JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

# Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés en dimension 2

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1974), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1974____A5_0>

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES EN DIMENSION 2

par

PHAM THE LAI

## § 1. Introduction

Le but essentiel de ce travail est l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques A autoadjoints positifs dégénérant au bord d'un domaine $\Omega$ borné de $\mathbb{R}^n$.

Ces opérateurs constituent une généralisation en dimension quelconque de l'opérateur de Legendre $\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

Une étude spectrale de ces opérateurs a été faite par M.S. Baouendi et C. GOULAOUIC [3] dans le cas du second ordre. Leurs résultats sont précis pour $\dim\Omega = n = 1$, mais la précision diminue lorsque n augmente.

En étudiant la classe de compacité d'un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ à image dans une classe d'espaces de Sobolev avec poids, nous avons, dans [8] déduit une minoration des valeurs propres de A. Auparavant, Boutet de Monvel et P. Grisvard dans [4], ont donné une majoration et une minoration de ces valeurs propres ; leur méthode est basée sur la connaissance des valeurs propres de A lorsque $\Omega$ est la boule unité et A l'opérateur type de Legendre.

En adaptant la méthode de S. Agmon [1] et [2] au cas d'opérateurs dégénérés, nous donnons dans ce travail un équivalent de $N(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1$ avec une estimation du reste dans le cas n=2 pour une classe d'opérateurs d'ordre 2m, $m \geq 1$.

C. Goulaouic a eu la gentillesse de nous signaler le travail de C. Nordin [7] qui donne un équivalent de N(t), pour n quelconque, pour l'opérateur de second ordre $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad})$, nous lui en remercions.

## § 2. Enoncé des résultats

Considérons $\varphi$ une fonction de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\Omega = \{x;\ \varphi(x)>0\}$ ; $\partial\Omega = \{x;\ \varphi(x)=0\}$ ; $d\varphi(x) \neq 0$ pour $x \in \overline{\Omega}$.
Les différentes normes rencontrées seront notées $|\ |$, sauf mention du contraire.

Nous utilisons les notations :

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad j \in (1,\dots,n)$$

pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$\mathscr{C}(\Omega)$, $\mathscr{C}^k(\Omega)$, $\mathscr{C}(\Omega)$ désignent respectivement l'espace des fonctions continues, continûment différentiables jusqu'à l'ordre k, indéfiniment différentiables à support compact, sur $\Omega$.

$L^2(\Omega)$ désigne l'espace des (classes de fonctions de carré intégrable sur $\Omega$, de produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$$

Pour m entier $\geqslant 1$, $H^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel avec la norme naturelle :

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqq m} |D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

$H^m_0(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$

$D^{2m}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions :

$$\{u \in \mathscr{D}'(\Omega)\ ;\ \varphi^m\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leqq 2m\}$$

avec la norme

$$|u|_{D^{2m}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leqq 2m} |\varphi^m D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

c'est un espace de Hilbert.

Soit

$$\mathcal{Q}(x,D) = \varphi(x)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha + \varphi(x)^{m-1} \sum_{|\alpha|=2m-1} a_\alpha(x) D^\alpha + \ldots + \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2m.

Nous faisons les hypothèses (H) :

- les coefficients $a_\alpha$, pour $|\alpha| = 2m$, sont des restrictions à $\Omega$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$
- les coefficients $a_\alpha$, pour $|\alpha| < 2m$, sont des fonctions dans $L^\infty(\Omega)$
- $\mathcal{Q}$ est formellement auto-adjoint
- $\tilde{\mathcal{Q}}'(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ est uniformément elliptique, c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathcal{Q}}'_x(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geqq c |\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in \Omega$ ; $\xi \in \mathbb{R}^n$, c étant une constante > 0.

Un opérateur non borné A dans $L^2(\Omega)$ est dit une réalisation auto-adjointe dans $L^2(\Omega)$ de $\mathcal{Q}$ si A est auto-adjoint avec un domaine de définition $\mathscr{D}(A)$ vérifiant

(2.1) $$H_0^{2m}(\Omega) \subset \mathscr{D}(A) \subset D^{2m}(\Omega)$$

et si tout $u \in \mathscr{D}(A)$ est solution au sens des distributions de :

$$\mathcal{Q}(x,D)_u = Au$$

Le résultat suivant est vrai pour n quelconque :

<u>Théorème 1</u> : *Soit* A *une réalisation auto-adjointe positive dans* $L^2(\Omega)$ *de* $\mathcal{Q}(x,D)$ *d'ordre* 2m, *vérifiant les hypothèses* (H). *Alors le spectre de* A *est discret.*

*Supposons, en plus, que* m > n = dim . *Alors :*

1) A *a une résolvante compacte. Pour tout* $t > 0$, $A+t$ *est inversible et* $(A+t)^{-1}$ *est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon* (cf. [ ]) *continu et borné* $G_t(x,y)$ :

$$(A+t)^{-1}f = \int_\Omega G_t(x,y)\, f(y)\, dy \qquad f \in L^2(\Omega)$$

2) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que l'on ait :*

$$(2.2) \qquad \left| G_t(x,x) - \frac{n\Pi}{2m}\left(\operatorname{Sin}\frac{n\Pi}{2m}\right)^{-1} \varphi(x)^{-n/2}\, C(x)\, t^{-1+\frac{n}{2m}} \right| \leqslant C\, \varphi(x)^{-\frac{2n+1}{4}}\, t^{-1+\frac{2n-1}{4m}}$$

*pour tout* $x \in \Omega$ *et* $t \geqslant 1$.

*Dans* (2.2), $c(x)$ *est la fonction de classe* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$

$$(2.3) \qquad c(x) = (2\Pi)^{-n} \int_{\tilde{\mathcal{a}}'_x(\xi)<1} d\xi$$

Remarque : En vertu de (2.1), nous avons :

$$\mathscr{D}(A) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega)$$

En utilisant les résultats de [2] ou de [3], nous avons :

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1-\frac{n}{2m}}\, G_t(x,x) = \frac{n\Pi}{2m}\left(\operatorname{sim}\frac{n\Pi}{2m}\right)^{-1} \varphi(x)^{-n/2}\, c(x)$$

uniformément sur tout compact de $\Omega$.

(2.2) précise donc le comportement de $G_t(x,x)$ lorsque $x$ est voisin du bord de $\Omega$.

Théorème 2 : *Soit* A *une réalisation auto-adjointe positive dans* $L^2(\Omega)$ $\mathcal{a}(x,D)$ *d'ordre* $2m$, *vérifiant les hypothèses* (H).

*Supposons en plus que :*

*(i)* $\dim \Omega = 2$

*(ii) pour un certain entier* $k > \frac{2}{m}$, *on a :*

$$H_0^{2km} \subset \mathcal{D}(A^k) \subset D^{2km}(\Omega)$$

*Si* $\{\lambda_j\}$ *est la suite croissante des valeurs propres de* A *répétées avec leur multiplicité, alors :*

$$(2.4) \qquad N(t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} 1 = \langle \omega_\varphi, c \rangle \ t^{1/m} \operatorname{Log} t^{1/m} + O(t^{1/m}) \qquad (t \to +\infty)$$

*Dans* (2.4), $\omega_\varphi$ *est la forme de Leray associée à* $\varphi$ *et* c *est la fonction définie par* (2.3).

## § 3. Preuve (rapide) des résultats

### 3.1. Preuve du théorème 1

Pour cela, nous utilisons essentiellement le résultat suivant établi dans [ ] :

Théorème 3.1 : *Soit* m *entier avec* $m > n$. *Soit* T *un opérateur continu dans* $L^2(\Omega)$ *dont les images* $\mathcal{R}(T)$ *et* $\mathcal{R}(T^*)$ ($T^*$ *adjoint de* T) *sont dans* $D^{2m}(\Omega)$. *Alors* T *est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon* K *continu et borné sur* $\Omega \times \Omega$ :

$$Tf = \int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, dy \qquad f \in L^2(\Omega)$$

*De plus, nous avons :*

$$(3.1) \qquad |K(x,y)| \leqslant C \left(\|T\|_{D^{2m}} \|T^*\|_{D^{2m}}\right)^{n/2m} \|T\|_{L^2}^{1-\frac{n}{m}}$$

$$(3.2) \qquad |K(x,y)| \leqslant C \left[\varphi(x)\varphi(y)\right]^{-n/4} \left(\|T\|_{D^{2m}} \|T^*\|_{D^{2m}}\right)^{n/4m} \|T\|_{L^2}^{1-\frac{n}{2m}}$$

*pour tout* $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ ; C *étant une constante* $> 0$ *indépendante de* x *et* y. *Dans* (3.1) *et* (3.2), $\|T\|_{L^2}$, $\|T\|_{D^{2m}}$, $\|T^*\|_{D^{2m}}$ *désignent respectivement les normes de* T *de* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$, *de* T *de* $L^2(\Omega)$ *dans* $D^{2m}(\Omega)$, *de* $T^*$ *de* $L^2(\Omega)$ *dans* $D^{2m}(\Omega)$.

Ce résultat appliqué à $S_t = (A+t)^{-1}$, pour $t > 0$, donne le :

Corollaire 3.2 : *Dans les conditions du théorème 1,* $S_t$ *est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon* $G_t(x,y)$ *continu et borné sur* $\Omega \times \Omega$.

*Nous avons :*

$$(3.3) \qquad |G_t(x,y)| \leqq C\ t^{-1+\frac{n}{m}}$$

$$(3.4) \qquad |G_t(x,y)| \leqq C\ [\varphi(x)\ \varphi(y)]^{-n/4} \quad t^{-1+\frac{n}{2m}}$$

*pour tout* $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, $t \geqq 1$, C *étant une constante* $> 0$ *indépendante de* $x,y,t$.

Considérons $x \in \Omega$ et $t \geqq 1$ fixés.

Si l'on a :

$$t^{\frac{1}{m}} > \varphi(x)$$

il est facile, grâce au corollaire 3.2, de vérifier (2.2).

Nous pouvons donc, pour la preuve du théorème 1, supposer :

$$(3.5) \qquad t^{\frac{1}{m}} \leqq \varphi(x)$$

Notons :

$$F_{x,t}(\eta) = (2\Pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i<\xi,\eta>}}{\tilde{\mathfrak{a}}'_x(\xi)+t}\, d\xi$$

et considérons, pour $f \in L^2(\Omega)$, l'opérateur de convolution :

$$R_{x,t}\, f = F_{x,t} * \tilde{f}\ \big|_{\Omega}$$

$\tilde{f}$ étant la fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenue en prolongeant f par 0 hors de $\Omega$ et $F_{x,t} * \tilde{f}\ |_{\Omega}$ est la restriction à $\Omega$ du produit de convolution $F_{x,t} * \tilde{f}$.

Il est clair que $R_{x,t}$ est continue dans $L^2(\Omega)$.

Soit $\rho > 0$ suffisamment petit et considérons $\zeta_{x,\rho}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans la boule de centre x, de rayon $\rho$, égale à 1 sur x. Notons alors :

$$T_{x,t;\rho} = \zeta_{x,\rho}\ (S_t - R_{x,t})\zeta_{x,\rho}$$

$T_{x,t,\rho}$ est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon donné par :

$$H_{x,t;\rho}(y,z) = \zeta_{x,\rho}(y)\ \zeta_{x,\rho}(z)\ \left[G_t(y,z) - F_{x,t}(y-z)\right]$$

En particulier, lorsque y=z=x, nous obtenons, par un calcul aisé :

$$(3.6)\quad H_{x,t;\rho}(x,x) = G_t(x,x) - \frac{n\Pi}{2m}\left(\sin\frac{n\Pi}{2m}\right)^{-1}\ \varphi(x)^{-n/2}\quad t^{-1+\frac{n}{2m}}$$

La quantité $\rho$ restant à notre disposition, nous allons la choisir égale à :

$$(3.7)\qquad \rho = \frac{(x)}{2k}\quad \left(\varphi(x)\quad t^{1/m}\right)^{-1/4}$$

k étant égal au $\sup\limits_{x \in \Omega} |\mathrm{grad}\ \varphi|$ .

Grâce à (3.5) et au choix (3.7), l'utilisation du théorème 3.1 permet de prouver qu'il existe une constante C > 0 telle que :

$$(3.8)\quad \left|H_{x,t;\rho}(y,z)\right| \leqq C\quad \left[\varphi(y)\ \varphi(z)\right]^{-n/4}\quad t^{-1+\frac{n}{2m}}\quad \left(\varphi(x)\ t^{1/m}\right)^{-1/4}$$

Alors (3.6) et (3.8) prouvent (2.2) dans le cas (3.5), ce qui achève la preuve du théorème 1.

### 3.2. Preuve du théorème 2

Elle s'appuie sur l'égalité bien connue :

$$(3.9)\qquad \int_\Omega G_t(x,x)\ dx = \int_0^\infty (\tau+t)^{-1}\quad dN(\tau)$$

Grâce à l'hypothèse (ii), on voit aisément que l'on peut supposer, sans diminuer la généralité, que m > 2 = dim $\Omega$ .

Soit $\Omega_1 = \{x \in \Omega\ ;\quad (x) \geqq t^{-1/4}\}$ et $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$.

Alors, en vertu de (3.3), nous avons

$$(3.10)\qquad 0 \leqq \int_{\Omega_2} G_t(x,x)\ dx \leqq C\quad t^{-1+\frac{1}{m}}$$

En vertu de (2.2), nous avons :

$$(3.11)\quad \left|\int_{\Omega_1} G_t(x,x)dx - \frac{\Pi}{m}\left(\sin\frac{\Pi}{m}\right)^{-1} t^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\Omega_1} \varphi(x)^{-1}\ c(x)dx\ \right| \leqq$$

$$< C\ t^{-1+\frac{3}{4m}} \int_{\Omega_1} \varphi(x)^{-5/3}\ dx$$

Un calcul aisé prouve que l'on a :

$$(3.12) \qquad \int_{\Omega_1} \varphi(x)^{-1}\, c(x)\, dx = \langle \omega_\varphi . c\rangle \ \text{Log}\ t^{1/m} + O(1) \qquad (t \to +\infty)$$

où $\langle \omega_\varphi . c\rangle$ est la valeur de la forme de Leray $\omega_\varphi$, associée à $\varphi$, en c.

(3.10), (3.11) et (3.12) donnent donc :

$$(3.13) \qquad \int_\Omega G_t(x,x)dx = \frac{}{m}(\sin \frac{}{m})^{-1}\ t^{-1+\frac{1}{m}}\ \text{Log}\ t^{1/m} + O\,(t^{-1+\frac{1}{m}}) \qquad (t \to +\infty).$$

En utilisant maintenant un théorème taubérien de J. Karamata [5], avec la précision du reste de P. Malliavin (cf. introduction de [6]), nous obtenons (2.4) ; la preuve est donc achevée.

Remarques

1) La classe d'opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre, de type variationnel, étudiée dans [3] entre dans le cadre étudié ici.

Rappelons qu'il s'agit de la classe d'opérateurs :

$$\mathcal{A}(x,D) = \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n} D_j\ a_{j,k}(x)\ \varphi(x)\ D_k$$

avec $a_{i_j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour $j,k \in (0,\ldots,n)$.

Soit la forme intégro-différentielle :

$$a(u,v) = \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n} \int_\Omega a_{j,k}(x)\ \varphi(x)\ D_j u\ \overline{D_k v}\ dx$$

et $\mathcal{V}$ l'espace des distributions :

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ \varphi^{1/2} u \in L^2(\Omega)\ ,\ \varphi^{1/2}\ D_j u \in L^2(\Omega)\ ,\ j \in (1,\ldots,n)\}$$

muni de la norme hilbertienne naturelle.

On suppose que a est -coercive : il existe donc un opérateur non borné A dans $L^2(\Omega)$ tel que :

$$(3.14) \qquad a(u,v) = (Au,v)_{L^2(\Omega)} \qquad u \in \mathcal{D}(A),\ v \in \mathcal{V}$$

Si l'on suppose que a est hermitienne, alors A est auto-adjoint positif.

Suivant un résultat de régularité de [3], nous avons :

(3.15) $$\mathcal{D}(A^k) = D^{2km}(\Omega) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

(3.14) et (3.15) prouvent que A est une réalisation de $\mathfrak{A}(x,D)$ au sens de la définition du § 2 et les théorèmes 1 et 2 sont applicables à A.

2) Considérons à présent le cas particulier intéressant suivant :

$$\Omega = \{x \ ; \ |x| < 1\}$$

$$\varphi(x) = 1 - |x|^2$$

$$\mathfrak{A}(x,D) = \sum_{0 \leq j \leq n} D_j \, \varphi(x) \, D_j$$

La forme de Leray est ici proportionnelle à la mesure de surface de la sphère unité :

$$\langle \omega_\varphi . c \rangle = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c(s) \, dS$$

La fonction c est, dans le cas présent, constante et nous avons, pour n=2 :

$$c = (2\Pi)^{-2} \int_{|\xi|^2 < 1} d = \frac{1}{4}$$

D'où :

$$\langle \omega_\varphi . c \rangle = \frac{1}{8} \int_{\partial\Omega} dS = \frac{1}{4}$$

Le théorème 2 donne donc :

$$N(t) = \frac{t \operatorname{Log} t}{4} + O(t) \qquad (t \to +\infty)$$

Nous retrouvons ainsi l'équivalent de N(t) déjà donné par N. Shimakura [9] (cf. aussi Nordin [7]). La méthode de N. Shimakura utilise la connaissance explicite des valeurs propres de A dans ce cas.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] S. AGMON Lectures on elliptic boundary value problems
Van Nostrand (1965).

[2] S. AGMON - Y. KANNAI On the asymptotic behavior of spectral fonctions and resolvant kernels of elliptic operators
Israël Journal of Mathematics - Vol. 5, n° 1, (1967), p 1-30.

[3] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
Arch. for Rat. Mech. and Analysis - Vol. 34, n° 5, (1969), p. 361-369.

[4] BOUTEL DE MOUVEL - P. GRISVARD Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur
C.R. Acad. Sciences Paris. t. 272, n° 1, (1971), p. 23-26.

[5] J. KARAMATA Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche die Laplacesche une Stieltjesoche Transformation betreffen
Journ. fur reine und anjew. Math. 164, (1931), p. 27-39.

[6] P. MALLIAVIN Un théorème taubérien relié aux estimations de valeurs propres
Collège de France. Séminaire J. Leray. Année 1962-1963.

[7] C. NORDIN The asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator
Arkiv for Mathematik, Vol. 10, n° 1, (1972), p. 3-21.

[8] PHAM THE LAI Classe de compacité d'opérateurs intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés.
A paraître à Israël Journal of Mathematics.

[9] J. SHIMADUA Quelques exemples des $\zeta$-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre.
Proc. Japan Acad. Sciences, 46, (1970), p. 1065-1069.