \Psi(x,y)$ sur $X \times X \times \mathbb{R}_+$, Ψ étant la fonction définie au n°1 .

En effet la fonction $t \Psi(x,y)$ satisfait bien aux conditions (2.6) (i)(ii)(iii) ci-dessus : les points critiques sont les points où l'on a $\frac{\partial}{\partial t}(t \Psi) = 0$, c'est à dire $\Psi = 0$; l'ensemble des points critiques réels est donc $diag(X) \times \mathbb{R}_+$; et sur $diag(X)$ on a $d_x \Psi = -d_y \Psi = \frac{1}{i} d'p|_X \neq 0$ (donc à plus forte raison $d(\frac{\partial}{\partial t} t \Psi) \neq 0$) .

La relation canonique presque analytique associée à $t \Psi$ contient $diag(\Sigma^+)$, puisque sur $diag(X)$ on a $d_x(t \Psi) = -d_y(t \Psi) = t \frac{1}{i} d'p|_X$; et il résulte aussitôt du fait que $d_x'' \Psi$ et $d_y' \Psi$ s'annulent d'ordre infini sur $diag(\mathbb{C}^n)$ que cette relation canonique est contenue dans $\Sigma^0 \times \bar{\Sigma}^0$ (ici , cela signifie exactement que $\bar{\partial}_{b,x} \Psi$ et $\partial_{b,y} \Psi$ s'annulent à l'ordre infini sur $diag(X)$). La proposition(2.15) résulte donc de la proposition(2.13) .

Ainsi S' admet une représentation intégrale de la forme

$$(2.17) S'(x,y) = \int_0^\infty e^{it} \Psi(x,y) a(x,y,t) dt$$

où a est un symbole classique de degré $n-1$:

$$a(x,y,t) \sim \sum_{k=0}^\infty t^{n-1-k} a_k(x,y)$$

S' est un bon candidat pour approcher le noyau de Szegö S , et nous verrons au n°3 qu'il en diffère par une fonction de classe C^∞ .

§3 Le noyau de Bergman .a. Notations .

On conserve les notations antérieures pour $\bar{\Omega}$, X , γ , ψ et T'' . Nous noterons γ l'opérateur de restriction qui à $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ fait correspondre $f|X$; et si ω est une forme de type 0,1 nous noterons encore $\gamma\omega$ la restriction $\omega|T''$. On a donc

$$(3.1) \quad \gamma f = f|X$$

$$\gamma d''f = \bar{\partial}_b \gamma f$$

Pour passer de résultats concernant les traces sur X de fonctions holomorphes aux fonctions elles-mêmes , nous allons exploiter le fait qu'une fonction holomorphe est harmonique , donc qu'elle s'exprime au moyen du noyau de Poisson à partir de sa restriction à X . Nous noterons $K : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ l'opérateur qui résout le problème de Dirichlet . On a donc

$$(3.2) \quad \Delta K = 0$$

$$\gamma K = \text{Id}$$

Pour les propriétés des opérateurs tels que K , ou que l'opérateur G ci-dessous , et en particulier la façon dont ils se composent avec les opérateurs pseudo-différentiels , nous renvoyons à [1] , [2] . On sait que K se prolonge continument : $C^{-\infty}(X) \rightarrow C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ (où $C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des distributions portées par $\bar{\Omega}$) ; aussi l'adjoint K^* est continu $C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(X)$ et se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{-\infty}(X)$. L'opérateur K^*K est un opérateur pseudo-différentiel classique , elliptique de degré -1 , hermitien positif , et inversible (parce que K est injectif) ; son symbole est $(2|\xi|)^{-1}$. Nous poserons

$$(3.3) \quad A = (K^*K)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{la racine positive})$$

C'est un opérateur pseudo-différentiel classique, elliptique de degré $\frac{1}{2}$, hermitien positif et inversible; son symbole est $(2|\xi|)^{\frac{1}{2}}$. On a $AK^*KA = A A^{-2} A = \text{Id}$, donc KA est isométrique, et

$$(3.4) \quad H = KA^2K^*$$

est le projecteur orthogonal sur les formes harmoniques dans $L^2(\Omega)$. L'opérateur H est continu $C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ et se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{-\infty}(\bar{\Omega})$

Nous utiliserons enfin le résultat suivant: il existe un opérateur (unique) $G : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ (qui est un opérateur de Green au sens de [2]) tel que

$$(3.5) \quad H + G\Delta = \Delta G = \text{Id}, \quad K^*G = 0$$

En effet si G_1 est le noyau de Green du problème de Dirichlet, on a $\Delta G_1 = K + G_1\Delta = \text{Id}$, $\gamma G_1 = 0$, et l'opérateur $G = (1-H)G_1$ satisfait aux conditions (3.5) (car on a $K^*(1-H) = (1-K^*KA^2)K^* = 0$, donc $K^*(1-H)G_1 = 0$, $\Delta H = 0$, donc $\Delta(1-H)G_1 = \Delta G_1 = \text{Id}$; enfin H et $K\gamma$ sont deux projecteurs sur le même sous-espace, donc $HK\gamma = K\gamma$, $K\gamma H = H$, et $(1-H)(1-K\gamma) = (1-H)$, d'où

$$H + (1-H)G_1\Delta = H + (1-H)(1-K\gamma) = \text{Id} \quad)$$

En outre G_1 est hermitien ($G_1 = G_1^*$) car le problème de Dirichlet est auto-adjoint; comme il est continu $C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$, il se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{-\infty}(\bar{\Omega})$, et il en est de même pour $G = (1-H)G_1$.

b. Réduction au bord de Ω .

Soit B le projecteur de Bergman (projecteur orthogonal sur les fonctions holomorphes dans $L^2(\Omega)$). Comme une fonction holomorphe est harmonique, on a $B = HB$. Comme B et H sont tous deux auto-adjoints, on a aussi $B = BH = HBH =$

$= K A^2 K^* B K A^2 K^*$. Nous poserons

$$(3.6) \quad \begin{aligned} S_A &= AK^* B KA \\ P &= A S_A A \end{aligned}$$

On a donc $B = K P K^*$

Comme B est un projecteur orthogonal, et KA une isométrie sur un sous-espace contenant l'image de B , S_A est un projecteur orthogonal; son image est $AK^*(\text{Im}(B))$. Mais si f est harmonique, on a $AK^*f = A^{-1} A^2 K^* K \gamma f = A^{-1} \gamma f$. En particulier $AK^* B = A^{-1} \gamma B$. Comme les traces des fonctions holomorphes sont exactement les fonctions sur X annihilées par $\bar{\partial}_b$ (cf. [14]), on a $\text{Im}(\gamma B) = \gamma \text{Im}(B) = \text{Ker } \bar{\partial}_b$, et par suite

$$(3.7) \quad \text{l'image de } S_A \text{ est } A^{-1} \text{Ker } \bar{\partial}_b = \text{Ker } \bar{\partial}_b A$$

c. Construction d'un projecteur approximatif .

Le système $\bar{\partial}_b A$ satisfait encore aux conditions du théorème(2.14), avec les mêmes cônes Σ^+ , Σ , Σ^0 , et la même relation canonique C^+ (il est clair que dans le théorème (2.14) on peut remplacer les D_j par $D_j A$, si A est elliptique; les cônes Σ , Σ^+ , Σ^0 , et C^+ ne changent pas car ils ne dépendent que de l'idéal de fonctions C^∞ engendré par les symboles $\mathfrak{G}(D_j)$).

Le théorème(2.14) affirme donc qu'il existe un opérateur $S'_A \in I_C^0(X \times X, C^+)$ et un opérateur L'_A (qu'on peut en fait choisir dans $OPS^{-\frac{1}{2}, -1}(X, \Sigma)$) tels que

$$(3.8) \quad S'_A \sim S_A \star S_A^2, \quad \bar{\partial}_b A S'_A \sim 0, \quad S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A \sim \text{Id}$$

Quitte à remplacer S'_A par $\frac{1}{2}(S'_A + S_A \star)$, on peut même supposer $S'_A = S_A \star$. On posera encore

$$(3.9) \quad P' = A S'_A A$$

$$B' = K P' K^*$$

Comme $A \approx A^*$, on a $P' = P'^*$ et $B' = B'^*$. On a aussi

$$\bar{\partial}_b P' = \bar{\partial}_b A S'_A A \sim 0$$

$$B'^2 = KA S'_A AK^* KA S'_A AK = KA S'^2_A AK \sim B'$$

En vue de ce qui précède, B' est un bon candidat pour approcher le noyau de Bergman B .

(3.10) Proposition. - On a $d''B' \sim 0$

Voici une première démonstration : on a évidemment $d''d''KP' = 0$, et $d''^*d''KP' = \frac{1}{2} \Delta KP' = 0$. En outre on a

$$\gamma d'' KP' = \bar{\partial}_b \gamma KP' = \bar{\partial}_b P' \sim 0$$

Il résulte alors du théorème de régularité de la solution du problème d'' - Neumann (cf. [11], [12], [13]) qu'on a aussi $d'' KP' \sim 0$, et $d'' K P' K^* = d'' B' \sim 0$.

Cette démonstration est tout à fait immorale, car elle utilise le théorème de régularité de [12], alors qu'il est clair que celui-ci doit résulter essentiellement des constructions faites jusqu'à présent. Voici donc une autre démonstration qui n'utilise pas le résultat de régularité de [12].

(3.11) Lemme. - Il existe un symbole $b(x,y,t) \sim \sum b_k(x,y) t^{n-k}$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_+$ tel que

- (i) $b(x,y,t) = \overline{b(y,x,t)}$ (donc $b_k(x,y) = \overline{b_k(y,x)}$ pour tout k)
- (ii) $d''_x b_k$ et $d''_y b_k$ sont nuls d'ordre infini, pour tout k , sur $\text{diag}(\mathbb{C}^n)$.
- (iii) $P' \sim \int_0^\infty e^{it\psi} b|X^2 dt$

Nous construisons b par approximations successives .
 Supposons construit $b_{N-1} \in S_c^n(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_+)$, satisfaisant à
 (i) et (ii) , et tel que , avec $P_{N-1} = \int_0^\infty e^{it\Psi} b_{N-1} |X^2 dt$,
 on ait $R_N = P' - P_{N-1} \in I_c^{1-N}(X \times X, \mathbb{C}^+)$ (pour $N = 0$, on
 prend $b_{N-1} = 0$) . On a donc

$$R_N = \int_0^\infty e^{it\Psi} r_N dt \quad , \quad \text{avec } r_N \sim \sum r_{N,k}(x,y) t^{1-N-k}$$

et puisque $R_N = R_N^*$, on peut supposer $r_{N,k}(x,y) = \overline{r_{N,k}(y,x)}$
 pour tout k .

Comme $d_x'' \psi$, $d_y' \psi$, $d_x'' b_{N-1}$ et $d_y' b_{N-1}$ sont nuls d'ordre
 infini pour $x = y$, on a $\bar{\partial}_b P_{N-1} \sim 0$, donc aussi $\bar{\partial}_b R_N \sim 0$
 puisque $\bar{\partial}_b P' \sim 0$. Mais comme $\bar{\partial}_{b,x} \psi$ est nul d'ordre
 infini sur $\text{diag}(X)$, on a (à une fonction C^∞ près)

$$\bar{\partial}_b R_N \sim \int e^{it\Psi} \bar{\partial}_b r_N dt \sim 0$$

et , d'après la remarque de la fin du n°1 , $\bar{\partial}_{b,x} r_{N,0}$ est
 divisible par ψ (ou encore : si $\bar{\partial}_b R_N \sim 0$, le symbole de
 $\bar{\partial}_b R_N$ est nul , et d'après [15] §7 , celui ci est , à un
 changement de variable près et à un facteur non nul près ,
 la classe de $\bar{\partial}_{b,x} r_{N,0} \text{ mod. } \psi$) . Comme $r_{N,0}(x,y) = \overline{r_{N,0}(y,x)}$
 $\bar{\partial}_{b,y} r_{N,0}$ est aussi nul d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$.

Soit maintenant $\beta_N(x,y)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$
 telle que $\beta_N(x,y) = \overline{\beta_N(y,x)}$, que $d_x'' \beta_N$ et $d_y' \beta_N$ soient
 nuls d'ordre infini pour $x = y$, et que $\beta_N(x,x) = r_{N,0}(x,x)$ si $x \in X$
 (une telle fonction existe car $r_{N,0}(x,x)$ est réel) .

Pour continuer nous aurons besoin du résultat suivant :

(3.12) Lemme.- Soit $\alpha(x,y)$ une fonction C^∞ sur X^2 telle
que (i) $\alpha(x,x) = 0$ pour tout $x \in X$ (ii) $\bar{\partial}_{b,x} \alpha$ et
 $\bar{\partial}_{b,y} \alpha$ sont divisibles par ψ . Alors α est divisible par ψ .

preuve du lemme(3.12) : il suffit de prouver que la série de
 Taylor de α est divisible par celle de ψ en tout point de
 $\text{diag}(X)$; mais comme $d\psi \neq 0$ sur $\text{diag}(X)$, et comme $T'' \times T'$
 est linéairement indépendant de $T(\text{diag}X)$ et $\dim(T'' \times T') +$
 $\dim X = 2(2n-1) - 1$, cela résulte aussitôt de l'hypothèse

(dans le langage plus géométrique des fonctions et variétés presque analytiques : soit $\tilde{\Psi}$ un prolongement presque analytique de ψ , de sorte que la variété d'équation $\tilde{\Psi}(x,x) = 0$ est un prolongement presque analytique de X . Soit \tilde{N} la sous variété d'équation $\tilde{\Psi}(x,y) = 0$ dans X^2 . Comme $\bar{\partial}_{b,x}\psi$ et $\partial_{b,y}\psi$ sont nuls d'ordre infini sur $\text{diag}(\tilde{X})$, \tilde{N} est engendrée par le flot intégral de $T'' \times T'$ issu de $\text{diag}(\tilde{X})$, et si une fonction α est nulle sur $\text{diag}(\tilde{X})$ et invariante par le flot intégral de $T'' \times T'$, elle est nulle sur \tilde{N}).

Il résulte du lemme (3.12) que $r_{N,0} - \beta_N |X^2$ est divisible par ψ , donc si $b_N = b_{N-1} + \beta_N$, on a $P' - P_N \in I_c^{-N}(X \times X, C^+)$ et la récurrence peut se poursuivre. Pour terminer, il suffit de prendre $b \sim \sum (b_N - b_{N-1})$ (et de remplacer au besoin par $\frac{1}{2}(b(x,y,t) + b(y,x,t))$).

Nous terminons maintenant la démonstration de la proposition (3.10). Soit B'_1 l'opérateur de noyau $\int_0^\infty e^{it\psi} b dt$ (sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$). Comme $d''_x b$ est nul d'ordre infini sur $\text{diag}(X)$ on a $d'' B'_1 \sim 0$. En outre si P'_1 est l'opérateur de noyau $\int_0^\infty e^{it\psi} b |X^2 dt$ (sur $X \times X$), ie. $P'_1 = \gamma B'_1 \gamma^*$, on a $P'_1 \sim P'$. Puisque $d'' B'_1 \sim 0$, on a aussi $\Delta B'_1 \sim 0$, donc $B'_1 \sim K \gamma B'_1$. Puisque $B'_1 = B'_1{}^*$, on a aussi finalement

$$B'_1 \sim B'_1 \gamma^* K^* \sim K \gamma B'_1 \gamma^* K^* = K P'_1 K^* \sim K P' K = B'$$

(3.13) Proposition. - Il existe un opérateur F' , continu de l'espace des formes de type 0,1 à coefficients dans $C^\infty(\bar{\Omega})$, dans $C^\infty(\bar{\Omega})$, tel que $\text{Id} \sim B' + F' d''$.

On a en effet $\text{Id} \sim S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A$, donc

$$H = KA \text{Id} AK^* \sim KAS'_A AK^* + KAL'_A \bar{\partial}_b A^2 K^*$$

Mais on a $A^2 K^* K = \text{Id} = \gamma K$, donc $A^2 K^* H = \gamma H$, et $\bar{\partial}_b A^2 K^* H = \bar{\partial}_b \gamma H = \gamma d'' H$, d'où

$$H \sim B' + (KAL'_A \gamma) d'' H$$

Mais on a par ailleurs

$$\text{Id} = H + G\Delta = H + 2 Gd''^* d''$$

d'où $d''H = d''(\text{Id} - G\Delta) = (1 - 2 d''G d''^*) d''$, d'où la proposition , avec

$$F' = 2 Gd''^* + (KAL'_A \gamma)(1 - 2 d''Gd''^*)$$

Remarquons qu'avec cette définition , F' ne se prolonge peut-être pas continument aux distributions ; néanmoins $F'd''$ se prolonge continument : $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ (parcequ'il en est ainsi pour B' , et $F'd'' \sim \text{Id} - B'$)

A ce point , nous introduisons une partie des résultats de [11] , [12] , [13] sous la forme suivante :

$$(3.14) \quad \text{Ker } d'' \cap C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \underline{\text{est dense dans}} \quad \text{Ker } d'' \cap L^2(\bar{\Omega})$$

(qui implique bien sûr que $\text{Ker } \bar{\partial}_b \cap C^\infty(X)$ est dense dans $\text{Ker } \bar{\partial}_b \cap L^2(X)$) .

$$(3.15) \quad \underline{\text{Corollaire.-}} \quad B - B'B \quad \underline{\text{se prolonge continument}} \quad L^2(\Omega) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$$

$$B - BB' \quad \underline{\text{se prolonge continument}} \quad C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Omega)$$

En effet posons $R = \text{Id} - B' - F'd'' \sim 0$: R se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$. Comme $(F'd'')$ annule $\text{Ker } d'' \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ il annule aussi $\text{Ker } d'' \cap L^2(\bar{\Omega})$, et on a donc $F'd''B = 0$.

Par suite $B - B'B = RB$ se prolonge continument $L^2 \rightarrow C^\infty$ et $B - BB' = BR^*$ se prolonge continument $C^{-\infty} \rightarrow L^2$.

d. Fin de la démonstration .

Nous nous proposons maintenant de démontrer le résultat final (qui , joint à ce qui précède , implique l'assertion du théorème(1.5) concernant le noyau de Bergman) :

(3.16) Proposition.- On a $B \sim B'$

Des inégalités de J.J.Kohn , nous retiendrons encore

(3.17) Il existe un opérateur F , continu des formes de type $0,1$ à coefficients L^2 dans L^2 tel que $Id = B + Fd''$

(ceci résulte aussitôt de l'inégalité de [11] , qui affirme qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ orthogonale aux fonctions holomorphes , on ait $\|f\|_{L^2} \leq C \|d''f\|_{L^2}$) .

Ainsi $F d'' = Id - B$ se prolonge continument à L^2 , et annule les fonctions holomorphes . On en déduit aussitôt :

(3.18) $B' - BB'$ se prolonge continument $C^{-\infty} \rightarrow L^2$
 $B' - B'B$ se prolonge continument $L^2 \rightarrow C^\infty$

En effet on a $B' = BB' + F(d''B')$, mais $d''B'$ se prolonge continument $C^{-\infty} \rightarrow C^\infty$ ($d''B' \sim 0$) , et F est continu : $L^2 \rightarrow L^2$. De même $B' - B'B = (B' - BB')^* = (d''B')^* F$ se prolonge continument $L^2 \rightarrow C^\infty$.

Il résulte alors de (3.15) et (3.18) que B est continu $C^\infty \rightarrow C^\infty$ et se prolonge continument $C^{-\infty} \rightarrow C^{-\infty}$ (en effet B' , $B - B'B$ et $B' - B'B$ sont continus $C^\infty \rightarrow C^\infty$, donc il en est de même de B ; et B' , $B - BB'$, et $B' - BB'$ se prolongent continument $C^{-\infty} \rightarrow C^{-\infty}$, donc il en est de même de B) .

Répétant la preuve de (3.15) , on voit alors qu'on a $B - B'B = RB \sim 0$, et $B - BB' = (B - B'B)^* = BR^* \sim 0$.

Finalement il résulte de (3.15) et (3.18) que $B-B'$ se prolonge continument $C^{-\infty} \rightarrow L^2$, et aussi $L^2 \rightarrow C^\infty$, donc on a $(B-B')^2 \sim 0$. Mais on a

$$(B-B')^2 = B^2 + B'^2 - BB' - B'B \sim B' + (B-BB' - B'B) \sim B' - B$$

et ceci achève la démonstration.

e. Le noyau de Szegő.

Soit S le noyau de Szegő, et soit S' l'opérateur construit au §2.c (2.15). Comme annoncé, nous allons démontrer

(3.19) Proposition. - On a $S - S' \sim 0$

Quitte à remplacer S' par $\frac{1}{2}(S'+S'^*)$, nous pouvons supposer $S' = S'^*$. Comme au §3.b, nous posons $S_A = AK^*BKA$; on a $S_A \sim S'_A$, donc, avec les notations de (3.8)

$$\text{Id} \sim S_A + L'_A \bar{\partial}_b A$$

Soit alors $S_1 = A S_A A^{-1}$: S_1 est un projecteur sur $\text{Ker } \bar{\partial}_b$, donc on a

$$(3.20) \quad S_1 S = S, \quad S S_1 = S_1$$

en outre on a

$$(3.21) \quad \bar{\partial}_b S_1 = 0, \quad \text{Id} \sim S_1 + A L'_A \bar{\partial}_b.$$

De (2.15) et (3.21) on déduit

$$(3.22) \quad T = S'S_1 - S_1 \sim 0$$

$$T' = S_1 S' - S' \sim 0$$

(où les premières égalités sont des définitions de T et T')

On a $S'S - S = (S'S_1 - S_1)S = TS$, donc $S'S - S$ est continu $L^2 \rightarrow C^\infty$, et $SS' - S = (S'S - S)^* = ST^*$ est continu $C^{-\infty} \rightarrow L^2$.

D'autre part on a

$$SS' - S' = SS' - SS_1 S' + S_1 S' - S' = (1 - S)T'$$

donc $SS' - S'$ est continu $C^{-\infty} \rightarrow L^2$, et $S'S - S' = T'^*(1 - S)$ est continu $L^2 \rightarrow C^\infty$.

Comme S' , $S'S - S$ et $S'S - S'$ sont continus $C^\infty \rightarrow C^\infty$, il en est de même de S . Et comme S' , $SS' - S$ et $SS' - S'$ sont continus $C^{-\infty} \rightarrow C^{-\infty}$, il en est de même de S .

Par suite $S'S - S = TS \sim 0$, et $S'S - S' = T'^*(1 - S) \sim 0$ d'où $S \sim S'$, ce qui achève la démonstration de la proposition(3.19) , et de l'assertion du théorème(1.5) concernant S .

Voici une autre démonstration , plus courte , mais qui présente l'inconvénient de ne marcher que pour $n > 2$.

Comme d'habitude on prolonge $\bar{\partial}_b$ en un complexe d'opérateurs différentiels du premier ordre , et on pose $\square_b = \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^*$. Si $n > 2$, \square_b est hypoelliptique en degré 1 ; et plus précisément , comme X est compacte , il existe un opérateur $L_1 \in OPS^{-1,-1}(X, \mathcal{Z})$, unique , tel que

$$L_1 \square_b = \square_b L_1 = \text{Id} - \Pi \quad , \quad \Pi L_1 = L_1 \Pi = 0 \quad , \quad L_1 = L_1^*$$

Π étant le projecteur orthogonal sur $\text{Ker } \square_b$ en degré 1 . (Π est donc un projecteur de rang fini) (cf. [3] , [4]) .

Alors $\bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* L_1$ est le projecteur orthogonal sur l'image de $\bar{\partial}_b$, et $\bar{\partial}_b^* L_1 \bar{\partial}_b$ est le projecteur orthogonal sur l'orthogonal de $\text{Ker } \bar{\partial}_b$. On a donc

$$S = \text{Id} - \bar{\partial}_b^* L_1 \bar{\partial}_b$$

Comme L_1 est régulier , S est régulier , et la proposition (3.19) résulte donc de l'assertion d'unicité du théorème(2.14).

La même démonstration s'applique d'ailleurs au projecteur S_A

sur $\text{Ker } \bar{\partial}_b A$, et on retrouve ainsi la proposition(3.16).

Pour $n = 2$, \square_b n'est pas hypoelliptique en degré 1 , et d'ailleurs le contre-exemple de L.Nirenberg montre qu'on ne peut pas , dans la démonstration , ignorer la structure complexe dont provient $\bar{\partial}_b$.

§4 Calcul du terme dominant .

Comme on a vu au §1 , (1.7) , les noyaux de Szegö et de Bergman sont de la forme

$$(4.1) \quad S(x,y) = F(x,y) (-i\Psi)^{-n} + G(x,y) \text{Log}(-i\Psi)$$

$$B(x,y) = F'(x,y)(-i\Psi)^{-n-1} + G'(x,y) \text{Log}(-i\Psi)$$

où F , G (resp. F' , G') sont des fonctions C^∞ sur X^2 (resp. \bar{L}^2)

Nous noterons L_X la restriction de la forme de Levi L_P au plus grand sous-espace complexe $(T'+T'') \cap TX$ du fibré tangent TX , et $\det L_X$ le déterminant de la matrice de L_X dans une base orthonormale complexe de $(T'+T'') \cap TX$, de sorte que la forme quadratique réelle définie par L_X a pour discriminant (dans une base orthonormale réelle) $(\det L_X)^2$.

Nous nous proposons de redémontrer le résultat classique

(4.2) Proposition.- Avec les notations ci-dessus , on a pour $x \in X$

$$F(x,x) = \frac{(n-1)!}{4\pi^n} \det L_X \|\text{d}\varphi\|$$

$$F'(x,x) = \frac{n!}{4\pi^n} \det L_X \|\text{d}\varphi\|^2$$

Pour cela , nous allons calculer les symboles de S et de $P = A S_A A$, et pour commencer nous allons examiner comment se composent entre eux les opérateurs de $I_C^\infty(X \times X, C^+)$. Soient donc

$$Q_1 = \int_0^\infty e^{it\Psi} q_1 \, dt \in I_C^m(X^2, C^+)$$

$$Q_2 = \int_0^\infty e^{it\Psi} q_2 \, dt \in I_C^{m'}(X^2, C^+)$$

Le noyau du composé $Q_1 \circ Q_2$ est alors

$$Q_1 \circ Q_2 = \iiint_{X \times \mathbb{R}_+^2} e^{it\psi(x,w)+is\psi(w,y)} q_1(x,w,t) q_2(w,y,s) dw dt ds$$

Nous allons calculer cette intégrale en intégrant d'abord par rapport à w et s , puis par rapport à t . Posant $s = t\sigma$ on est amené à examiner l'intégrale

$$(4.3) \quad \iint_{X \times \mathbb{R}_+} e^{it\phi(x,y,w,\sigma)} q_1(x,w,t) q_2(w,y,t\sigma) t dw d\sigma$$

avec

$$(4.4) \quad \phi(x,y,w,\sigma) = \psi(x,w) + \sigma\psi(w,y)$$

Il est immédiat qu'on a $\text{Im} \phi > 0$, sauf si $x = y = w$. Pour $x = y = w$, on a $d_w \phi = (\sigma - 1) \frac{1}{i} d\varphi|_X$, et comme $d\varphi|_X \neq 0$, les seuls points critiques (réels) sont les points $x = y = w$, $\sigma = 1$.

Nous noterons h_ϕ le déterminant du double de la matrice hessienne de $\frac{1}{i} \phi$ par rapport à w, σ (dans une base orthonormale). Pour $x = y \in X$, on a d'après (1.2)

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{i} \phi(x,x,w,\sigma) &= \frac{1}{i} (\psi(x,w) + \psi(w,x)) + (\sigma - 1) \psi(w,x) = \\ &= L_\varphi(w-x) + \frac{1}{i} (\sigma - 1) \langle \frac{1}{i} d\varphi, w-x \rangle + o(|w-x|^3) \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt

$$(4.6) \quad h_\phi = \frac{1}{16} (\det L_X)^2 \|d\varphi\|^2$$

(En effet la forme quadratique sur $T_X X \times \mathbb{R}$ qui décrit les termes du second ordre dans (4.5) est

$$(Z,S) \mapsto L_\varphi(Z) + \frac{1}{i} S \langle \frac{1}{i} d\varphi, Z \rangle$$

Or $\frac{1}{i} d\varphi|_X$ est réelle, de norme $c = 1/\sqrt{2} \|d\varphi\| = \frac{1}{2} \|d\varphi\|$, et elle est orthogonale à $T'+T''$. Donc dans une base orthonormale de $T_X X \times \mathbb{R}$ où les deux premières coordonnées sont S et $c^{-1} \langle \frac{1}{i} d\varphi, Z \rangle$ la matrice de cette forme s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{c}{2i} & * & * & \dots & * \\ 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & * & & & \end{pmatrix}$$

où $c = \|d\varphi|X\| = \frac{1}{2} \|d\varphi\|$, A est la matrice de la restriction à $(T'+T'') \cap T_x X$ de la forme de Levi, donc $\det A = (\det L_X)^2$, et les $*$ représentent des coefficients qui n'influent visiblement pas sur la valeur du déterminant).

Le déterminant hessien est donc non nul, et, d'après [15] §2, on a

$$(4.7) \quad \iint e^{it\phi(x,y,w,\sigma)} q_1(x,w,t) q_2(w,y,t\sigma) \, tdw \, d\sigma \sim e^{it\psi(x,y)} q_3(x,y,t)$$

où $\psi_1(x,y)$ est la valeur critique d'un prolongement presque analytique de ϕ , et q_3 est un symbole classique, qui admet un développement asymptotique donné par les formules usuelles de la méthode de la phase stationnaire. Comme nous ne nous intéressons ici qu'à la classe de noyau de $Q_1 \circ Q_2 \text{ mod. } C^\infty(X^2)$, seuls comptent en fait les séries de Taylor de ψ_1 et de q_3 le long de $\text{diag}(X)$. Celui de ψ_1 s'obtient en substituant à w, σ les séries formelles du point critique (formel) dans la série de Taylor de ϕ .

(4.8) Proposition. - On a $\psi \sim \psi_1$.

preuve : il s'agit de prouver que ψ_1 et ψ ont même série de Taylor en tout point de $\text{diag}(X)$. Nous noterons (z', z'') les points du complexifié $\tilde{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}}^n$, de sorte que les séries formelles holomorphes (resp. antiholomorphes) sont celles qui ne dépendent que de z' (resp. z''). Nous noterons encore $f_{z''}(z'+h)$ la série de Taylor de la fonction $h \mapsto f(z'+h)$

au point $h = 0$. Comme $d_x''\psi$ et $d_y'\psi$ s'anulent à l'ordre infini pour $x = y$, on a

$$\psi(z+x, z+y) = S_z(x', y'')$$

(où en fait $S_z(h', h'')$ est la série de Taylor $\frac{1}{1} \sum (z+h)$). La série de Taylor de ϕ au point $(z, z, z, 1)$ ($z \in X$) est donc

$$\phi(z+x, z+y, z+w, 1+\epsilon) = S_z(x', w'') + (1+\epsilon) S_z(w', y'')$$

Les équations du point critique sont alors

$$(i) \quad \frac{d}{d\epsilon} \phi = S_z(w', y'') = 0$$

$$(ii) \quad d_w(\phi | X) = 0$$

(et bien sûr $S_z(x', x'') = S_z(y', y'') = S_z(w', w'') = 0$). On sait que ces équations déterminent complètement les séries formelles de w et ϵ en fonction de x , y . La première équation signifie que le point (formel) $z + (w', y'')$ est dans la variété (formelle) X . Fixons provisoirement w' , et faisons varier y'' : on a $S_z(w', y'') = 0$, et l'espace tangent en (w', w'') à la variété (formelle) d'équation $S_z(w', y'') = 0$ est, par définition, T_w'' . L'équation (ii) implique $\partial_{b,w} \phi = \partial_{b,w} S_z(w', y'') = 0$. Or on a $\partial_{b,w} S_z(w', w'') = 0$, et comme la forme de Levi ainsi que la restriction à $T' \times T''$ de la forme bilinéaire qu'elle définit est non dégénérée, le champ de vecteurs $y'' \mapsto \partial_{b,w} S_z(w', y'')$ a sur la variété (formelle) $S_z(w', y'') = 0$ un zéro (point critique) non dégénéré pour $y'' = w''$. Ainsi les équations $S_z(w', w'') = 0$, $S_z(w', y'') = 0$, $\partial_{b,w} S_z(w', y'') = 0$ impliquent $w'' = y''$, donc $\phi(z+x, z+y, z+w, 1+\epsilon) = S_z(x', w'') = S_z(x', y'') = \psi(z+x, z+y)$ C.Q.F.D.

Démontrons maintenant la proposition(4.2). Nous noterons encore $h_\phi = h_\phi(x, y)$ le déterminant de la demi-matrice hessienne de ϕ au point critique. Le premier terme du développement asymptotique de q_3 est

$$(4.9) \quad \pi^n t^{-n} (h_\phi)^{-\frac{1}{2}} q_1 q_2 t$$

Ici il faut prendre la racine positive pour $x = y$.

Si alors $S = \int_0^\infty e^{it\psi} s \, dt \in I^{m-n+1}(X^2, C^+)$ est un projecteur approximatif, avec

$$s \sim \sum t^{m-k} s_k(x, y)$$

on a $\pi^n t^{1-n} (h_\phi)^{-\frac{1}{2}} (s_0 t^m)^2 = s_0 t^m \pmod{\psi}$

ce qui implique $m = n-1$, et $s_0 = \pi^{-n} (h_\phi)^{\frac{1}{2}} \pmod{\psi}$

Pour $x = y$, on obtient

$$(4.10) \quad s_0 = \frac{1}{4\pi^n} (\det L_X) \|\mathrm{d}\varphi\|$$

d'où $F(x, x) = (-i\psi)^n \int_0^\infty e^{it\psi} t^{n-1} s_0 \, dt = \frac{(n-1)!}{4\pi^n} (\det L_X) \|\mathrm{d}\varphi\|$

Ceci vaut aussi bien pour le projecteur de Szegö S que pour le projecteur S_A du §3.b.

Enfin, comme $\sigma(A) = (2|\xi|)^{\frac{1}{2}}$, on vérifie sans peine que si $P = A S_A A = \int_0^\infty e^{it\psi} p \, dt$, avec $p \sim \sum t^{n-k} p_k$, on a

$$(4.11) \quad p_0(x, x) = (\|2d_X \psi\|^{\frac{1}{2}})^2 s_0(x, x) = \|\mathrm{d}\varphi\| s_0(x, x) = \frac{1}{4\pi^n} (\det L_X) \|\mathrm{d}\varphi\|^2$$

d'où $F'(x, x) = n! p_0(x, x) = \frac{n!}{4\pi^n} (\det L_X) \|\mathrm{d}\varphi\|^2$

Ceci achève la démonstration.

Nous décrivons maintenant plus précisément le développement asymptotique du composé $Q_1 \circ Q_2$, ou plus exactement sa série de Taylor en un point $(z, z) \in \text{diag}(X)$: le symbole total se calcule comme indiqué dans (4.7). Pour abrégé, nous noterons \underline{q}_j le symbole formel (à coefficients séries formelles)

$$(4.12) \quad \underline{q}_j = \sum t^{mj-k} \underline{q}_{j,k}(z+x, z+y)$$

Il résulte de la proposition(4.8) (et de (4.6)) qu'on peut toujours faire un changement de variables formel (à coefficients complexes)

$$w = \underline{w}(x,y,u,v)$$

$$\sigma = \underline{\sigma}(x,y,u,v)$$

($u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$) de telle sorte qu'on ait

$$(4.13) \quad \underline{\phi}(z+x, z+y, z+w, 1+\sigma) = u.v + \underline{\psi}(z+x, z+y)$$

Il y a bien sûr plusieurs façons de réaliser ceci ; mais parmi toutes les façons , il y en a évidemment où les séries \underline{w} , $\underline{\sigma}$ à l'ordre N ne dépendent que de la série $\underline{\psi}(z+x, z+y)$ à l'ordre N+1 (parceque les équations du point critique ne font intervenir que des dérivées d'ordre 1 de $\underline{\psi}(z+x, z+y)$) .

Donc la série du déterminant jacobien $\underline{J}(x,y,u,v)$

($dw d\sigma = \underline{J}(x,y,u,v) du dv$) à l'ordre N ne dépend que de la série de Taylor $\underline{\psi}(z+x, z+y)$ à l'ordre N+2 .

On a alors

$$(4.14) \quad \underline{q}_3 = \pm \int e^{itu.v} \underline{q}_1(x,w,t) \underline{q}_2(w,y,t\sigma) t \underline{J} du dv = \\ = \pm (2\pi)^n \sum \frac{i^{-|k|}}{\alpha!} t^{1-n-|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^\alpha \left[\underline{q}_1(x,w,t) \underline{q}_2(w,y,t) \underline{J} \right] \Big|_{u=v=0}$$

(Le signe \pm dépend du choix d'une racine de la matrice hessienne pour le changement de variable ci-dessus ; nous ne le discuterons pas ici).

Il est alors clair sur cette formule que la série formelle $\underline{q}_{3,k}(z+x, z+y)$ à l'ordre N-2k ne dépend que de la série formelle $\underline{\psi}(z+x, z+y)$ à l'ordre N+2 , et des séries formelles $\underline{q}_{j,k}(z+x, z+y)$ ($j = 1, 2$) à l'ordre N-2k .

Il est alors naturel d'introduire les objets suivants :

nous noterons \underline{S}^m l'ensemble des symboles formels

$$\sum t^{n-1+m-k} p_k(x,y)$$

où $p_k(x,y)$ est une série de Taylor en un point $(z,z) \in \text{diag}(X)$ sur X^2 (c'est à dire une classe de séries formelles à $4n$ variables, mod. l'idéal engendré par les séries formelles

$\underline{\rho}(z+x)$, $\underline{\rho}(z+y)$). Nous noterons \underline{J}^m le sous espace $(\underline{\Psi} - i \frac{d}{dt}) \underline{S}^m$ ($\underline{\Psi}$ désignant la série formelle $\underline{\Psi}(z+x, z+y)$) et \underline{I}^m le quotient $\underline{S}^m / \underline{J}^m$. La formule (4.7) fournit, via le développement asymptotique (4.14) une loi de composition bilinéaire : $\underline{S}^m \times \underline{S}^{m'} \rightarrow \underline{S}^{m+m'}$. Celle ci induit par passage au quotient une loi associative : $\underline{I}^m \rightarrow \underline{I}^{m'} \rightarrow \underline{I}^{m+m'}$.

Nous noterons encore $\underline{S}^{m,N}$ l'ensemble des symboles de la forme $\sum t^{n-1+m-k} p_k$, où p_k est nul d'ordre $N-2k$, et $\underline{I}^{m,N}$ l'image de $\underline{S}^{m,N}$ dans \underline{I}^m .

D'après ce qui précède, la classe de $(q_1 \circ q_2) \text{ mod. } \underline{I}^{m+m',N}$ ne dépend que des classes de $q_1 \text{ mod. } \underline{I}^{m,N}$, de $q_2 \text{ mod. } \underline{I}^{m',N}$ et de $\underline{\Psi}$ à l'ordre $2N+2$.

Le calcul ci dessus fournit un premier symbole formel (réduit à un terme) $\underline{s}_0 = t^{n-1} s_0(x,y) \in \underline{I}^0$ tel que $\underline{s}_0 = \underline{s}_0^*$, $\bar{\partial}_b \underline{s}_0 = 0$; la classe de $\underline{s}_0 \text{ mod. } \underline{I}^{0,N}$ ne dépend que du développement de Taylor $\underline{\Psi}$ à l'ordre $N+2 \leq 2N+2$.

On a $\underline{s}_0^2 = \underline{s}_0 + \underline{r}$, avec $\underline{r} \in \underline{I}^{-1}$, et bien sûr aussi $\underline{r} = \underline{r}^*$, $\bar{\partial}_b \underline{r} = 0$. Alors un calcul élémentaire montre que la série formelle $\underline{s} \in \underline{I}^0$ associée au noyau de Szegö n'est autre que

$$(4.15) \quad \underline{s} = \underline{s}_0 + (1-2\underline{s}_0) E(\underline{r})$$

où $E(T) \in \mathbb{Z}[[T]]$ est la série formelle (à coefficients entiers positifs) $\frac{1}{2}(1 - (1-4T)^{-\frac{1}{2}})$.

Il est alors clair que la classe de $\underline{s} \text{ mod. } \underline{I}^{0,N}$ ne dépend donc que de la série de Taylor $\underline{\Psi}(z+x, z+y)$ (donc

de la série de Taylor $\varphi(z+x)$ à l'ordre $2N+2$.

En d'autres termes, si le noyau de Szegő s'écrit $S = F(x,y) (-i\Psi)^{-n} + G(x,y) \text{Log}(-i\Psi)$, la série de Taylor de $F \pmod{\Psi^n}$ à l'ordre N et la série de Taylor de G à l'ordre $N-2n$ en un point $(x,x) \in \text{diag}(X)$ ne dépendent que de la série de Taylor de Ψ au point (x,x) (donc de celle de φ au point x) à l'ordre $2N+2$.

Ceci met bien en évidence le caractère local de la singularité du noyau de Szegő. Un résultat entièrement analogue vaut pour le noyau de Bergman.

Pour terminer, remarquons que dans tout l'article, nous avons supposé que Ω est un ouvert de \mathbb{C}^n ; mais il est clair que la démonstration s'adapte immédiatement au cas où Ω est un ouvert relativement compact, de bord C^∞ strictement pseudoconvexe, d'une variété de Stein. On peut d'ailleurs admettre un nombre fini de singularités isolées normales en dehors du bord, à condition d'interpréter B comme le projecteur orthogonal sur les formes holomorphes de type $0,n$ (pour la métrique hilbertienne $\|\omega\|^2 = i^{-n^2} \int_{\Omega} \omega \wedge \bar{\omega}$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Boutet de Monvel L. - Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord I et II ,
J. Anal. Math. 17 (1966) 241-304 .
- [2] Boutet de Monvel L. - Boundary problems for pseudo-differential operators , Acta Math. 126 (1971) 11-51 .
- [3] Boutet de Monvel L. - Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators ,
Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 585-639 .
- [4] Boutet de Monvel L. - Intégration des équations de Cauchy Riemann induites . Séminaire Goulaouic-Schwartz 1974-75 ,
exposé n°IX .
- [5] Duistermaat J.J. , Sjöstrand J. - A global construction for pseudo-differential operators with non involutive characteristics. Inventiones Math. 20 (1974) , 209-225.
- [6] Fefferman C. - The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains . Inventiones Math. 26 (1974) ,1-66.
- [7] Hörmander L. - Fourier Integral operators I , Acta Math. 127 (1971) 79-183 .
- [8] Hörmander L. - The boundary behaviour of the Bergman kernel
manuscrit (non publié).
- [9] Kashiwara M. , Kawai T. , Sato M. - Microfunctions and pseudo-differential equations . Lecture Notes ,
Springer , n°287 , chap. II .
- [10] Kerzman N. - The Bergman kernel-function : differentiability at the boundary . Math. An. 195 (1972) 149-158 .
- [11] Kohn J.J. - Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I . Ann. Math. 78 (1963) 112-148 .
- [12] Kohn J.J. - Regularity at the boundary of the $\bar{\partial}$ -Neuman problem . Proc. Nat. Acad. Sci. USA 49 (1963) 206-213 .
- [13] Kohn J.J. - Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds II . Ann. Math. 79 (1964) 450-472 .

- [14] Lewy H. - On the local character of the solution of an atypical linear differential equation ... Ann. Math. 64 (1956) 514-522.
- [15] Melin A. , Sjöstrand J. - Fourier integral operators with complex valued phase functions . Publié dans Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations , Lecture Notes , Springer , n°459 , 120-223.
- [16] Nirenberg L. - On a problem of Hans Lewy . Uspeki Mat. Nauk. 292(176) (1974) 241-251.
(Voir aussi : Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations , Lecture Notes , Springer , n° 459 , 224-234)
- [17] Sjöstrand J. - Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics . Arkiv för Mat. 12 (1974) 85-130.

L. Boutet de Monvel
Université de Grenoble

J. Sjöstrand
Purdue University