Journées Équations aux dérivées partielles

Dominique Prévosto
Jacques Rolland

Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1974), p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1974____A2_0>

THEOREME D'INDICE ET REGULARITE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

par

Dominique PREVOSTO et Jacques ROLLAND

Résumé. On se propose d'étudier des problèmes aux limites, dans un ouvert Ω régulier de $\mathbb{R}^n$, associés à des opérateurs L elliptiques dans Ω, dégénérés sur le bord Γ de Ω, de la forme :

$$Lu(x) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}(x\,;D_x)\ \{\ \varphi(x)^{q(m-r-h)}\ u(x)\},$$

où q est un réel > 1, m et r sont deux entiers tels que $0 < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$, $P^{m-h}(x\,;D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus m-h, $P^m(x\,;D_x)$ est un opérateur d'ordre m elliptique dans $\overline{\Omega}$ et φ une fonction régulière équivalente à la distance au bord Γ.

Pour tout entier $p \geq 0$, L est un opérateur linéaire continu de l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega) = \{u \in H^{r+p}(\Omega)\ ;\ \varphi^{q(m-r)}\ u \in H^{m+p}(\Omega)\}$$

muni de la norme canonique, dans l'espace de Sobolev usuel $H^p(\Omega)$.

On fait une hypothèse "d'ellipticité générale" sur l'opérateur L, qui implique que $P^r(x\,;D_x)$ est elliptique sur Γ. On introduit alors μ opérateurs frontière $B_j(x\,;D_x)$ tel que $\gamma B = (\gamma B_j\ ;j=1,\ldots,\mu)$ soit un opérateur linéaire continu de $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On montre que sous certaines hypothèses, le couple $(L\,;\gamma B)$ est un opérateur à indice de $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

l'indice étant indépendant de $p \in \mathbb{N}$.

Le théorème est montré pour $p = 0$ dans [10]. A partir de l'estimation a priori L^2, on obtient, par la méthode des quotients différentiels, la régularité tangentielle ; on est alors ramené, pour la régularité normale, à étudier la régularité d'un opérateur différentiel ordinaire sur un segment $[0,T[$.

TABLE DES MATIERES

I. INTRODUCTION ET ENONCE DES RESULTATS.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ, tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; \varphi(x) > 0\} \;; \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; \varphi(x) = 0\} \;; \\ \forall\, x \in \Gamma, \text{ grad } \varphi(x) \neq 0. \end{cases}$$

Soit $L \equiv L(x ; D_x)$ l'opérateur défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x ; D_x)\, u(x) \equiv \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}(x ; D_x)\, \{\varphi(x)^{q(m-r-h)}\, u(x)\}, \text{ où}$$

(i) q est un réel > 1, m et r sont deux entiers tels que $o < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$;

(ii) pour tout $h=o,\dots,m-r$, $P^{m-h}(x ; D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à $m-h$:

$$P^{m-h}(x ; D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m-h} p_\alpha^{m-h}(x)\, D_x^\alpha \;;$$

Si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $P^{m-h}(x ; D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul.

(iii) $P^m(x ; D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire que, pour tout $x_o \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$P_m^m(x_o ; \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha^m(x_o)\, \xi^\alpha \neq 0.$$

Pour tout h=o,...,m-r, on note $P^{m-h}_{m-h}(x\,;D_x)$ la partie principale d'ordre m-h de $P^{m-h}(x\,;D_x)$.

On introduit alors la condition "d'ellipticité générale" suivante :

(C) Pour tout $x_0 \in \Gamma$, tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$L_0(x_0\,;x,\xi) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}_{m-h}(x_0\,;\xi)\,\varphi(x)^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Cette condition implique que l'opérateur $P^r(x\,;D_x)$ est elliptique sur Γ, c'est-à-dire que, pour tout $x_0 \in \Gamma$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$P^r_r(x_0\,;\xi) \neq o.$$

Pour tout $x_0 \in \Gamma$, et pour tout couple de vecteurs (ξ,ξ') de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants, soit μ le nombre de racines τ de l'équation :

$$P^r_r\,(x_0\;;\;\xi + \tau\xi') = o$$

telles que Im $\tau > 0$. On suppose que μ ne dépend pas de $x_0 \in \Gamma$, et de (ξ,ξ') pour n=2.

On définit alors μ opérateurs frontière, à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$:

$$B_j(x,D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x)\,D_x^\alpha\ ,\ j=1,\dots,\mu\ ,$$

où, pour $j=1,\dots,\mu$, m_j est un entier inférieur ou égal à r-1.

On note $\gamma B = (\gamma B_j\,;j=1,\dots,\mu)$, où γ est l'opérateur restriction à Γ.

On suppose que le problème $(P^r, \gamma B)$ est régulier, c'est-à-dire que la condition suivante est vérifiée, (voir [8]) :

(C') Pour tout $x_0 \in \Gamma$ et pour tout vecteur ξ cotangent en x_0 à Γ, le problème aux limites :

$$\begin{cases} P^r_r(x_0;\ \xi + \operatorname{grad}\varphi(x)\ D_t)\ v(t) = 0 \\ B^o_j(x_0;\ \xi + \operatorname{grad}\varphi(x)\ D_t)\ v\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution v=0 dans $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^{(*)}$, où $B^o_j(x\,;D_x)$ désigne la partie principale d'ordre m_j de $B_j(x\,;D_x)$.

(*) $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ désigne l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à décroissance rapide en $t=\infty$.

Définition 1.1. *Soient* $s \in \mathbb{N}$ *et* $\ell \in \mathbb{Z}$. *On note* $W^{\ell}_{q,s}(\Omega)$ *l'espace des distributions* $u \in H^{\ell-s}(\Omega)$ *telles que* $\varphi^{qs}\, u \in H^{\ell}(\Omega)$. *On munit cet espace de la norme du graphe.*

Le principal résultat de cet article est le suivant :

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses (C) et (C'), pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *l'opérateur* $(L, \gamma B)$ *est linéaire continu et à indice de* $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$ *dans* $H^{p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *et son indice est indépendant de* p.

Corollaire 1.1. *Sous les hypothèses (C) et (C'), si* $u \in W^{m}_{q,m-r}(\Omega)$ *et si* $(L,\gamma B)\, u \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \times \prod_{j=1}^{\mu} C^{\infty}(\Gamma)$, *alors* $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.1. Si $P^{r}(x\,;D_x)$ est proprement elliptique, on peut prendre comme opérateurs frontière le système des conditions de Dirichlet

$$\gamma B_j = \gamma_j \quad , \; j=0,\ldots,\mu-1,$$

où $\gamma_j = \dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j}$, avec ν normale à Γ orientée vers l'intérieur de Ω.

Remarque 1.2. Le cas où $q \leq 1$ a été traité dans [2] ; et dans ce cas, la condition "d'ellipticité générale" (C) introduite ici doit être remplacée par la notion d'équation indicielle. Citons aussi [1] pour un cas particulier.

II. PRELIMINAIRES.

II.1. Quelques espaces de distributions.

II.1.1. Espaces de Sobolev avec poids $W^{\ell}_{q,s}(I)$.

Soient q un nombre réel ≥ 1 et s un entier ≥ 0 tel que $qs \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W^{\ell}_{q,s}(I) = \{u \in H^{\ell-s}(I) \; ; \; t^{qs}\, u \in H^{\ell}(I)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert si on les munit de la norme du graphe.

Remarque 2.1. On a l'injection continue suivante :

$$W^{\ell}_{q,s}(I) \hookrightarrow W^{\ell}_{1,qs}(I) = W^{\ell}_{qs}(I) ,$$

où $W^{\ell}_{qs}(I)$ est l'espace introduit dans [3]. Pour les propriétés des espaces $W^{\ell}_{k}(I)$, voir [3].

Proposition 2.1. *Pour tout entier* k *tel que* $o \leq k \leq s$ *et* $qk \in \mathbb{N}$, *l'application :* $u \longmapsto t^{qk}u$ *est linéaire et continue de* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R})$ (resp. $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}_+)$) *dans* $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R})$ (resp. $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}_+)$) .

Démonstration : Soit u appartenant à $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R})$. Désignons par $\hat{u}$ la transformée de Fourier, sur $\mathbb{R}$, de u. On a :

$$(1+|\tau|)^{\ell-s}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } (1+|\tau|)^{\ell}\ D^{qs}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}) .$$

Nous voulons démontrer que si $k=o,\ldots,s$, avec $qk \in \mathbb{N}$, alors :

$$(1+|\tau|)^{\ell-s+k}\ D^{qk}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}) .$$

Il suffit de démontrer cette propriété sur $\mathbb{R}_+$. Soit $T > o$. Sur (o,T), on a : $\hat{u}(\tau) \in L^2(o,T)$ et $D^{qs}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(o,T)$; donc $\hat{u}(\tau) \in H^{qs}(o,T)$; par conséquent $D^{qk}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in H^{q(s-k)}(o,T) \hookrightarrow L^2(o,T)$. D'où :

$$(1+|\tau|)^{\ell-s+k}\ D^{qk}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(o,T).$$

Sur $(T,+\infty)$, on a :

$$\tau^{\ell-s}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(T,+\infty) \text{ et } \tau^{\ell}\ D^{qs}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(T,+\infty).$$

On en déduit que, pour tout entier $j=o,\ldots,qs$, on a :

$$\tau^{\ell-s+\frac{j}{q}}\ D^{j}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(T,+\infty).$$

En particulier, pour $k=o,\ldots,s$ avec $qk \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tau^{\ell-s+k}\ D^{qk}_{\tau}\ \hat{u}(\tau) \in L^2(T,+\infty).$$

En regroupant les résultats sur (o,T) et sur $(T,+\infty)$, on obtient que $(1+|\tau|)^{\ell-s+k}\ D^{qk}_{\tau}\ \hat{u}(\tau)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$, avec :

$$\|(1+|\tau|)^{\ell-s+k}\ D^{qk}_{\tau}\ \hat{u}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C \left\{ \|(1+|\tau|)^{\ell-s}\ \hat{u}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|(1+|\tau|)^{\ell} D^{qs}_{\tau}\ \hat{u}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right\},$$

où C est une constante indépendante de u.

On procède de manière analogue sur $\mathbb{R}_-$. La proposition 2.1 est donc démontrée pour u appartenant à l'espace $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R})$.

Le résultat, pour u appartenant à l'espace $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}_+)$, résulte du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe un opérateur de prolongement* P *linéaire continu de* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}_+)$ *dans* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R})$.

Démonstration : Pour u appartenant à $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}_+)$, on pose :

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) \ , \text{ si } t \geq o \\ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \ u(-jt) \ , \text{ si } t < o, \end{cases}$$

avec : $r = \max\,(qs-\ell,\ qs,\ \ell-s-1+qs)$

et où : $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \ (-j)^k = 1$, pour $k=\min\,(\ell-qs,-qs),\ldots,\ \max\,(\ell-s-1,-1)$.

On peut trouver des α_j satisfaisant ces conditions puisqu'il s'agit d'un système carré de Vandermonde.

1er cas : $\ell \geq o$ et $\ell-s > o$; dans ce cas, $r = \ell - s-1+qs$ et k varie entre $-qs$ et $\ell-s-1$. On a donc :

$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(-j)^k = 1$ pour $k=o,\ldots,\ell-s-1$; ce qui montre que P est linéaire continu de $H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell-s}(\mathbb{R})$.

De plus, on écrit : $t^{qs}\ Pu = Q(t^{qs}u)$,

où

$$Qv(t) = \begin{cases} v(t), \text{ si } t \geq o \\ \sum_{j=1}^{r} \dfrac{\alpha_j}{(-j)^{qs}} \ v(t), \text{ si } t < o. \end{cases}$$

Comme $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \ (-j)^k = 1$ pour $k=-qs,\ldots,\ell-qs-1$, on a :

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{(-j)^{qs}} (-j)^{k'} = 1 \quad \text{pour } k' = o,\ldots,\ell-1 \ ;$$

ceci montre que Q est linéaire continu de $H^{\ell}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell}(\mathbb{R})$. On a donc démontré que P est linéaire continu de $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}_+)$ dans $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R})$.

<u>2ème cas</u> : $\ell < o$ et $\ell - s < o$; dans ce cas, $r = qs-\ell$ et k varie entre ℓ-qs et -1.

Pour montrer que P est linéaire et continu de $H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell-s}(\mathbb{R})$, on montre que ${}^tP$ est linéaire continu de $H^{s-\ell}(\mathbb{R})$ dans $H_o^{s-\ell}(\mathbb{R}_+)$. On a :

$$< {}^t P\Phi, u >_{H_o^{s-\ell}(\mathbb{R}_+) \times H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)} = < \Phi, Pu >_{H^{s-\ell}(\mathbb{R}) \times H^{\ell-s}(\mathbb{R})} .$$

D'oũ, par intégrations par parties :

$${}^tP\,\Phi\,(t) = \Phi(t) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{j}\,\Phi\left(-\frac{t}{j}\right), \text{ pour } t > o.$$

On a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(-j)^k = 1$ pour $k = \ell-s,\dots,-1$;

donc :

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{j}\left(-\frac{1}{j}\right)^{k'} = -1 \text{ pour } k' = o,\dots,s-\ell-1.$$

Ceci montre que les $s-\ell$ premières traces de ${}^tP\Phi$ sont nulles. D'oũ la continuité de ${}^tP$ de $H^{s-\ell}(\mathbb{R})$ dans $H_o^{s-\ell}(\mathbb{R}_+)$.

Pour l'opérateur Q défini comme dans le 1er cas, on procède encore par dualité. On a :

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(-j)^k = 1 \quad \text{pour } k=\ell-qs,\dots,-qs-1 \text{ ;}$$

donc

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(-j)^{-qs}\,\frac{1}{j}\left(-\frac{1}{j}\right)^{k'} = -1 \text{ pour } k' = o,\dots,-\ell-1 .$$

On en déduit la continuité de ${}^tQ$ de $H^{-\ell}(\mathbb{R})$ dans $H_o^{-\ell}(\mathbb{R}_+)$; d'oũ la continuité de Q de $H^{\ell}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell}(\mathbb{R})$.

<u>3ème cas</u> : $\ell \geq o$ et $\ell-s \leq o$; dans ce cas r=qs et k varie entre -qs et -1.

La continuité de P de $H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell-s}(\mathbb{R})$ se fait comme dans le 2ème cas, par dualité.

La continuité de Q de $H^{\ell}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell}(\mathbb{R})$ se fait comme dans le 1er cas.

Le lemme 2.1 est donc complètement démontré.

Par conséquent, la proposition 2.1 est démontrée pour u appartenant à $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}_+)$.

Dans les lemmes qui suivent, m désigne un entier > o tel que qm appartienne à $\mathbb{N}$ et p est un entier de $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.2. *Soit* u *appartenant à* $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. *Alors, pour tout* $j=o,\dots,m$ *tel que :* $qj \in \mathbb{N}$, *on a :* $t^{qj}\, u \in H^{p+j}(o,T)$.

Démonstration : Ceci résulte directement de la proposition 2.1.

Lemme 2.3. *Pour tout entier* $j=o,\dots,m$ *tel que* $qj \in \mathbb{N}$ *et pour tout entier* $k=o,\dots,j$, *l'opérateur :*

$$u \longmapsto t^{qj-k}\, D_t^{j-k}\, u$$

est linéaire et continu de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ *dans* $H^{p}(o,T)$. *De plus, si* $k \geq 1$, *cet opérateur est compact de* $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ *dans* $H^{p}(o,T)$.

Démonstration : Soit u appartenant à $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. Puisque u appartient à $H^{p}(o,T)$, on a : $t^{qj-j}\, u \in H^{p}(o,T)$, avec :

$$\|t^{qj-j}\, u\|_{H^{p}(o,T)} \leq C\, \|u\|_{H^{p}(o,T)} \quad \text{, où C ne dépend pas de u.}$$

On en déduit que :

$$\|t^{qj-j}\, u\|_{H^{p}(o,T)} \leq C\, \|u\|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)} \,.$$

La continuité de l'opérateur $u \longmapsto t^{qj-k}\, D_t^{j-k} u$ est donc montrée pour k=j.

Supposons que la continuité de cet opérateur ait été démontrée pour $k=h,\dots,j$ avec $h \geq 0$, et démontrons-la pour $k=h-1$, si $h-1 \geq 0$.

On a : $u \in H^{p}(o,T)$ et, d'après le lemme 2.2, $t^{qj}\, u \in H^{p+j}(o,T)$.

Donc, $u \in W^{p+j}_{q,j}(o,T)$. D'après la remarque 2.1, on en déduit que $u \in W^{p+j}_{qj}(o,T)$.

Par conséquent, (voir [3]) :

$$t^{qj-(h-1)}\ u \in H^{p+j-(h-1)}(o,T).$$

D'où :

$$D_t^{j-(h-1)}\ \{t^{qj-(h-1)}u\} \in H^p(o,T).$$

Or :

$$D_t^{j-(h-1)}\{t^{qj-(h-1)}u\} = t^{qj-(h-1)}\ D_t^{j-(h-1)}\ u + \sum_{\ell=1}^{j-(h-1)} c_\ell\ t^{qj-(h-1)-\ell} D_t^{j-(h-1)-\ell} u.$$

L'hypothèse de récurrence montre que pour tout $\ell=1,\dots,j-(h-1)$, on a : $t^{qj-(h-1)-\ell}\ D_t^{j-(h-1)-\ell}\ u \in H^p(o,T)$.

Par conséquent : $t^{qj-(h-1)}\ D_t^{j-(h-1)}u$ appartient à $H^p(o,T)$, avec :

$$\| t^{qj-(h-1)}\ D_t^{j-(h-1)}u\|_{H^p(o,T)} \le C\ \|u\|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)}.$$

Ceci achève la démonstration de la continuité.

On montre maintenant la compacité de l'opérateur : $u \longmapsto t^{qj-k}\ D_t^{j-k}u$ pour $j=1,\dots,m$ et $k=1,\dots,j$, avec $qj \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n\ ; n \in \mathbb{N})$ une suite bornée dans $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. On peut en extraire une sous-suite, notée encore $(u_n\ ; n \in \mathbb{N})$, qui converge faiblement vers u dans $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. Par différence, on peut supposer que $u=o$.

Montrons que la suite $(t^{qj-k}\ D_t^{j-k}\ u_n\ ; n \in \mathbb{N})$ converge fortement vers 0 dans $H^p(o,T)$ quand $n \to +\infty$.

On a : $u_n \in W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. D'après la première partie de la démonstration, on en déduit que : $t^{qj-k}\ D_t^{j-k}\ u_n$ appartient à $H^p(o,T)$.

Par conséquent, $t^{qj-k+1}\ D_t^{j-k}\ u_n$ appartient à $H^p(o,T)$.

Or, puisque $k \ge 1$, $D_t\ \{t^{qj-k+1}\ D_t^{j-k}\ u_n\} = -i(qj-k+1)\ t^{qj-k}\ D_t^{j-k}\ u_n + t^{qj-(k-1)}D_t^{j-(k-1)}u_n$ appartient à $H^p(o,T)$.

Par conséquent : $t^{qj-k+1}\ D_t^{j-k}\ u_n \in H^{p+1}(o,T)$, avec :

$\| t^{qj-k+1}\ D_t^{j-k}\ u_n\|_{H^{p+1}(o,T)} \le C\ \|u_n\|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)}$, où C est une constante indépendante de $n \in \mathbb{N}$.

Or : $D_t^{j-k}\, u_n \in H^{p-j+k}(o,T)$, puisque $u_n \in H^p(o,T)$.

Donc : $D_t^{j-k}\, u_n \in W^{p+1}_{qj-k+1}(o,T)$, car $H^{p-j+k}(o,T) \hookrightarrow H^{p-qj+k}(o,T)$.

On en déduit (voir : proposition 1.2 de [4]) que $t^{qj-k}\, D_t^{j-k}\, u_n \in H^p(o,T)$ et que, pour tout $\eta > o$, il existe une constante $C_\eta > o$ indépendante de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\| t^{qj-k}\, D_t^{j-k} u_n \|_{H^p(o,T)} \leq \eta \| t^{qj-k+1}\, D_t^{j-k} u_n \|_{H^{p+1}(o,T)} + C_\eta \| D_t^{j-k}\, u_n \|_{H^{p-qj+k}(o,T)}$$

$$\leq \eta C \| u_n \|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)} + C_\eta \| D_t^{j-k}\, u_n \|_{H^{p-qj+k}(o,T)} .$$

Posons : $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \| u_n \|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\eta = \frac{\varepsilon}{2\, CM}$. Ensuite, comme l'injection $H^{p-j+k}(o,T) \hookrightarrow H^{p-qj+k}(o,T)$ est compacte, il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_o$, on ait :

$$\| D_t^{j-k}\, u_n \|_{H^{p-qj+k}(o,T)} \leq \frac{\varepsilon}{2 C_\eta} .$$

Donc, pour tout $n \geq n_o$, on a :

$$\| t^{qj-k}\, D_t^{j-k}\, u_n \|_{H^p(o,T)} \leq \varepsilon .$$

Ceci prouve que la suite $(t^{qj-k}\, D_t^{j-k}\, u_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ converge fortement vers 0 dans $H^p(o,T)$ quand $n \to +\infty$.

Le lemme 2.3 est donc complètement démontré.

Lemme 2.4. *Pour tout* $p \in \mathbb{Z}$, *l'opérateur* D_t *est linéaire continu et à indice de* $H^{p+1}(o,T)$ *sur* $H^p(o,T)$, *d'indice 1, et de* $W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$ *sur* $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$, *d'indice 1.*

Démonstration : La première partie du lemme est triviale.

Soit $u \in W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$. On a : $u \in H^{p+1}(o,T)$; donc $D_t\, u \in H^p(o,T)$, avec :

$$\| D_t u \|_{H^p(o,T)} \leq C \| u \|_{W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)}$$, où C est une constante indépendante de u.

D'après la remarque 2.1, on sait que $u \in W^{m+p+1}_{qm}(o,T)$. Par conséquent, (voir [3]), $t^{qm-1}\, u \in H^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|t^{qm-1}u\|_{H^{m+p}(o,T)} \leq C\ \|u\|_{W^{m+p+1}_{qm}(o,T)} \leq C\ \|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)}.$$

Puisque $t^{qm}\ u \in H^{m+p+1}(o,T)$, on a : $D_t\ \{t^{qm}\ u\} \in H^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|D_t\ \{t^{qm}\ u\}\|_{H^{m+p}(o,T)} \leq C\ \|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)}.$$

Or : $D_t\ \{t^{qm}\ u\} = -iqm\ t^{qm-1}\ u + t^{qm}\ D_t\ u$. On en déduit que $t^{qm}\ D_t u$ appartient à $H^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|t^{qm}\ D_t u\|_{H^{m+p}(o,T)} \leq C\ \|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)}.$$

On a donc montré que $D_t u \in W^{m+p}_{q,m}(o,T)$, avec :

$\|D_t u\|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)} \leq C\ \|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)}$, où C est une constante indépendante de u.

Montrons maintenant que D_t est surjectif de $W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$ sur $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. Soit donc $u \in W^{m+p}_{q,m}(o,T)$. Comme $u \in H^p(o,T)$, il existe $v \in H^{p+1}(o,T)$ tel que $D_t v = u$. On a : $t^{qm}\ v \in H^{p+1}(o,T)$.

$$\text{Or : } D_t^{m+1}\ \{t^{qm} v\} = c_{m+1}\ t^{qm-m-1}\ v + \sum_{k=o}^{m} c_k\ t^{qm-k}\ D_t^{m+1-k}\ v$$

$$= c_{m+1}\ t^{qm-m-1}\ v + \sum_{k=o}^{m} c_k\ t^{qm-k}\ D_t^{m-k}\ u.$$

Comme $u \in W^{m+p}_{q,m}(o,T)$, le lemme 2.3 permet de dire que, pour $k=o,\dots,m$, $t^{qm-k}\ D_t^{m-k}\ u \in H^p(o,T)$. De plus, puisque $v \in H^p(o,T)$, on a $t^{qm-m-1}\ v \in H^p(o,T)$, (car $qm-m-1 \in \mathbb{N}$). Donc : $D_t^{m+1}\ \{t^{qm} v\} \in H^p(o,T)$.

Et comme $t^{qm}\ v \in H^p(o,T)$, on en déduit que $t^{qm}\ v \in H^{m+p+1}(o,T)$. Par conséquent : $v \in W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$. La surjectivité de l'opérateur D_t est donc démontrée.

Enfin, il est clair que le noyau de l'opérateur D_t dans $W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$ est de dimension 1.

Le lemme 2.4 est donc complètement démontré.

Lemme 2.5. *Soit* $p \in \mathbb{Z}$ *et soit* $b(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *telle que* $b(o) = o$. *Alors, pour tout* $j=o,\dots,m-1$ *tel que* $qj \in \mathbb{N}$, *l'opérateur* $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j$ *est un opérateur compact de* $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ *dans* $H^p(o,T)$.

Démonstration : pour p=o, le résultat est trivial.

Pour $p \geq o$, la démonstration se fait par récurrence. Supposons donc que le lemme soit démontré pour $p \leq o$ et montrons-le à l'ordre p+1.

Soit j un entier compris 0 et m-1, tel que $qj \in \mathbb{N}$. Pour montrer que l'opérateur $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^{p+1}(o,T)$ il suffit de montrer que $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$ et que $D_t\ \{b(t)\ t^{qj}\ D_t^j\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$.

Or, d'après le lemme 2.3, $t^{qj}\ D_t^j$ est continu de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^{p+1}(o,T)$. Comme l'injection $H^{p+1}(o,T) \hookrightarrow H^p(o,T)$ est compacte, on en déduit que l'opérateur $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$.

De plus : $D_t\ \{b(t)\ t^{qj}\ D_t^j\} = -i\left[b'(t) + qj\ \frac{b(t)}{t}\right]\{t^{qj}\ D_t^j\} + b(t)\ t^{qj}\ D_t^j\ \{D_t\cdot\}$.

Comme $b(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et que $b(o) = o$, on déduit que $\left[b'(t)+qj\ \frac{b(t)}{t}\right] \in C^{\infty}(\mathbb{R})$; par conséquent : $\left[b'(t) + qj\ \frac{b(t)}{t}\right]\{t^{qj}\ D_t^j\cdot\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$. Enfin, comme D_t est continu de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ et que, par hypothèse de récurrence, $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$, on déduit que $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j\ \{D_t\cdot\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$. Par conséquent, $D_t\ \{b(t)\ t^{qj}\ D_t^j\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$. On a donc montré que $b(t)\ t^{qj}\ D_t^j$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ dans $H^{p+1}(o,T)$. Le lemme est donc démontré pour $p \geq o$.

Pour $p \leq o$, on procède encore par récurrence. Supposons que le lemme soit démontré pour $p \leq o$ et montrons-le à l'ordre p-1.

Soit j un entier compris entre 0 et m-1. Comme toute partie bornée de $W^{m+p-1}_{q,m}(o,T)$ est l'image par l'opérateur D_t d'une partie bornée de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$, il suffit de démontrer que l'opérateur $b(t)\, t^{qj}\, D^j_t \{D_t\cdot\}$ est compact de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. Or, on a :

$$b(t)\, t^{qj}\, D^j_t \{D_t\cdot\} = D_t \{b(t) t^{qj}\, D^j_t\} + i\left[b'(t) + qj\, \frac{b(t)}{t}\right] t^{qj}\, D^j_t .$$

L'opérateur $\left[b'(t) + qj\, \frac{b(t)}{t}\right] t^{qj}\, D^j_t$ est continu de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$; comme l'injection $H^p(o,T) \hookrightarrow H^{p-1}(o,T)$ est compacte, cet opérateur est compact de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. De plus, par hypothèse de récurrence, $b(t)\, t^{qj}\, D^j_t$ est un opérateur compact de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$; donc $D_t \{b(t)\, t^{qj}\, D^j_t\}$ est un opérateur compact de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$.

Par conséquent, $b(t)\, t^{qj}\, D^j_t \{D_t\cdot\}$ est un opérateur compact de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. Ceci achève la démonstration du lemme pour $p \leq o$.

Le lemme est donc complètement démontré.

II.1.2. Espaces de Sobolev avec poids $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$ et $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$.

Soient q un nombre réel ≥ 1 et s un entier ≥ 0 tel que $qs \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n) \ ; \ t^{qs}\, u \in H^{\ell}(\mathbb{R}^n)\}$$

$$W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ t^{qs}\, u \in H^{\ell}(\mathbb{R}^n_+)\}$$

et

$$W^{\ell}_{q,s}(I\,;L^2(\mathbb{R}^{n-1})) = \{u \in H^{\ell-s}(I\,;L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \ ; \ t^{qs}\, u \in H^{\ell}(I\,;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert si on les munit de la norme du graphe.

<u>Remarque 2.2</u>. On a l'injection continue suivante :

$$W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{\ell}_{1,qs}(\mathbb{R}^n) = W^{\ell}_{qs}(\mathbb{R}^n),$$

où $W^{\ell}_{qs}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace introduit dans [2]. De même sur $\mathbb{R}^n_+$. Pour les propriétés de ces espaces, voir [2].

<u>Proposition 2.2</u>. *Soient* $\ell \in \mathbb{Z}$ *et* $s \in \mathbb{N}$ *tel que* $qs \in \mathbb{N}$. *Alors, pour tout entier* k *tel que* $o \leq k \leq s$ *et* $qk \in \mathbb{N}$, *l'application* : $u \longmapsto t^{qk}u$ *est linéaire et continue de* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$ *) dans* $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n_+)$ *).*

<u>Démonstration</u> :

<u>1er cas</u> : $\ell-s \geq o$. Soit $u \in W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$. On a, puisque ℓ et $\ell-s$ sont des entiers $\geq o$: $u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}\,;\, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $t^{qs}\, u \in H^{\ell}(\mathbb{R}\,;\, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$, on obtient, de la même façon que pour la proposition 2.1, que $t^{qk}\, u \in H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}\,;\, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, pour $k=o,\ldots,s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$.

Comme $\ell-s+k \geq o$, on a : $t^{qk}\, u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour montrer que $t^{qk}u$ appartient à $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n)$, il suffit donc de montrer que $D_t^{\ell-s+k}\{t^{qk}u\}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que, pour $i=1,\ldots,n-1$, $D_{x_i}^{\ell-s+k}\{t^{qk}u\}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous avons montré que $t^{qk}\, u \in H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}\,;\, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Par conséquent : $D_t^{\ell-s+k}\{t^{qk}u\}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par ailleurs, $u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n)$ et $t^{qs}\, u \in H^{\ell}(\mathbb{R}^n)$; donc $u \in L^2(\mathbb{R}\,;\, H^{\ell-s}(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $t^{qs}\, u \in L^2(\mathbb{R}\,;\, H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Un théorème de dérivées intermédiaires, appliqué après transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$, permet d'en déduire que, pour tout entier $k=o,\ldots,s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$, on a : $t^{qk}\, u \in L^2(\mathbb{R}\,;\, H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^{n-1}))$. D'où, pour $i=1,\ldots,n-1$: $D_{x_i}^{\ell-s+k}\{t^{qk}u\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration de la proposition 2.2 est donc achevée sur $\mathbb{R}^n$ lorsque $\ell-s \geq o$.

<u>2ème cas</u> : $\ell-s < o$. Soit $u \in W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$. On définit une distribution v sur $\mathbb{R}^n$ par : $v(x) = \mathcal{F}^{-1}\{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}}\, \hat{u}\,(\xi',\tau)\}\,(x)$, où $\hat{.}$ désigne la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}^{-1}$ désigne l'inverse de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$.

Comme $u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n)$ et $t^{qs}\, u \in H^{\ell}(\mathbb{R}^n)$, on a : $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $t^{qs}\, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Donc, v appartient à $W^s_{q,s}(\mathbb{R}^n)$. Et, d'après le 1er cas, pour tout entier $k=o,\dots,s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$, on a : $t^{qk}\ v \in H^k(\mathbb{R}^n)$. On a donc, pour tout $k=o,\dots,s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$, $v \in W^k_{q,k}(\mathbb{R}^n) \subsetneq W^k_{qk}(\mathbb{R}^n)$. D'après [2], on en déduit que, pour tout $j=o,\dots,qk$, on a : $t^{qk-j}\ v \in H^{k-j}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, pour tout $k=o,\dots,s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$ et tout $j=o,\dots,qk$, on a :

$$(\ast)\quad \sum_{p=o}^{qk-j} C^p_{k,j}\ (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-j}{2}}\ D^p_\tau\ \{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}}\}\ D^{qk-j-p}_\tau\ \hat{u}(\xi',\tau) \in L^2(\mathbb{R}^n)\ .$$

On a : $D^p_\tau\ \{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}}\} = \sum_{r=\left[\frac{p}{2}\right]}^{p} C_{p,r}\,\tau^{2r-p}\ (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}-r}$, où $\left[\frac{p}{2}\right]$ désigne le plus petit entier positif ou nul supérieur ou égal à $\frac{p}{2}$.

Pour $j=qk$, la formule $(\ast)$ donne : $(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-qk+\ell-s}{2}}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour $j=qk-1$, on a :

$$|(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(qk-1)}{2}}\ D_\tau\{(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}}\}\ \hat{u}\ | \leq C\ |\tau|\,(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-qk+1+\ell-s}{2}-1}\ |\hat{u}|$$
$$\leq C\ (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-qk+\ell-s}{2}}\ |\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)\ .$$

Donc, $\tau(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(qk-1)+\ell-s}{2}-1}\ \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Et, par différence, la formule $(\ast)$ donne que $(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(qk-1)+\ell-s}{2}}\ D_\tau\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit maintenant j un entier tel que $o < j \leq qk-1$. Supposons, par récurrence que, pour $j'=j$ et $j'=j+1$, on ait, pour tout $p=o,\dots,qk-j'$ et tout $r=\left[\frac{p}{2}\right],\dots,p$:

$$\tau^{2r-p}\ (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-j'+\ell-s}{2}-r}\ D^{qk-j'-p}_\tau\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\ .$$

Soit alors $p=1,\dots,qk-(j-1)$ et soit $r=\left[\frac{p}{2}\right]+1,\dots,p$. On a :

$$|\tau^{2r-p}\ (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(j-1)+\ell-s}{2}-r}\ D^{qk-(j-1)-p}_\tau\ \hat{u}\ |$$
$$\leq C\ |\tau^{2(r-1)-(p-1)}(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-j+\ell-s}{2}-(r-1)}\ D^{qk-j-(p-1)}_\tau\ \hat{u}\ | \in L^2(\mathbb{R}^n)\ ,$$

d'après l'hypothèse de récurrence car $p-1$ est compris entre 0 et $qk-j$ et $r-1$ est compris entre $\left[\frac{p-1}{2}\right]$ et $p-1$.

Pour $r=\left[\frac{p}{2}\right]$, si p est impair, le calcul précédent est toujours valable car $\left[\frac{p}{2}\right]-1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$. Si p est pair, on a :

$$(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(j-1)+\ell-s-p}{2}} \quad D_\tau^{qk-(j-1)-p} \quad \hat{u} =$$

$$(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(j+1)+\ell-s-(p-2)}{2}} \quad D_\tau^{qk-(j+1)-(p-2)} \quad \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

par hypothèse de récurrence puisque $o \leq p-2 \leq qk-(j+1)$.

Et, par différence, la formule (✱) montre que :

$$(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-(j-1)+\ell-s}{2}} \quad D_\tau^{qk-(j-1)} \quad \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

On a donc montré par récurrence que, pour tout $j=o,\dots,qk$, tout $p=o,\dots,qk-j$ et tout $r = \left[\frac{p}{2}\right],\dots,p$, on a :

$$\tau^{2r-p} \, (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k-j+\ell-s}{2}-r} D_\tau^{qk-j-p} \, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, pour $j=o$ et $p=o$, il vient :

$$(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{\frac{k+\ell-s}{2}} \quad D_\tau^{qk} \, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Ceci prouve que $t^{qk}u$ appartient à $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n)$. La proposition 2.2 est donc montrée sur $\mathbb{R}^n$, dans le 2ème cas.

Le résultat, lorsque u appartient à $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$, découle du lemme suivant :

<u>Lemme 2.6</u>. *Il existe un opérateur de prolongement* P *linéaire et continu de* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Démonstration</u> :

On pose : $$Pu(x',t) = \begin{cases} u(x',t), & \text{si } t \geq o \\ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \, u(x',-jt), & \text{si } t < o, \end{cases}$$

avec $r = \max(qs-\ell, qs, \ell-s-1+qs)$ et où $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \, (-j)^k = 1$ pour $k = \min(\ell-qs, -qs),\dots,\max(\ell-s-1,-1)$. On peut trouver des α_j satisfaisant ces conditions car il s'agit d'un système carré de Vandermonde.

On montre, de la même façon que pour le lemme 2.1, que P est un opérateur linéaire et continu de $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $W^{\ell}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$.

Dans les deux lemmes suivants, m et r sont deux entiers tels que $o < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$.

<u>Lemme 2.7</u>. *Soit* $p \in \mathbb{N}$ *et soit* $u \in W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ *tel que, pour tout* $i=1,\dots,n-1$, *on ait* $D_{x_i} u \in W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$. *Alors, pour tout* $h=o,\dots,m-r$ *tel que* $q(m-r-h) \in \mathbb{N}$ *et tout* $\alpha = (\alpha',\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $|\alpha| \leq m-h$ *et* $\alpha_n < m-h$, *on a :*

$D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)$, *avec :*

$$\|D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \{\|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i} u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)}\},$$

où C *est une constante indépendante de* u.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 2.2, on a $t^{q(m-r-h)} u \in H^{m+p-h}(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>1er cas</u> : $|\alpha| < m-h$. Alors, on a : $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{m+p-h-|\alpha|}(\mathbb{R}^n_+)$.

Comme $m-h-|\alpha| \geq 1$, on a donc : $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)$, avec :

$$\|D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)},$$

où C est une constante indépendante de u.

<u>2ème cas</u> : $|\alpha| = m-h$. Comme $\alpha_n < m-h$, il existe $i=1,\dots,n-1$ tel que $\alpha_i \geq 1$. Alors :

$$D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\} = D^{\beta'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} D_{x_i} u\},$$

avec :

$$\beta' = (\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n-1}).$$

Si l'on pose $\beta = (\beta',\alpha_n)$, on a : $|\beta| < m-h$. De plus : $D_{x_i} u \in W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$.

On applique le premier cas à $D_{x_i} u$. Par conséquent : $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)$, et :

$$\|D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha_n}_t \{t^{q(m-r-h)} u\}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \|D_{x_i} u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)},$$

où C est une constante indépendante de u.

Le lemme 2.7 est donc démontré.

<u>Lemme 2.8</u>. *Soient* $p \in \mathbb{N}$ *et* $u \in W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$. *Si pour* $i=1,\dots,n-1$, $D_{x_i} u \in W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ *et si* $u \in W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, *alors* $u \in W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, *avec :*

$$\|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i} u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \right\},$$

où C *est une constante indépendante de* u.

<u>Démonstration</u> : On a : $u \in H^{p+r}(\mathbb{R}^n_+)$; donc, pour $\ell=0,\dots,p+r$, on a :

$$u \in H^{p+r-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1})) .$$

Puisque, pour $i=1,\dots,n-1$, $D_{x_i} u \in W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, on a : $D_{x_i} u \in H^{p+r}(\mathbb{R}^n_+)$; Donc, $D_{x_i} u \in H^{p+r-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour $\ell=0,\dots,p+r$. Par conséquent, pour tout $\ell=0,\dots,p+r$, on a :

$$u \in H^{p+r-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell+1}(\mathbb{R}^{n-1})) .$$

Mais on a, de plus, par hypothèse : $u \in W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$; donc $u \in H^{r+p+1}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Par conséquent, pour tout $\ell=0,\dots,p+r+1$, on a : $u \in H^{p+r+1-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Donc, $u \in H^{p+r+1}(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour montrer que $u \in W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, il reste à prouver que :

$$t^{q(m-r)}\, u \in H^{m+p+1}(\mathbb{R}^n_+) .$$

Par hypothèse, $t^{q(m-r)}\, u \in H^{m+p}(\mathbb{R}^n_+)$; donc, pour tout $\ell=0,\dots,m+p$, on a :

$$t^{q(m-r)}\, u \in H^{m+p-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1})) .$$

De même, $t^{q(m-r)} D_{x_i} u \in H^{m+p}(\mathbb{R}^n_+)$, pour $i=1,\dots,n-1$. Donc, pour tout $i=1,\dots,n-1$ et pour tout $\ell=0,\dots,m+p$, on a :

$$D_{x_i} \{t^{q(m-r)} u\} \in H^{m+p-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1})) .$$

Par conséquent, pour tout $\ell=0,\dots,m+p$, on a :

$$t^{q(m-r)}\, u \in H^{m+p-\ell}(\mathbb{R}_+ ; H^{\ell+1}(\mathbb{R}^{n-1})) .$$

Comme $u \in W^{m+p+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, on a : $t^{q(m-r)}\ u \in H^{m+p+1}(\mathbb{R}_+ ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

On a donc : $t^{q(m-r)}\ u \in H^{m+p+1-\ell}\ (\mathbb{R}_+ ; H^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1}))$, pour tout $\ell = o,\dots,m+p+1$.

Ceci implique que : $t^{q(m-r)}\ u \in H^{m+p+1}(\mathbb{R}^n_+)$.

Le lemme 2.8 est donc démontré.

II.2. <u>Etude d'un opérateur différentiel ordinaire</u>.

II.2.1. <u>Notations et résultats</u>.

Soit M l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}$ par

$$M(t,D_t)\ u(t) = D_t^m \{t^{qm}\ u(t)\} + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(t)\ D_t^j\ \{t^{qj}\ u(t)\}$$

où

(i) q est un nombre réel > 1, m un entier > o tel que $qm \in \mathbb{N}$;

(ii) pour $j=o\dots m-1$, $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $a_j \equiv o$ si $qj \notin \mathbb{N}$.

On considère l'hypothèse suivante :

(H) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_o(t,\tau) = \tau^m\ t^{qm} + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(o)\ \tau^j\ t^{qj} \neq o.$$

Cette condition (H) est équivalente à dire que les polynômes

$$P^+(\tau) = \tau^m + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(o)\ \tau^j$$

et

$$P^-(\tau) = (-1)^{qm}\ \tau^m + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(o)\ (-1)^{qj}\ \tau^j$$

n'ont pas de racine réelle. On notera m_+ (resp. m_-) le nombre de racines τ de $P^+(\tau) = o$ (resp. $P^-(\tau) = o$) telles que $\text{Im}\ \tau > o$.

<u>Théorème 2.1</u>. *Sous l'hypothèse (H), pour tout* $p \in \mathbb{Z}$ *et tout* $T > o$, $M(t,D_t)$ *est un opérateur linéaire continu et à indice de* $W^{m+p}_{q,m}(-T,T)$ *sur* $H^p(-T,T)$ *d'indice indépendant de* p *et égal à* $m-m_+ + m_-$.

<u>Corollaire 2.1</u>. *Sous l'hypothèse (H), soit* $p \in \mathbb{Z}$. *Si* u *appartient à* $W^{m+p}_{q,m}(-T,T)$ *et si* $M(t,D_t)$ u *appartient à* $H^{p+1}(-T,T)$, *alors* u *appartient à* $W^{m+p+1}_{q,m}(-T,T)$ *et on a :*

$$\|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m}(-T,T)} \leq C \{\|M(t,D_t)u\|_{H^{p+1}(-T,T)} + \|u\|_{W^{m+p}_{q,m}(-T,T)}\}$$

où C *est une constante indépendante de* u.

<u>Corollaire 2.2</u>. *Sous l'hypothèse (H), si* $u \in \mathcal{D}'(-T,T)$ *et si* $M(t,D_t)\, u \in C^\infty(-T,T)$, *alors* $u \in C^\infty(-T,T)$.

On retrouve ainsi un résultat qui découle du théorème 4.2 de [5] et du théorème 3 de [6].

Le théorème 2.1 se déduit d'une étude sur (o,T).

Pour cela, on introduit l'hypothèse :

(H_+) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$M_o(t,\tau) \neq o$.

Ceci équivaut à dire que le polynôme $P^+(\tau)$ n'a pas de racine réelle.

<u>Théorème 2.2</u>. *Sous l'hypothèse (H_+), pour tout* $p \in \mathbb{Z}$ *et tout* $T > o$, $M(t,D_t)$ *est un opérateur linéaire continu et à indice de* $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ *sur* $H^p(o,T)$, *d'indice indépendant de* p *et égal à* $m-m_+$.

<u>Corollaire 2.3</u>. *Sous l'hypothèse (H_+), soit* $p \in \mathbb{Z}$ *et soit* $u \in W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ *tel que* $M(t,D_t)\, u \in H^{p+1}(o,T)$; *alors* u $W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$ *et on a :*

$$\|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)} \leq C \left\{ \|M(t,D_t)\, u\|_{H^{p+1}(o,T)} + \|u\|_{W^{m+p}_{q,m}(o,T)} \right\}$$

où C *est une constante indépendante de* u.

<u>Corollaire 2.4</u>. *Sous l'hypothèse* (H_+), *si* $u \in \mathcal{D}'([o,T])$(*) *et si* $M(t,D_t)\, u \in C^\infty([o,T])$ *alors* $u \in C^\infty([o,T])$.

(*) $\mathcal{D}'([0,T])$ désigne l'espace des restrictions à (0,T) de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

II.2.2. Démonstration du théorème 2.2 pour $M_o(t,D_t)$.

Proposition 2.3. *Sous l'hypothèse* (H_+), $M_o(t,D_t)$ *est un opérateur linéaire continu à indice de* $W^m_{q,m}(o,T)$ *sur* $L^2(o,T)$, *d'indice* $m-m_+$.

Démonstration : Cette étude est analogue à celle faite dans [10]. On fait le changement de variable : $y = \frac{t^{-q+1}}{-q+1}$; et, dans l'équation : $t^{q/2}\, M_o(t,D_t)\, u(t) = t^{q/2} f(t)$ on fait le changement de fonctions $f_1(y) = t^{q/2}\, f(t)$, $w(y) = t^{q/2}\, u(t)$.

L'équation précédente devient :

$$P(y,D_y)\, w(y) = P_o(y,D_y)\, w(y) + P_1(y,D_y)\, w(y) = f_1(y)$$

où :

$$P_o(y,D_y) = D^m_y + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(o)\, D^j_y$$

et

$$P_1(y,D_y) = \sum_{j=o}^{m} \sum_{k=1}^{j} C_{jk}\, y^{-k}\, D^{j-k}_y .$$

On a :

$$u \in W^m_{q,m}(o,T) \Longleftrightarrow w \in H^m(-\infty, y(T)) ;$$

$$f \in L^2(o,T) \Longleftrightarrow f_1 \in L^2(-\infty, y(T)).$$

L'hypothèse (H_+) implique que $P_o(y,D_y)$ est linéaire continu et à indice de $H^m(-\infty, y(T))$ sur $L^2(-\infty, y(T))$, d'indice $m-m_+$.

Les coefficients de $P_1(y,D_y)$ tendent vers 0 quand y tend vers $-\infty$, et l'ordre de $P_1(y,D_y)$ est inférieur ou égal à m-1 ; on en déduit que $P_1(y,D_y)$ est compact de $H^m(-\infty, y(T))$ dans $L^2(-\infty, y(t))$; par conséquent, $P(y,D_y)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $H^m(-\infty, y(t))$ dans $L^2(-\infty, y(T))$.

Par un argument de perturbation, on obtient facilement la surjectivité de $P(y,D_y)$ de $H^m(-\infty, y(S))$ sur $L^2(-\infty, y(S))$, pour S assez petit tel que $o < S \leq T$, car la norme de $P_1(y,D_y)$ dans $\mathcal{L}(H^m(-\infty, y(S))\, ;\, L^2(-\infty, y(S)))$ tend vers 0 quand S tend vers 0.

En revenant à la variable t, on a donc démontré que $M_o(t,D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W^m_{q,m}(o,T)$ dans $L^2(o,T)$ et qu'il existe S, avec $o < S < T$, tel que $M_o(t,D_t)$ soit surjectif de $W^m_{q,m}(o,S)$ sur $L^2(o,S)$.

Démontrons maintenant la surjectivité de $M_o(t,D_t)$ sur (o,T) :

Soit $f \in L^2(o,T)$; il existe $u \in W^m_{q,m}(o,S)$ tel que $M_o(t,D_t)\, u = f$ sur (o,S).

Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, égale à 1 sur $(0, S/2)$ et à 0 sur (S,T), avec $0 \leq \varphi \leq 1$. On a :

$$M_o(t,D_t)\,(\varphi\, u) = f \quad \text{sur } (o, S/2)$$

et $$M_o(t,D_t)\,(\varphi\, u) = g \quad \text{sur } (S/2,T) \text{ avec } g \in L^2(o,T).$$

Soit $v \in H^m(S/2,T)$ tel que :

$$M_o(t,D_t)\, v = f-g$$

et $$D^j_t\, v\,(S/2) = o \quad \text{pour } j = o \ldots m-1.$$

Si $\tilde{v}$ désigne le prolongement par 0 de v sur $(0,S/2)$, on a :

$$\tilde{v} \in W^m_{q,m}(o,T)$$

$$M_o(t,D_t)\,\tilde{v} = f-g \text{ sur } (S/2,T)$$

et $$M_o(t,D_t)\,\tilde{v} = o \quad \text{sur } (o,S/2).$$

Posons : $\mathcal{U} = \varphi\, u + \tilde{v}$; on a :

$$\mathcal{U} \in W^m_{q,m}(o,T)$$

et $$M_o(t,D_t)\,\mathcal{U} = f \quad \text{sur } (o,T).$$

Ceci démontre la surjectivité de $M_o(t,D_t)$ sur (o,T). La proposition 2.3 est donc démontrée.

Pour démontrer le théorème 2.2 pour $p \neq o$, on utilise la méthode de [3].

On écrit :

$$M_o(t,D_t) = M_1(t,D_t) + M_2(t,D_t),$$

où :

$$M_1\ (t,D_t) = t^{qm}\ D_t^m + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(o)\ t^{qj}\ D_t^j$$

et $$M_2\ (t,D_t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{j} a_{j,k}\ t^{qj-k}\ D_t^{j-k}$$

avec $a_{j,k} = o$ si $qj \notin \mathbb{N}$.

Le lemme 2.3 nous dit que $M_2(t,D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$, pour tout p dans $\mathbb{Z}$.

Démontrons que $M_1(t,D_t)$ est un opérateur à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$, pour tout p dans $\mathbb{Z}$.

Pour p=o, ceci découle de la proposition 2.3 et du fait que $M_2(t,D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m}(o,T)$ dans $L^2(o,T)$.

Supposons le résultat démontré pour $p \geq o$ et montrons-le à l'ordre p+1.

Pour tout $u \in W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$, on a :

$$D_t\ \{M_1(t,D_t)u\} = \{M_1(t,D_t) + M'(t,D_t)\}\ (D_t u)$$

où

$$M'(t,D_t) = i\ \{qm\ t^{qm-1}\ D_t^{m-1} + \sum_{j=o}^{m-2} q(j+1)\ a_{j+1}(o)\ t^{q(j+1)-1}\ D_t^j\ \}\ .$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W_{q,m}^{m+p}(o,T) & \xrightarrow{\quad M_1 + M' \quad} & H^p(o,T) \\ \uparrow{\scriptstyle D_t} & & \uparrow{\scriptstyle D_t} \\ W_{q,m}^{m+p+1}(o,T) & \xrightarrow{\quad M_1 \quad} & H^{p+1}(o,T) \end{array}$$

est donc commutatif.

Par hypothèse de récurrence, $M_1(t,D_t)$ est un opérateur à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$. D'après le lemme 2.3, $M'(t,D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$.

Le lemme 2.4 et le fait que le diagramme soit commutatif permettent de conclure que $M_1(t,D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$ dans $H^{p+1}(o,T)$.

Pour $p < o$, on utilise la même méthode : on suppose que le résultat est vrai pour $p+1$; et, comme ci-dessus, on le montre pour p.

La compacité de $M_2\,(t,D_t)$ de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $L^2(o,T)$ nous permet de conclure que $M_o(t,D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$, pour tout p dans $\mathbb{Z}$.

Puisque l'indice est constant, la codimension de $M_o(t,D_t)\;(W^{m+p}_{q,m}(o,T))$ dans $H^p(o,T)$ est constante. La surjectivité de $M_o(t,D_t)$ de $W^m_{q,m}(o,T)$ sur $L^2(o,T)$ entraine la surjectivité de $M_o(t,D_t)$ de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ sur $H^p(o,T)$ pour tout p dans $\mathbb{Z}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.2 pour $M_o(t,D_t)$.

II.2.3. Démonstration du théorème 2.2 pour $M(t,D_t)$.

On a : $M(t,D_t) = M_o(t,D_t) + [M(t,D_t) - M_o(t,D_t)]$

où : $$M(t,D_t) - M_o(t,D_t) = \sum_{j=o}^{m-1} b_j(t)\, t^{qj}\, D_t^j$$

avec $b_j(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $b_j(o) = o$.

Le lemme 2.5 montre que $M(t,D_t) - M_o(t,D_t)$ est un opérateur compact de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$.

D'après II.2.2, $M_o(t,D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ sur $H^p(o,T)$. Ceci entraîne que $M(t,D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$.

Pour montrer la surjectivité de $M(t,D_t)$, on procède comme suit : $M_o(t,D_t)$ admet un inverse à droite R de $L^2(o,T)$ dans $W^m_{q,m}(o,T)$; l'application $f \longrightarrow R\,\tilde{f}$ (où $\tilde{f}$ est le prolongement par 0 de f sur (S,T)) est un inverse à droite pour $M_o(t,D_t)$, de $L^2(o,S)$ dans $W^m_{q,m}(o,S)$ pour tout $S \in\,]o,T]$, de plus, sa norme est indépendante de S.

Par un argument de perturbation, on en déduit facilement qu'il existe S assez petit tel que $M(t,D_t)$ soit surjectif de $W^m_{q,m}(o,S)$ sur $L^2(o,S)$, car la norme de $[M(t,D_t) - M_o(t,D_t)]$ tend vers 0 lorsque S tend vers 0.

La méthode utilisée pour $M_o(t,D_t)$ permet d'obtenir la surjectivité de $M(t,D_t)$ de $W^m_{q,m}(o,T)$ sur $L^2(o,T)$.

Puisque $M(t,D_t)$ est à indice, d'indice indépendant de p, la codimension de $M(t,D_t)$ $(W^{m+p}_{q,m}(o,T))$ dans $H^p(o,T)$ est constante. Comme $M(t,D_t)$ est surjectif de $W^m_{q,m}(o,T)$ sur $L^2(o,T)$, on obtient que $M(t,D_t)$ est surjectif de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ sur $H^p(o,T)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

II.2.4. Démonstration du théorème 2.1.

Proposition 2.4. *Sous l'hypothèse (H),* $M(t,D_t)$ *est un opérateur linéaire continu et à indice, d'indice* m_- *, de* $W^{m+p}_{q,m}(-T,0)$ *sur* $H^p(-T,o)$*, pour tout* $p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : On fait le changement de variable $y = -t$. L'opérateur $M(t,D_t)$ devient :

$$N(y,D_y) = \sum_{j=o}^{m-1} a_j(y)\,(-1)^{qj+j}\,D_y^j\,(y^{qj}.) + (-1)^{qm+m}\,D_y^m\,(y^{qm}.).$$

Puisque $M(t,D_t)$ vérifie l'hypothèse (H), on a :

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, $N_o(y,\tau) \neq o$ et le nombre de racines τ de $N_o(1,\tau) = o$ telles que $\mathrm{Im}\,\tau > o$ est égal à $m - m_-$.

Le théorème 2.2 nous dit que $N(y,D_y)$ est à indice, d'indice $m-(m-m_-) = m_-$, de $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$ sur $H^p(o,T)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

En revenant à la variable t, on obtient que $M(t,D_t)$ est linéaire continu à indice, d'indice m_-, de $W^{m+p}_{q,m}(-T,o)$ sur $H^p(-T,o)$.

Pour démontrer le théorème 2.1, on utilise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} W^{m+p}_{q,m}(-T,o) \times W^{m+p}_{q,m}(o,T) & \xrightarrow{M \times M} & H^p(-T,o) \times H^p(o,T) \\ \uparrow r & & \uparrow r \\ W^{m+p}_{q,m}(-T,T) & \xrightarrow{M} & H^p(-T,T) \end{array}$$

où $\qquad r(u) = (u_{|(-T,o)}\ ,\ u_{|(o,T)}\ ).$

Le théorème 2.1 découle du lemme suivant :

Lemme 2.9. *Soit* $p \in \mathbb{Z}$ *; l'opérateur* r *est linéaire continu et à indice, d'indice* $-p$, *de* $H^p(-T,T)$ *dans* $H^p(-T,o) \times H^p(o,T)$ *et de* $W^{m+p}_{q,m}(-T,T)$ *dans* $W^{m+p}_{q,m}(-T,o) \times W^{m+p}_{q,m}(o,T)$.

Démonstration : La première partie est triviale.

Pour démontrer la seconde partie, on utilise le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W^{m+p}_{q,m}(-T,T) & \xrightarrow{r} & W^{m+p}_{q,m}(-T,o) \times W^{m+p}_{q,m}(o,T) \\ \uparrow D_t & & \uparrow D_t \times D_t \\ W^{m+p+1}_{q,m}(-T,T) & \xrightarrow{r} & W^{m+p+1}_{q,m}(-T,o) \times W^{m+p+1}_{q,m}(o,T) \end{array}$$

L'opérateur D_t étant à indice, d'indice 1, de $W^{m+p+1}_{q,m}(-T,T)$ dans $W^{m+p}_{q,m}(-T,T)$, de $W^{m+p+1}_{q,m}(-T,o)$ dans $W^{m+p}_{q,m}(-T,o)$ et de $W^{m+p+1}_{q,m}(o,T)$ dans $W^{m+p}_{q,m}(o,T)$, le lemme 2.9 sera démontré si l'on montre que r est à indice, d'indice 0, de $W^{m}_{q,m}(-T,T)$ dans $W^{m}_{q,m}(-T,o) \times W^{m}_{q,m}(o,T)$.

Soit $(u_1\ , u_2) \in W^{m}_{q,m}(-T,o) \times W^{m}_{q,m}(o,T)$. On note u la distribution définie par $u_{|(-T,o)} = u_1$ et $u_{|(o,T)} = u_2$. On a : $u \in L^2(-T,T)$.

Pour montrer que $t^{qm}\, u \in H^m(-T,T)$, il suffit de démontrer que :

$D^m_t\ (t^{qm}\ u) \in L^2\ (-T,T)$.

On a : $\qquad D^m_t\ (t^{qm}\ u) = \sum\limits_{j=o}^{m} C_j\ t^{qm-j}\ D^{m-j}_t\ u$ et :

$$D_t^{m-j}\, u - \widetilde{D_t^{m-j}\, u_1} - \widetilde{D_t^{m-j}\, u_2} = \sum_{i=1}^{m-j-1} a_i\, \delta^{(i)}, \text{ pour } j=o \dots m,$$

car c'est une distribution à support réduit à {o}, qui appartient à $H^{j-m}(-T,T)$.

On a donc, pour j=o,...,m :

$$t^{qm-j}\, D_t^{m-j}\, u = t^{qm-j}\, \widetilde{D_t^{m-j}\, u_1} + t^{qm-j}\, \widetilde{D_t^{m-j}\, u_2}$$

d'où $\quad D_t^m\,(t^{qm}u) \in L^2(-T,T)$, soit $t^{qm}\, u \in H^m(-T,T)$.

Ainsi, la surjectivité de r, de $W^m_{q,m}(-T,T)$ sur $W^m_{q,m}(-T,o) \times W^m_{q,m}(o,T)$ est démontrée. L'injectivité de r est évidente ; le lemme 2.9 est donc démontré.

III. <u>THEOREME D'INDICE DANS Ω.</u>

III.1. <u>Estimations a priori dans</u> $\mathbb{R}^n_+$.

On considère l'opérateur $L = L(x,t\,;D_x)$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) = L(x,t\,;D_x)\; u(x) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}\,(x\,;D_x)\; \{t^{q(m-r-h)}\; u(x)\}\;,$$

où

(i) q est un réel > 1, m et r sont deux entiers tels que $o < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$;

(ii) pour tout h=o,...,m-r, $P^{m-h}(x\,;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre m-h au plus :

$$P^{m-h}(x\,;D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m-h} p_\alpha^{m-h}(x)\; D_x^\alpha \quad ;$$

Si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $P^{m-h}(x\,;D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul.

(iii) $P^m(x\,;D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$P_m^m(x\,;\xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha^m(x)\; \xi^\alpha \neq 0.$$

Pour tout h=o,...,m-r, on note $P^{m-h}_{m-h}(x\,;D_x)$ la partie principale d'ordre m-h de $P^{m-h}(x\,;D_x)$.

On introduit alors la condition "d'ellipticité générale" suivante :

(C_1) Pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$L_o(x',o\,;t\,;\xi) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}_{m-h}\,(x',o\,;\xi)\; t^{q(m-r-h)} \neq o.$$

Cette condition implique en particulier que l'opérateur à coefficients constants $P^r(o\,;D_x)$ est elliptique, c'est-à-dire que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$P^r_r\,(o\,;\xi) \neq o.$$

Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{o\}$, soit μ le nombre de racines τ de l'équation :

$$P^r_r(o\,;\xi',\tau) = o$$

telles que $\operatorname{Im}\tau > o$. Si $n=2$, on supposera que μ ne dépend pas de ξ'.

On définit alors μ opérateurs frontière, à coefficients $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$:

$$B_j(x,D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}\,(x)\,D^\alpha_x \quad, j=1,\ldots,\mu\;,$$

où, pour $j=1,\ldots,\mu$, m_j est un entier inférieur ou égal à $r-1$.

On note $\gamma B = (\gamma B_j\;;\;j=1,\ldots,\mu)$, où γ désigne la restriction à $\mathbb{R}^{n-1}$.

On suppose que le problème $(P^r, \gamma B)$ vérifie la condition de Sapiro-Lopatinskii :

(C'_1) Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{o\}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} P^r_r\,(o,\,\xi',\,D_t)\;v(t) = o \\ B^o_j(o\,;\xi',\,D_t)\;v_{|t=o} = o \end{cases}$$

n'admet que la solution $v=o$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$, où $B^o_j(x\,;D_x)$ désigne la partie principale d'ordre m_j de $B_j(x\,;D_x)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(L,\gamma B)$ induit un opérateur linéaire continu de

$$W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+) \text{ dans } H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. *On suppose que les conditions* (C_1) *et* (C_1') *sont vérifiées. Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Alors, il existe deux constantes* $\varepsilon_p > 0$ *et* $C_p > 0$ *telles que : si* $u \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, *avec support de* u *contenu dans la boule de centre* 0 *de rayon* ε_p *et si* $(L,\gamma B)\, u \in H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, *alors :*

(i) u *appartient à* $W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$;

(ii) $\|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_p \{\|Lu\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^{m+p-1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)}\}$.

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $B(0,\varepsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ε.

On démontre d'abord l'estimation a priori (ii) dans le cas où p=o. Avec les hypothèses (C_1) et (C_1'), on déduit du théorème 2.6 de [9] (voir aussi [10]) qu'il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ telles que, si $u \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ et si $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\delta[$, on ait :

$$\|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|L(0,T\,;D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(0,D)u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^{m-1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de L et des B_j impliquent que, pour tout $\eta > 0$, il existe $C_\eta > 0$ et $\rho > 0$ telles que, si $u \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ et si $\operatorname{supp} u \subset B(0,\rho)$, on ait :

$$\|L(0,t\,;D_x)\, u - L(x,t\,;D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \eta \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)}$$

et :

$$\|\gamma B_j(0,D)\, u - \gamma B_j(x,D)u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \eta \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} + C_\eta \|u\|_{W^{m-1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Par conséquent, en choisissant η de façon que $(\mu+1)C.\eta = \frac{1}{2}$, on montre qu'il existe $\varepsilon_0 = \min(\delta,\rho)$ et $C_0 > 0$ telles que, si $u \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ et si $\operatorname{supp} u \subset B(0,\varepsilon_0)$, on ait :

$$\|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_0 \left\{ \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^{m-1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} .$$

Pour montrer le théorème 3.1 pour $p \geq 1$, on procède par récurrence sur p.

Soit tout d'abord u appartenant à $W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ tel que son support soit contenu dans $B(o,\varepsilon)$ avec $o < \varepsilon < \varepsilon_o$ et tel que

$$(L,\gamma B)\, u \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) .$$

On utilise la méthode des quotients differentiels. Pour h appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{o\}$ et pour tout $i=1,\dots,n-1$, on pose :

$$\rho_{ih}\, u(x) = \frac{1}{h}\,[u(x_1,\dots,x_{i-1}\ ,\ x_i+h\ ,\ x_{i+1},\dots,t) - u(x)].$$

Si h est assez petit, on a : $\operatorname{supp} \rho_{ih}\, u \subset B(o,\varepsilon_o)$. De plus, $\rho_{ih}\, u$ appartient à $W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$. D'après le résultat pour p=o, on a donc :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_o \left\{ \|L(\rho_{ih}u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(\rho_{ih}u)\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\rho_{ih}u\|_{W^{m-1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

On écrit :

$$L(\rho_{ih}u) = \rho_{ih}\, Lu + [L,\rho_{ih}]\, u$$

et :

$$\gamma B_j(\rho_{ih}u) = \rho_{ih}\, \gamma B_j u + [\gamma B_j\ ,\ \rho_{ih}]\, u .$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de L et des B_j , et le fait que $\operatorname{supp} u \subset B(o,\varepsilon)$ impliquent qu'il existe une constante $C > o$, indépendante de u et de h, telle que :

$$\|[L,\rho_{ih}]u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)}$$

et :

$$\|[\gamma B_j,\rho_{ih}]u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\, \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

D'autre part, il existe une constante $\beta > o$, indépendante de u et de h (pourvu que h reste dans un borné fixe, par exemple $o < |h| < 1$) telle que :

$$\|\rho_{ih}\, Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \beta\, \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

et :

$$\|\rho_{ih}\, \gamma\, B_j u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \beta\, \|\gamma\, B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

En regroupant tous les résultats précédents, on déduit qu'il existe une constante $C'_o > o$, indépendante de u et de h assez petit, telle que :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'_o \left\{ \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} .$$

Il en résulte que, pour i=1,...,n-1, $D_{x_i} u \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, avec :

$$\|D_{x_i}u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'_o \left\{ \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

D'après le lemme 2.8, pour montrer que $u \in W^{m+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, il reste à montrer que $u \in W^{m+1}_{q,m-r}((o,\varepsilon) ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

On pose :

$$M(x ; D_t) = \sum_{h=o}^{m-r} p^{m-h}_{(o,m-h)}(x) D_t^{m-r-h} \{t^{q(m-r-h)}.\}$$

D'après l'hypothèse (C_1), pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $M(x',t ; D_t)$ vérifie la conditions (H_+) énoncée dans II.2.

De plus, on écrit :

$$Lu = D_t^r Mu + R(x,t ; D_x)u,$$

où $R(x,t ; D_x)$ est combinaison linéaire de termes de la forme :

$$a_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)}.\} \quad ,$$

avec $\alpha = (\alpha',\alpha_n)$ tel que : $|\alpha| \leq m-h$ et $\alpha_n < m-h$.

D'après le lemme 2.7, on sait que $R(x,t ; D_x) u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, avec :

$$\|R(x,t ; D_x)u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i}u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} .$$

Par conséquent, $D_t^r Mu$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, avec la majoration :

$$\|D_t^r Mu\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} .$$

On a, maintenant, pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$Mu \in H^r(\mathbb{R}_+)$ et $D_t^r Mu \in H^1(\mathbb{R}_+)$. Donc $Mu \in H^{r+1}(\mathbb{R}_+)$ et :

$$\|Mu\|_{H^{r+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C(x') \left\{ \|D_t^r Mu\|_{H^1(\mathbb{R}_+)} + \|Mu\|_{H^r(\mathbb{R}_+)} \right\} .$$

Comme, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, M vérifie la condition (H_+), on déduit du corollaire 2.3, que u appartient à $W^{m+1}_{q,m-r}(o,\varepsilon)$, avec :

$$\|u\|_{W^{m+1}_{q,m-r}(o,\varepsilon)} \leq C(x') \left\{ \|Mu\|_{H^{r+1}(o,\varepsilon)} + \|u\|_{W^m_{,m-r}(o,\varepsilon)} \right\} .$$

$C(x')$ dépend continûment de x'. Comme supp $u \subset B(o,\varepsilon)$ dans $\mathbb{R}^n$, on peut donc majorer $C(x')$ par une constante C.

On intègre alors par rapport à $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$; il vient :

$u \in W^{m+1}_{q,m-r}((o,\varepsilon) ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$

avec :

$$\|u\|_{W^{m+1}_{q,m-r}((o,\varepsilon) ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq C \left\{ \|D_t^r Mu\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} .$$

Et le lemme 2.8 permet de conclure que les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.1 sont vraies pour p=1.

Pour $p > 1$, on raisonne par récurrence par une méthode analogue.

III.2. Démonstration du théorème d'indice (théorème 1.1).

On reprend les notations du paragraphe I.

Pour p=o, le théorème d'indice est démontré dans [10]. Pour $p \geq 1$, il résulte du résultat de régularité suivant :

Théorème 3.2. *On suppose que les conditions (C) et (C') sont satisfaites. Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Alors, il existe une constante* $C_p > 0$ *telle que : si* u *appartient à* $W^m_{q,m-r}(\Omega)$ *et si* $(L,\gamma B)u$ *appartient à* $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *, alors :*

(i) u *appartient à* $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$;

(ii) $$\|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W^{m+p-1}_{q,m-r}(\Omega)} \right\} .$$

Démonstration : Pour p=o, la propriété découle du théorème d'indice. Pour $p \geq 1$, on raisonne par récurrence.

Par "cartes locales" et "partition de l'unité", on se ramène au théorème 3.1 et aux estimations a priori pour les opérateurs elliptiques.

En effet, soit $(O_i)_{1 \leq i \leq N}$ un recouvrement fini ouvert de $\bar{\Omega}$ et soit $\{\Theta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une partition de l'unité C^∞, subordonnée à ce recouvrement.

Soit $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$ tel que $(L,\gamma B)\, u \in H^1(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour étudier $\Theta_i u$, $i=1,\ldots,N$, nous distinguons deux cas :

1er cas : i est tel que $O_i \cap \Omega = O_i$, c'est-à-dire $O_i \subset \Omega$.

On a : $\Theta_i\, u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$ et $L(\Theta_i u) \in H^1(\Omega)$. La régularité à l'intérieur pour les opérateurs elliptiques donne que $\Theta_i\, u \in W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)$ et que l'on a :

$$\|\Theta_i u\|_{W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)} \leq C \left\{ \|L(\Theta_i u)\|_{H^1(\Omega)} + \|\Theta_i u\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

D'où :

$$\|\Theta_i u\|_{W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \right\}.$$

2ème cas : i est tel que $O_i \cap \Omega \subsetneq O_i$.

Soit ψ_i un difféomorphisme de O_i sur $B(o,\varepsilon_1)$, ε_1 étant la constante introduite au théorème 3.1. On a, puisque $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$, $\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1} \in W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ et supp $(\Theta_i u \circ \psi_i^{-1}) \subset B(o,\varepsilon_1)$.

L'opérateur L se transforme en un opérateur $\mathcal{L}_i$ et les B_j se transforment en des opérateurs $\mathcal{B}_{j,i}$.

Puisque ψ_i est un difféomorphisme, le problème $(\mathcal{L}_i\, , \gamma\mathcal{B}_{j,i})$ satisfait aux conditions (C_1) et (C_1').

Nous savons que $Lu \in H^1(\Omega)$ et que l'on a :

$$[L(\Theta_i u)] \circ \psi_i^{-1} = \mathcal{L}_i\, (\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1})$$

et $\quad L(\Theta_i u) = \Theta_i\, Lu + [L,\Theta_i]\, u$

$[L,\Theta_i]u \in H^1(\Omega)$ car $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$; ceci montre que

$[L(\Theta_i u)] \circ \psi_i^{-1} \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_i(\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1}) \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Par un raisonnement du même type, on obtient que ;

$\gamma\mathcal{B}_{j,i}(\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1}) \in H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

La fonction $\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1}$ appartient à $W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$, son support est contenu dans : $B(o,\varepsilon_1)$ et $(\mathcal{L}_i\, ,\, \gamma\mathcal{B}_{j,i})\,(\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1}) \quad H^1(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Il résulte alors du théorème 3.1 que $\Theta_i\, u \circ \psi_i^{-1}$ appartient à $W^{m+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)$ et que :

$$\|\Theta_i u \circ \psi_i^{-1}\|_{W^{m+1}_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}_i(\Theta_i u \circ \psi_i^{-1})\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma\mathcal{B}_{j,i}\Theta_i u \circ \psi_i^{-1}\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\Theta_i u \circ \psi_i^{-1}\|_{W^m_{q,m-r}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} ,$$

d'où : $\Theta_i u \in W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)$, avec :

$$\|\Theta_i u\|_{W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)} \leq C \left\{ \|L(\Theta_i u)\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(\Theta_i u)\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \right\} .$$

Cette étude de $\Theta_i u$ par $i=1,\dots,N$ montre que :

(i) u appartient à $W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)$;

(ii) $$\|u\|_{W^{m+1}_{q,m-r}(\Omega)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \right\} .$$

Pour $p > 1$, on raisonne par récurrence sur p et on utilise la même méthode que ci-dessus. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

Pour finir la démonstration du théorème 1.1, notons $\mathcal{P}_p$ l'opérateur $(L,\gamma B)$ considéré comme opérateur de $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Il résulte du théorème 3.2 que le noyau de $\mathcal{P}_p$ coïncide avec l'espace $\{u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)\ ;\ (L,\gamma B)u = 0\}$ et que l'image de $\mathcal{P}_p$, notée $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_p$ est égale à $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_o \cap \{H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$.

L'injection de $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$ dans $W^{m+p-1}_{q,m-r}(\Omega)$ étant compacte, on déduit des estimations a priori du théorème 3.2 (voir lemme 5.1, chap. II [8]) que le noyau de $\mathcal{P}_p$ est de dimension finie et que Im $\mathcal{P}_p$ est fermée.

Donc, la codimension de Im $\mathcal{P}_p$ est égale à la codimension de Im $\mathcal{P}_o$. Comme $\mathcal{P}_o$ est un opérateur à indice, on en déduit que $\mathcal{P}_p$ est aussi un opérateur à indice et que son indice est égal à celui de $\mathcal{P}_o$.

Le théorème 1.1 est donc complètement démontré.

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses (C) et (C'), pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *le noyau de l'opérateur* $\mathcal{P}_p$ *dans* $W^{m+p}_{q,m-r}(\Omega)$ *est égal à l'espace* $N = \{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})\ ;\ \mathcal{P}_p u = o\}$.

Démonstration : Ceci résulte du théorème 1.1 et du fait que $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \bigcap_s H^s(\Omega)$.

Remarque : La méthode utilisée dans cet article est encore valable pour une classe plus générale d'opérateurs elliptiques dégénérés ; ceci sera détaillé dans un article ultérieur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : "Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". Arch. Rat. Méc. Anal. 34, n° 5, 1969, p. 361-379.

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, 1973, p. 55-140.

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". J. Math. pures et appl., t. 51, 1972, p. 429-463.

"Etude d'une classe de systèmes d'opérateurs elliptiques et dégénérés". Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, fasc. II (1973).

[4] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". A paraitre dans Annali della Scuola Normale di Pisa.

[5] L. HÖRMANDER : "Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations". Proc. Symp. Pure Math. 10 (Singular Integrals), 138-183.

[6] Y. KANNAÏ : "Hypoelliptic ordinary differential operators". Israël J. of Math. 13 (1972), 106-134.

[7] J.L. LIONS - E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes et applications". Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

[8] Ja B. LOPATINSKII : "A method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular equations". Ukrain. Mat. Ž. 5 (1953), 123-151 ; English Transl. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 89, (1970), 149-183.

[9] D. PREVOSTO - J. ROLLAND : "Problèmes aux limites pour des opérateurs elliptiques et dégénérés". Publications des séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, fasc. II (1973).

[10] M.I. VIŠIK - V.V. GRUŠIN : "Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain". Math. USSR Sbornik, Vol. 9, (1969), n° 4.