INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

MARIE-PIERRE BÉAL

# Puissance extérieure d'un automate déterministe, application au calcul de la fonction zêta d'un système sofique

*Informatique théorique et applications*, tome 29, nº 2 (1995), p. 85-103

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1995__29_2_85_0>

© AFCET, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 29, n° 2, 1995, p. 85 à 103)

# PUISSANCE EXTÉRIEURE D'UN AUTOMATE DÉTERMINISTE, APPLICATION AU CALCUL DE LA FONCTION ZÊTA D'UN SYSTÈME SOFIQUE (*)

par Marie-Pierre BÉAL ([1])

Communiqué par J.-E. PIN

Résumé. – *Nous définissons une construction sur les automates finis déterministes appelée puissance extérieure. Nous utilisons ces constructions pour donner une preuve combinatoire élémentaire de la rationalité de la fonction zêta généralisée d'un système sofique.*

Abstract. – *We define a construction with finite déterministic automata, called external power. These constructions are used to give a combinatorial and simple proof of the rationality of the generalized zeta function of a sofic system.*

## 1. INTRODUCTION

Les systèmes sofiques sont des systèmes dynamiques symboliques qui peuvent être définis comme l'ensemble des étiquettes de chemins bi-infinis d'un automate fini. Les fonctions zêtas de systèmes dynamiques symboliques, introduites par Smale, permettent de compter les orbites périodiques. Elles constituent un invariant par isomorphisme de systèmes dynamiques. Cet invariant, non caractéristique, peut permettre dans certains cas de dire que deux systèmes ne sont pas isomorphes.

La fonction zêta d'un système dynamique symbolique $S$ est définie par $\zeta(S) = \exp\left(\sum a_n \frac{z^n}{n}\right)$, où $a_n$ est le nombre de mots du système dont la période divise $n$. La rationalité de la fonction zêta pour les systèmes dits de type fini a été prouvé par R. Bowen et O. Lanford en [7]. La rationalité de la fonction zêta d'un système sofique a été établie en [11] par A. Manning, avec un algorithme de calcul. En [6], R. Bowen donne

(*) Reçu en novembre 1989; accepté en novembre 1994.

([1]) Institut Blaise Pascal, Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

une autre expression rationnelle pour la fonction zêta d'un système sofique conduisant à un algorithme de calcul amélioré. (La preuve ne figure pas en [6].) La rationalité de la fonction zêta d'un système sofique a également été établie en [5] avec une preuve qui s'adapte à la fonction zêta généralisée d'un langage cylique.

Nous donnons ici une preuve de la rationalité de la fonction zêta d'un système sofique qui conduit à la formule donnée en [6]. La preuve est combinatoire et beaucoup plus élémentaire que celle donnée en [5]. Elle ne s'adapte pas au cas des langages cycliques mais elle est établie ici pour la fonction zêta généralisée.

Nous définissons pour cela une nouvelle construction sur les automates finis appelée puissance extérieure d'un automate déterministe. Cette construction peut être utilisée, (hormis le calcul de la fonction zêta), pour tester si un automate déterministe est apériodique.

L'article est organisé de la façon suivante. Nous définissons tout d'abord dans la deuxième section les notions de systèmes sofiques, fonction zêta et fonction zêta généralisée. Nous définissons ensuite les automates puissances extérieures en section 3. La section 4 comprend la preuve de la rationalité de la fonction zêta généralisée d'un système sofique et des remarques concernant l'évaluation des déterminants qui sont utilisés pour le calcul de la fonction zêta. Nous proposons également, en sous-section 4.2, des simplifications de calculs (non systématiques) qui peuvent être mises en œuvre en modifiant au préalable les automates puissances extérieures. Le travail effectué à ce niveau étant clairement non commutatif, nous établissons en sous-section 4.2.2 un analogue non commutatif de ce résultat en utilisant les quasi-déterminants introduits en [8] et [9] (*voir* aussi [10]). La section 5 montre comment les automates puissances extérieures peuvent être utilisés pour tester si un automate déterministe est apériodique au sens de Schützenberger.

## 2. FONCTIONS ZÊTAS : DÉFINITIONS

Nous définissons tout d'abord la notion de système sofique.

### Définitions

On note $A$ un alphabet et $A^*$ le monoïde libre sur $A$. Un automate fini est un couple $(Q, F)$, où $Q$ est un ensemble fini d'états, $F$ un ensemble de flèches étiquetées sur un alphabet $A$. Tous les états sont à la fois initiaux et terminaux. Un automate est déterministe s'il existe au plus une flèche d'étiquette donnée sortant d'un état donné. Si un automate déterministe admet une flèche d'étiquette $a$ sortant de $p$, on note l'état d'arrivée de cette flèche $p \cdot a$. La notation se généralise à un mot $u$ : s'il existe un chemin d'étiquette $u$ d'origine $p$, on note $p \cdot u$ l'état d'arrivée de cet unique chemin.

On appelle *système sofique* l'ensemble des mots bi-infinis (suites de lettres de $A$ indexées dans $\mathbf{Z}$), qui sont les étiquettes des chemins bi-infinis d'un automate fini. On dit que l'automate reconnaît le système sofique. Le système admet un automate déterministe le reconnaissant. Le système est dit de type fini si cet automate peut être choisi local, c'est-à-dire n'admettant pas deux cycles distincts de même étiquette. On note $\sigma$ le décalage à droite sur les mots bi-infinis, c'est-à-dire l'application de $A^{\mathbf{Z}}$ dans $A^{\mathbf{Z}}$ qui à $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ associe $(a_{n+1})_{n \in \mathbf{Z}}$. Un système sofique est invariant par décalage. Deux systèmes sofiques $S$ et $T$ sont dits *conjugués* s'il existe une bijection bi-continue $\psi$ de $S$ sur $T$, qui commute avec les décalages, c'est-à-dire telle que, pour tout mot $w$ de $S$, on a $\sigma(\psi(w)) = \psi(\sigma(w))$. Un mot bi-infini $w$ est périodique de période $k$ si et seulement si $k$ est plus petit entier strictement positif tel que $\sigma^k(w) = w$. L'image par une conjugaison d'un mot de période $k$ est encore un mot période $k$. Les cardinaux des ensembles de mots de période $k$, pour tous les entiers $k$, constituent donc un invariant par conjugaison pour les systèmes sofiques. La fonction zêta permet de calculer cet invariant.

Nous donnons maintenant les définitions des fonctions zêtas.

**Définitions**

Si $A$ un alphabet fini, on note $\mathbf{Z}\langle A \rangle$ (respectivement $\mathbf{Z}\langle\langle A \rangle\rangle$) l'algèbre des polynômes non commutatifs (respectivement des séries formelles non commutatives) à coefficients dans $\mathbf{Z}$ sur l'alphabet $A$. Un polynôme de $\mathbf{Z}\langle A \rangle$ est une application de $A^*$ dans $\mathbf{Z}$, nulle sauf pour un nombre fini de mots de $A^*$. Par exemple $2\,ab - 3\,ba$ est un polynôme de $\mathbf{Z}\langle A \rangle$, où $A = \{a, b\}$. Une série formelle de $\mathbf{Z}\langle\langle A \rangle\rangle$ est une application de $A^*$ dans $\mathbf{Z}$.

On note $\varphi$ les projections de $\mathbf{Z}\langle\langle A \rangle\rangle$ dans $\mathbf{Z}[[A]]$ et de $\mathbf{Z}\langle A \rangle$ dans $\mathbf{Z}[A]$, les homomorphismes d'algèbres naturels, où $\mathbf{Z}[[A]]$ désigne les séries formelles commutatives sur $\mathbf{Z}$ en les variables $a$ de $A$, et $\mathbf{Z}[A]$ désigne les polynômes commutatifs en les variables $a$ de $A$. Par exemple $\varphi(2\,ab - 3\,ba) = -ab$.

On note $\theta$ les morphismes de $\mathbf{Z}[[A]]$ dans $\mathbf{Z}[[z]]$ et de $\mathbf{Z}[A]$ dans $\mathbf{Z}[z]$ définis par $\theta(a) = z$, pour toute lettre $a$ de $A$.

Étant donné un langage $L$ de mots finis, on note $\underline{L}$ la série de $\mathbf{Z}\langle\langle A \rangle\rangle$ caractéristique de $L$, qui s'écrit :

$$\underline{L} = \sum_{w \in L} w.$$

La série $\underline{L}$ se décompose en :

$$\underline{L} = \sum_{n \geq 0} \underline{L}_n,$$

où $\underline{L}_n$ est la partie homogène de degré $n$ de $\underline{L}$.

On appelle *fonction zêta généralisée* d'un langage de mots finis $L$ sur un alphabet $A$, la série commutative suivante :

$$Z(L) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(\underline{L}_n)}{n}\right).$$

La *fonction zêta* d'un langage de mots finis $L$ sur un alphabet $A$, est alors la série suivante :

$$\zeta(L) = \theta(Z(L)).$$

On définit maintenant la notion de fonction zêta d'un système sofique.

**Définitions**

Soit $S$ un système sofique. Si $n$ est un entier strictement positif, on note $S_n$ l'ensemble des mots de $S$ dont la période divise $n$. On a donc :

$$S_n = \{ w \in S / \sigma^n(w) = w \}.$$

On appelle *fonction zêta du système* $S$ la fonction $\zeta$ définie par :

$$\zeta(S) = \exp\left(\sum_{n > 0} \frac{a_n}{n} z^n\right)$$

avec

$$a_n = \text{card}(S_n).$$

On associe à tout système sofique $S$ le langage, noté $M$, des mots finis $u$ tels que le mot bi-infini défini par $w = (a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, avec $u = a_1 \ldots a_p$, où $p \geq 1$, et $\sigma^p(w) = w$, est dans $S$. On associe ainsi à chaque mot $w$ de $S_p$ un mot de longueur $p$ de $M$. Cette correspondance est bijective de $S_p$ dans l'ensemble des mots de longueur $p$ de $M$.

Si on appelle *fonction zêta généralisée d'un système sofique* $S$ la série commutative :

$$Z(S) = Z(M) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(\underline{M}_n)}{n}\right),$$

on a bien $\zeta(S) = \theta(Z(M))$.

Deux systèmes sofiques conjugués $S$ et $T$ vérifient toujours

$$\text{card}(S_n) = \text{card}(T_n),$$

ceci pour tout entier strictement positif $n$. Cette condition est aussi équivalente à l'égalité, pour tout $n$, des cardinaux de leurs ensembles de mots périodiques de période $n$. Deux systèmes sofiques conjugués ont donc même fonction $\zeta$.

## 3. AUTOMATES PUISSANCES EXTÉRIEURES

Avant de montrer comment on peut calculer la fonction zêta généralisée et la fonction zêta d'un système sofique, nous introduisons une nouvelle construction sur les automates finis. La construction produit, à partir d'un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (Q, F)$ étiqueté sur un alphabet $A$, des automates finis, appelés puissances extérieures de l'automate $\mathcal{A}$, qui sont étiquetés sur l'alphabet $\{+1, -1\} \times A (\subset \mathbf{Z}\langle A \rangle)$. La définition de ces automates est la suivante :

### Définitions

Soit $\mathcal{A}$ un automate fini déterministe $(Q, F)$ sur un alphabet fini $A$. On numérote les états de $\mathcal{A}$ et $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $k$ un entier strictement positif. On appelle *automate puissance extérieure* d'ordre $k$ de l'automate déterministe $\mathcal{A}$, l'automate fini $(Q', F')$ sur l'alphabet $\{+1, -1\} \times A$, avec $Q' = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k)_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}\}$. Il existe une flèche de $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ vers $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ d'étiquette $+a$ si et seulement si, pour tout $l$ tel que $1 \leq l \leq k$, il existe dans $\mathcal{A}$ une flèche d'origine $i_l$ d'étiquette $a$ et $(j_1, \ldots, j_k)$ se déduit de $(i_1 \cdot a, \ldots, i_k \cdot a)$ par une permutation paire. Il existe une flèche de $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ vers $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ d'étiquette $-a$ si et seulement si, pour tout $l$ tel que $1 \leq l \leq k$, il existe dans $\mathcal{A}$ une flèche d'origine $i_l$ d'étiquette $a$ et $(j_1, \ldots, j_k)$ se déduit de $(i_1 \cdot a, \ldots, i_k \cdot a)$ par une permutation impaire. En identifiant $+a$ à $a$, on obtient que l'automate puissance extérieure d'ordre 1 de $\mathcal{A}$ est l'automate $\mathcal{A}$ lui-même.

*Exemple 3.1. :* Soit $S$ le système sofique reconnu par l'automate de la figure 1.

Les automates puissances extérieures d'ordre 1 et 2 sont donnés respectivement sur les figures 2 et 3.

Nous définissons maintenant des matrices associées aux automates puissances extérieures.

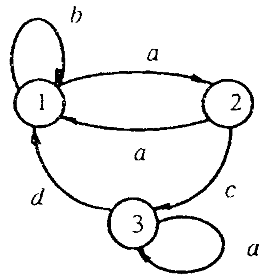


**Figure 1. – Automate $\mathcal{A}$.**

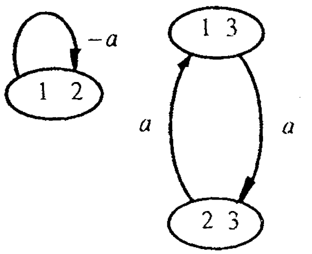


Fig. 2

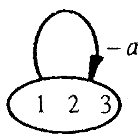


Fig. 3

**Figure 2. – Puissance d'ordre 2.**
**Figure 3. – Puissance d'ordre 3.**

## Définitions

On appelle matrice associée à un automate $\mathcal{T}$, étiqueté dans $\mathbf{Z}\langle A\rangle$, la matrice carrée de $\mathbf{Z}\langle A\rangle^{Q\times Q}$ qui admet comme coefficient d'indice $(p, q)$ la somme (dans $\mathbf{Z}\langle A\rangle$) des étiquettes des flèches d'origine $p$ et d'arrivée $q$.

On étend le morphisme $\varphi$ de $\mathbf{Z}\langle A\rangle$, (qui rend commutatif le produit des lettres), dans $\mathbf{Z}[A]$ à un morphisme, encore noté $\varphi$ de $\mathbf{Z}\langle A\rangle^{Q\times Q}$ dans $\mathbf{Z}[A]^{Q\times Q}$.

*Exemple 3.2. :* On note $P_1$ (respectivement $P_2$ et $P_3$) la matrice associée à l'automate puissance extérieure d'ordre 1 (respectivement 2 et 3) de l'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1. Ces matrices sont les suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & c \\ d & 0 & a \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \quad P_3 = [-a].$$

Le nom puissance extérieure a été choisi par analogie avec l'algèbre extérieure. Le lien est le suivant : on note $V$ l'algèbre de dimension card $(Q)$ sur $\mathbf{Z}[A]$ et $\wedge^k(V)$ les puissances extérieures $k$-ième de $V$. Les matrices $P_i$ se décomposent en $\sum_{a \in A} a\, P_{i,\,a}$, où $P_{i,\,a}$ est obtenue à partir de $P_i$ en effaçant les lettres autres que $a$ et en mettant $a$ en facteur. La matrice $P_{1,\,a}$ est la matrice de endomorphisme $u_a$ dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $V$, où $u_a(e_i) = e_i \cdot a$. La matrice $P_{i,\,a}$ est alors la matrice de $\wedge^k(u_a)$ dans la base de $\wedge^k(V)$ formées des $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.

## 4. CALCUL DE LA FONCTION ZÊTA

### 4.1. Calcul pour les systèmes sofiques

La proposition qui suit assure que la fonction zêta et la fonction zêta généralisée d'un système sofique $S$ sont des fonctions rationnelles et donne une méthode pour les calculer effectivement à l'aide des automates puissances extérieures. Il en résulte que $Z(S)$ et $\zeta(S)$ sont bien des séries à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

PROPOSITION 4.1 : *Soit $S$ un système sofique reconnu par un automate déterministe $\mathcal{A}$ à $n$ états. Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on note $P_i$ la matrice associée à l'automate puissance extérieure d'ordre $i$ de $\mathcal{A}$, et $Q_i$ son image commutative par $\varphi$. Les fonctions zêta de $S$ sont alors :*

$$Z(S) = \prod_{i=1}^{n} (\det(I - Q_i))^{(-1)^i},$$

$$\zeta(S) = \prod_{i=1}^{n} (\det(I - \theta(Q_i)))^{(-1)^i},$$

*où $I$ est la matrice identité de même taille que $Q_i$.*

*Démonstration :* On note $\mathcal{T}_i$ l'automate puissance d'ordre $i$, $1 \le i \le n$, de matrice associée $P_i$. On note tr la trace d'une matrice à coefficients dans $\mathbf{Z}\langle A \rangle$, ou $\mathbf{Z}[A]$, (la trace est la somme des éléments diagonaux), et on note det le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbf{Z}[A]$. La deuxième formule résulte de la définition de $\theta$ et on va donc montrer la formule pour la fonction zêta généralisée. D'après les définitions de la section 2, on a :

$$Z(S) = \exp\left(\sum_{k \ge 1} \frac{\varphi(\underline{M_k})}{k}\right),$$

On va montrer que :

$$\underline{M}_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(P_i^k).$$

Le langage $M$ est tout d'abord l'ensemble des mots $u$ qui agissent dans l'automate initial $\mathcal{A}$ comme une permutation d'un ensemble d'états $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, c'est-à-dire tels qu'il existe un ensemble d'états $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$(les $p_i$ étant distincts), tel $p \cdot u$ soit défini pour tout $p$ de $E$, et $E = \{p_1 \cdot u, p_2 \cdot u, \ldots, p_r \cdot u\}$.

Soit $u$ un tel mot de longueur $k$. On suppose que $u$ agit dans $\mathcal{A}$ comme une permutation $\pi_u$ de $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, et que $E$ est maximal pour cette propriété. Nous allons montrer que $u$ apparaît avec le coefficient 1 dans

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(P_i^k).$$

Le coefficient de $u$ dans $\operatorname{tr}(P_i^k)$ est $\operatorname{tr}(\Pi_i)$, pour $1 \leq i \leq r$, et 0 pour $r < i \leq n$, où $\Pi_i$ est la matrice de même taille que $P_i$, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, et définie comme suit. Le coefficient d'indice $((k_1, k_2, \ldots, k_i), (l_1, l_2, \ldots, l_i))$ de $\Pi_i$ est 1 si et seulement si $k_1, k_2, \ldots, k_i$ sont dans $E$ et $(\pi_u(k_1), \pi_u(k_2), \ldots, \pi_u(k_i))$ est une permutation paire de $(l_1, l_2, \ldots, l_i)$. Il est $-1$ si et seulement si $k_1, k_2, \ldots, k_i$ sont dans $E$ et $(\pi_u(k_1), \pi_u(k_2), \ldots, \pi_u(k_i))$ est une permutation impaire de $(l_1, l_2, \ldots, l_i)$. Il est nul dans les autres cas. On note aussi $\Pi$ la matrice d'ordre $r$ qui représente la permutation $\pi_u$ : son coefficient d'indice $(p, q)$ est 1 si et seulement si $\pi_u(p) = q$.

Si $\Pi$ est la matrice de $\pi_u$ dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$, on remarque que $\Pi_i$ est par définition la matrice de $\wedge^i(\pi_u)$ dans la base formée des

$$e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i, 1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq r}.$$

Le coefficient de $u$ dans $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(P_i^k)$ est donc $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(\Pi_i)$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda r$ les valeurs propres de $\Pi$. Un résultat d'algèbre extérieure élémentaire assure alors que les valeurs propres de $\Pi_i$ sont les produits $\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \ldots \lambda_{j_i, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq r}$.

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} (\operatorname{tr}(\wedge^i(\pi_u)) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \Big( \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq r} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \ldots \lambda_{j_i} \Big).$$

Soit $\chi(x) = x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ le polynôme caractéristique de $\Pi$. La somme ci-dessus s'écrit encore, de part la définition des coefficients d'un polynôme caractéristique : $-a_{r-1} - a_{r-2} - \cdots - a_1 - a_0 = 1 - \chi(1)$. Or $\Pi$ est une matrice de permutation. Elle admet donc la valeur propre 1 et donc $\chi(1)$ est nul. La somme ci-dessus est donc égale à 1. On a donc prouvé que :

$$\underline{M}_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(P_i^k).$$

On en déduit que :

$$\varphi \underline{M}_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(\varphi(P_i)^k) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(Q_i^k).$$

On a donc

$$Z(S) = \exp\left(\sum_{k>0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(Q_i^k)\right)\right),$$

$$Z(S) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}\left(\sum_{k>0} \frac{(Q_i)^k}{k}\right)\right),$$

$$Z(S) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \operatorname{tr}(\log(I - Q_i))\right),$$

$$Z(S) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\operatorname{tr}((-1)^i \log(I - Q_i))),$$

et en utilisant la formule de Jacobi qui dit que pour toute matrice carrée $P$ on a $\exp(\operatorname{tr}(P)) = \det(\exp(P))$, on obtient que :

$$Z(S) = \prod_{i=1}^{n} (\det(I - Q_i))^{(-1)^i},$$

ce qui achève la preuve. □

*Exemple 4.1 :* On poursuit le même exemple que précédemment. On trouve :

$$\det(I - Q_1) = \begin{vmatrix} 1-b & -a & 0 \\ -a & 1 & -c \\ -d & 0 & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a - b - aa + ab + aaa - acd$$

$$\det(I - Q_2) = \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{vmatrix} = (1+a)(1-aa)$$

$$\det(I - Q_3) = |1 + a| = 1 + a$$

D'où

$$Z(S) = \frac{(1 - aa)}{1 - a - b - aa + ab + aaa - acd}$$

$$\zeta(S) = \frac{1 - z^2}{1 - 2z}$$

En pratique, le calcul de la seule fonction $\zeta$ se fait à partir des déterminants $\det(I - \theta(Q_i))$.

## 4.2. Calcul des déterminants et quasi-déterminants

### 4.2.1. *Calcul des déterminants*

Le calcul des déterminants peut être amélioré dans certains cas par des transformations sur les automates. On utilise une identité sur les déterminants, qui date des années 1850, connue sous le nom d'identité de Sylvester. Cette formule peut être utilisée pour les calculs de capacité de canaux contraints et ici pour calculer la fonction zêta.

Soient $\mathcal{T}$ un automate étiqueté dans $\mathbf{Z}\langle A \rangle$ et $T$ l'image commutative de sa matrice de transitions associée. Soit maintenant un état $p$ de $\mathcal{T}$ qui est l'arrivée de $r$ flèches $f_1, \ldots, f_r$ d'étiquettes respectives $x_1, \ldots, x_r$, et qui est l'origine de $s$ flèches $g_1, \ldots, g_s$, d'étiquettes respectives $y_1, \ldots, y_s$. On suppose qu'aucune de ces flèches n'admet une origine égale à son arrivée (qui serait $p$). On construit un nouvel automate en supprimant $p$ et en remplaçant chaque flèche $f_i$ entrant sur $p$ par $m$ flèches d'origine, l'origine de $f_i$, d'arrivées, les arrivées de $g_1, \ldots, g_s$, et d'étiquettes respectives $x_i y_1, \ldots, x_i y_s$. On note ce nouvel automate $\mathcal{T}'$ de matrice de transition $T'$ (voir *fig.* 4 et 5).

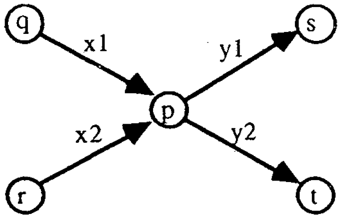


Fig. 4

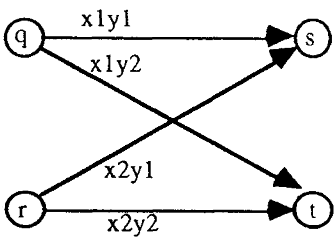


Fig. 5

**Figure 4. – Automate $\mathcal{T}$.**
**Figure 5. – Automate $\mathcal{T}'$.**

PROPOSITION 4.2 : *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\det(I-T)=\det(I-T').$$

*Démonstration :* Soit $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée de taille $n$. on considère la matrice $M$ suivante de taille $n+1$ :

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ \hline y_1 & \cdots & y_n & z \end{array}\right)$$

Soit $B=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de taille $n$ définie par

$$b_{ij}=a_{ij}-x_i\,z^{-1}\,y_j.$$

Nous allons montrer que si $z$ est inversible, alors

$$\det(M)=z\det(B). \tag{1}$$

On utilise tout d'abord l'identité de Sylvester suivante, qui dit que pour tout $z$ inversible :

$$\det(M)=\frac{1}{z^{n-1}}\det\left(\left(s_{ij}=\begin{vmatrix} a_{ij} & x_i \\ y_j & z\end{vmatrix}\right)_{1\le i,j\le n}\right),$$

$$\det(M)=\frac{1}{z^{n-1}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ y_1 & z\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1n} & x_1 \\ y_1 & z\end{vmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{n1} & x_n \\ y_1 & z\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{nn} & x_n \\ y_n & z\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

On a également (en factorisant préalablement $z$ dans la dernière colonne de $M$) :

$$\det(M)=z\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & x_1\,z^{-1} \\ y_1 & 1\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1n} & x_1\,z^{-1} \\ y_1 & 1\end{vmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{n1} & x_n\,z^{-1} \\ y_1 & 1\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{nn} & x_n\,z^{-1} \\ y_n & 1\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

D'où

$$\det(M)=z\begin{vmatrix} a_{11}-x_1\,z^{-1}\,y_1 & \cdots & a_{1n}-x_1\,z^{-1}\,y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}-x_i\,z^{-1}\,y_1 & \cdots & a_{in}-x_i\,z^{-1}\,y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-x_n\,z^{-1}\,y_1 & \cdots & a_{nn}-x_n\,z^{-1}\,y_n \end{vmatrix}$$

On a donc prouvé (1) pour tout $z$ inversible.

Pour démontrer la proposition, on suppose après renumérotation des états que $\mathcal{T}$ a $n+1$ états, $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ et $p$ est l'état de numéro $n+1$. On a, avec les hypothèses de l'énoncé et en notant $y_i = t_{(n+1)j}$ et $x_i = t_{i(n+1)}$ :

$$\det(I - T) = \begin{vmatrix} 1 - t_{11} & \dots & -t_{1i} & \dots & -t_{1n} & -x_1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ -t_{i1} & \dots & 1 - t_{ii} & \dots & -t_{in} & -x_i \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ -t_{n1} & \dots & -t_{ni} & \dots & 1 - t_{nn} & -x_n \\ -y_1 & \dots & -y_i & \dots & -y_n & 1 \end{vmatrix}$$

On applique le résultat (1) avec $z = 1$. On obtient que :

$$\det(I - T) = \begin{vmatrix} 1 - (t_{11} + x_1 y_1) & \cdots & -(t_{1n} + x_1 y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(t_{n1} + x_n y_1) & \cdots & 1 - (t_{nn} + x_n y_n) \end{vmatrix}$$

D'où $\det(I - T) = \det(I - T')$. $\square$

On peut ensuite itérérer la transformation sur les automates pour simplifier éventuellement le calcul d'un déterminant.

Nous allons donner comme application le calcul de la fonction zêta généralisée de l'exemple précédent.

*Exemple* 4.2 : L'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1 est transformé en l'automate $\mathcal{A}'$ de la figure 6. L'automate puissance extérieure d'ordre 2 de $\mathcal{A}$ est transformé en l'automate $\mathcal{B}$ de la figure 7. L'automate puissance d'ordre 3 est inchangé (*fig.* 8). On le note ici $\mathcal{C}$.

On note respectivement les matrices associées $A$, $B$, et C. On a cette fois :

$$\det(I - Q_1) = \det(I - A) = \begin{vmatrix} 1 - (b + aa) & -ac \\ -d & 1 - a \end{vmatrix}$$

Notons que l'on peut ici à nouveau appliquer le résultat donné par l'équation (1) en prenant comme état $p$ l'état 3 et avec cette fois $z = (1 - a)$. On obtient que :

$$\begin{aligned} \det(I - Q_1) &= (1 - a)(1 - (b + aa + ac(a^*)d)) \\ &= 1 - a - b - aa + ab + aaa - acd, \end{aligned}$$

car $a^*$ est l'inverse de $(1 - a)$. Les autres déterminants sont :

$$\det(I - Q_2) = \det(I - B) = \begin{vmatrix} 1 + a & 0 \\ 0 & 1 - aa \end{vmatrix} = (1 + a)(1 - aa)$$

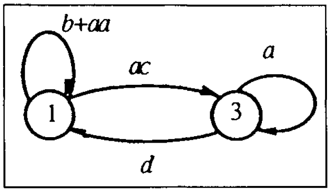


Fig. 6

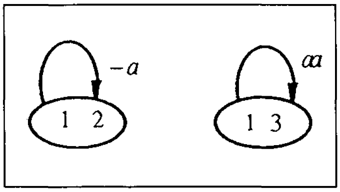


Fig. 7

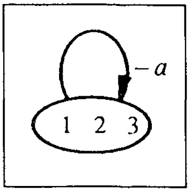


Fig. 8

**Figure 6. – Automate $\mathcal{A}'$.**
**Figure 7. – Automate $\mathcal{B}$.**
**Figure 8. – Automate $\mathcal{C}$.**

$$\det(I - Q_3) = \det(I - C) = \left|1 + a\right| = 1 + a$$

La transformation des automates a donc permis de réduire la taille des déterminants à calculer.

4.2.2. *Digression sur les quasi-détermiants*

Nous allons donner une version non-commutative et plus générale du résultat obtenu dans la sous-section qui précède. La notion non-commutative de déterminant est celle de quasi-déterminant introduite en [8] et [9]. Nous renvoyons à [8] et [10] pour une présentation des quasi-déterminants. Nous utilisons les mêmes définitions et notations.

On note ici l'alphabet $\mathbf{A}$. On plonge tout d'abord l'algèbre sur laquelle on travaillait jusqu'ici, $\mathbf{Z}\langle\langle\,\mathbf{A}\,\rangle\rangle$, dans un corps appelé le corps libre sur $\mathbf{A}$. Une matrice générique $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, où $a_{ij} \in \mathbf{A}$, est inversible dans les matrices à coefficients dans le corps libre.

L'étoile d'une matrice $A^*$ est la série $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i$. L'interprétation usuelle en théorie des automates est la suivante : si $A$ est la matrice de transition d'un automate fini, $A^*_{ij}$ est la somme des mots étiquettes d'un chemin de l'automate allant de l'état $i$ à l'état $j$. La matrice $A^*$ est l'inverse de $(I - A)$, où $I$ est l'identité de même taille que $A$.

Étant donnée une matrice générique $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, on note le *quasi-déterminant* d'ordre $pq$ par $|A|_{pq}$ et on le définit récursivement par :

$$|A|_{pq} = a_{pq} - \sum_{i \ne p,\, j \ne q} a_{pj} |A^{pq}|_{ij}^{-1} a_{iq},$$

où $A^{pq}$ est la matrice obtenue en supprimant de $A$ la ligne d'indice $p$ et la colonne d'indice $q$. Le quasi-déterminant d'ordre (1, 1) de la matrice $(a)$ est d'autre part $a$. On note aussi le quasi-déterminant d'ordre $pq$ par :

$$|A|_{pq} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{p1} & \cdots & \boxed{a_{pq}} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pour $n = 2$ par exemple, il y a quatre quasi-déterminants qui sont :

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} - a_{11}a_{21}^{-1}a_{22} \ ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21} - a_{22}a_{12}^{-1}a_{11} \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}.$$

Le déterminant classique peut s'exprimer en fonction des quasi-déterminants de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots a_{nn}$$

Le théorème de Sylvester admet alors la version non-commutative suivante établie en [8] (*voir* aussi [10]).

THÉORÈME 4.3 : *Soit $A$ une matrice générique d'ordre $n$ et soient $P$, $Q$ deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $k$. On désigne par $\bar{P}$ le complémentaire de $P$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour $i \in \bar{P}$ et $j \in \bar{Q}$, on pose $b_{ij} = |A_{P\cup\{i\}, Q\cup\{j\}}|_{ij}$. On construit la matrice $B = (b_{ij})_{i\in\bar{P}, j\in\bar{Q}}$ d'ordre $n - k$. On a alors pour tout $l \in \bar{P}$ et tout $m \in \bar{Q}$ :*

$$|A|_{lm} = |B|_{lm}.$$

On obtient ainsi en prenant $P = Q = \{n\}$ et $l = m = 1$ :

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}} & \cdots & \begin{vmatrix} \boxed{a_{1(n-1)}} & a_{1n} \\ a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} \boxed{a_{(n-1)1}} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \boxed{a_{(n-1)(n-1)}} & a_{(n-1)n} \\ a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} . \quad (2)$$

Il est noté en [10] que cette formule permet un calcul récursif en temps cubique des déterminants et quasi-déterminants. Elle permet aussi un calcul parallèle.

Le résultat analogue à celui de la section précédente est le suivant :

Soient $\mathcal{T}$ un automate à $n$ états étiqueté dans le corps libre sur $\mathbf{A}$ et $T$ sa matrice de transitions associée. Soit maintenant un état $p$ de $\mathcal{T}$ qui est l'arrivée de $r$ flèches $f_1, \ldots, f_r$ d'étiquettes respectives $x_1, \ldots, x_r$, et qui est l'origine des flèches $g_1, \ldots, g_s$, d'étiquettes respectives $y_1, \ldots, y_s$. On suppose qu'aucune de ces flèches n'admet une origine égale à son arrivée (qui serait $p$), et que $p$ admet une flèche bouclée d'étiquette $z$. On construit un nouvel automate en supprimant $p$ et en remplaçant chaque flèche $f_i$ entrant sur $p$ par $m$ flèches d'origine, l'origine de $f_i$, d'arrivées, les arrivées de $g_1, \ldots, g_s$, et d'étiquettes respectives $x_i\, z^*\, y_1, \ldots, x_i\, z^*\, y_s$. On note ce nouvel automate $\mathcal{T}'$ de matrice de transition $T'$ (voir *fig.* 9 et 10).

PROPOSITION 4.4 : *Avec les notations ci-dessus, on a* $|I-T|_{qq} = |I-T'|_{qq}$ *pour tout état* $q$ *distinct de* $p$.

*Démonstration :* On peut sans perte de généralité sur ce qui va suivre supposer que $q = 1$ et $p = n$ (sinon on appliquera le théorème de Sylvester avec $P = Q = \{p\}$ et $l = m = q$). On note $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a $x_i = t_{in}$, $y_j = t_{nj}$ et $z = t_{nn}$. On a tout d'abord d'après (2),

$$|I-T|_{11} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{vmatrix} \boxed{1-t_{11}} & -t_{1n} \\ -t_{n1} & 1-t_{nn} \end{vmatrix}} & \cdots & \begin{vmatrix} \boxed{-\,t_{1(n-1)}} & -t_{1n} \\ -t_{n(n-1)} & 1-t_{nn} \end{vmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} \boxed{-\,t_{(n-1)1}} & -t_{(n-1)n} \\ -t_{n1} & 1-_{nn} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \boxed{1-t_{(n-1)(n-1)}} & -t_{(n-1)n} \\ -t_{n(n-1)} & 1-t_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

D'où $|I-T|_{11} =$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1-(t_{11}+t_{1n}t_{nn}^{*}t_{nn})} & \cdots & 1-(t_{1(n-1)}+t_{1n}t_{nn}^{*}t_{n(n-1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ 1-(t_{(n-1)1}+t_{1n}t_{nn}^{*}t_{n(n-1)}) & \cdots & 1-(t_{(n-1)(n-1)}+t_{(n-1)n}t_{nn}^{*}t_{n(n-1)}) \end{vmatrix}$$

ce qui achève la preuve. □

Le résultat sur les quasi-déterminants permet de retrouver celui sur les déterminants utilisé dans la section précédente.

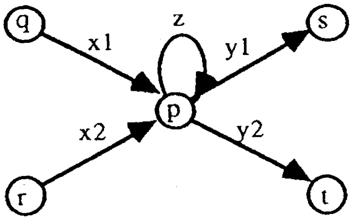


Fig. 9

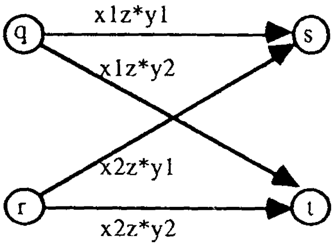


Fig. 10

**Figure 9. – Automate $\mathcal{T}$.**
**Figure 10. – Automate transformé $\mathcal{T}'$.**

En appliquant la transformation plusieurs fois, on obtient alors, si $p$ est un état de l'automate $\mathcal{T}$, supposé non-ambigu, et si $\underline{X}_{qq}$ désigne la série des étiquettes des chemins simples allant de l'état $q$ à l'état $q$ (un chemin simple de $q$ à $q$ ne passe pas par $q$ en dehors de ses extrémités) :

PROPOSITION 4.5 : $|I - T|_{pp} = 1 - \underline{X}_{pp}$.

Les coefficients $(\underline{X}_{qq})^*$ sont aussi les coefficients d'indice $(q, q)$ de $T^*$.

*Exemple 4.3 :* On considère l'automate de la figure 11.

On obtient :

$$|I - T|_{11} = 1 - (a + bc^* d)$$

et

$$|I - T|_{22} = 1 - (c + da^* d).$$

Ce résultat généralise la proposition 2.1 p. 382 de [3] obtenue lorsque $\underline{X}_{pp}$ est un code fini.

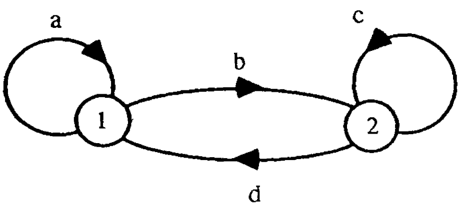


**Figure 11. – Automate $\mathcal{T}$.**

### 4.3. Calcul pour les systèmes de type fini

Nous revenons à la fonction zêta qui admet une expression plus simple pour les systèmes dits de type fini. Les systèmes de type fini sont des systèmes sofiques particuliers et leur fonction zêta se calcule donc avec les formules de la section précédente. Dans ce cas, il n'y a cependant qu'un seul déterminant à calculer. En effet, un système de type fini peut être reconnu par un automate fini déterministe local. Un automate local admet au plus un cycle d'étiquette donnée. Les automates puissances extérieures d'ordre $r$ strictement plus grand que 1 n'ont donc pas de flèches. La fonction zêta généralisée de $S$ de type fini est donc l'inverse de $\det(I - Q)$, où $Q$ est la projection commutative de la matrice de transition généralisée de l'automate local.

On peut montrer ce résultat directement plus simplement (*voir* [7]), et la formule est encore vraie même si l'automate initial n'est pas déterministe.

### 4.4. Remarques

On a montré dans la section 3 que la fonction zêta généralisée d'un langage de mots finis $M$, obtenu comme étant l'ensemble des mots qui stabilisent un ensemble d'états d'un automate fini déterministe [type (*)], est rationnelle. Ce résultat est étendu en [5] aux langages dits *cycliques*, mais la preuve ci-dessus ne permet pas cette extension.

Un langage de mots finis $L$ est cyclique si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :

- $uv \in L \Leftrightarrow vu \in L$
- $u \in L \Leftrightarrow (u^n \in L, \forall n \leq 1)$

Un langage $M$ du type (*) ci-dessus est cyclique mais l'inverse n'est pas vrai. Le langage $\{a, b\}^* - b^*$ fournit un contre-exemple. La preuve donnée dans cet article s'adapte néanmoins à ce cas car ce langage s'écrit comme la différence de deux langages $M - M'$, où $M' \subset M$ et $M$ et $M'$ sont du type (*).

La fonction $\zeta$ n'est pas un invariant caractéristique pour la conjugaison de deux systèmes sofiques (la décidabilité de la conjugaison est un problème ouvert). Il existe des systèmes sofiques qui admettent même fonction $\zeta$ et ne sont pas conjugués (*voir* par exemple [2]).

## 5. TEST D'APÉRIODICITÉ

Nous mentionnons ici une autre application des automates puissances extérieures. Ces automates permettent de tester si un automate fini déterministe est apériodique.

### Définition

Soit $\mathcal{A}$ un automate *déterministe*. On dit que $\mathcal{A}$ est *apériodique* si et seulement si pour tout mot $u$ et tout état $p$ on a :

$$\forall n \geq 1, \quad ((p \cdot u^n = p) \quad \Rightarrow \quad (p \cdot u = p)).$$

Le résultat est le suivant :

PROPOSITION 5.1 : *L'automate $\mathcal{A}$ est apériodique si et seulement si tous ses automates puissances extérieures n'admettent que des cycles ayant un nombre pair de flèches d'étiquettes négatives. Il suffit de vérifier cette propriété sur les cycles simples des automates puissances extérieures d'ordres supérieurs ou égaux à* 2.

La preuve découle des définitions des automates puissances extérieures. Un système sofique est transitif s'il admet une automate de graphe fortement connexe le reconnaissant. De tels systèmes admettent un unique automate minimal déterministe. On peut montrer qu'un système sofique transitif est apériodique (au sens de Schützenberger), si et seulement si son automate minimal est apériodique. On peut donc tester l'apériodicité d'un système sofique à l'aide des automates puissances extérieures.

## RÉFÉRENCES


1. V. BALADI, Comment compter avec les fonctions zêta, *Gazette des mathématiciens*, 1991, *47*, p. 79-96.
2. M.-P. BÉAL, *Codage Symbolique*, Masson, 1993.
3. J. BERSTEL et D. PERRIN, *Theory of Codes*, Academic Press, 1985.
4. J. BERSTEL et C. REUTENAUER, *Rational Series and their Languages*, Springer, 1988.
5. J. BERSTEL et C. REUTENAUER, Zeta functions of formal languages, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, *321*, p. 533-546.
6. R. BOWEN, Symbolic dynamics, In *On axiom A diffeomorphism*, number 35 in CBMS Reg. Conf. American Mathematical Society, 1978.
7. R. BOWEN et O. LANFORD, Zeta functions of restrictions of the shift transformation. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, number 14, p. 43-50.
8. I. GELFAND et V. RETAKH, Determinants of matrices over non commutative rings, *Funct. Anal. Appl.*, 1991, *25(2)*, p. 91-102.

9. I. GELFAND et V. RETAKH, A theory of non-commutative determinants and characteristic functions of graphs, *Funct. Anal. Appl.*, 1992, *26(4)*, p. 1-20..
10. D. KROB et B. LECLERC, *Minor identities for quasi-determinants and quantum determinants*, LITP 93-46, IBP, 1993.
11. A. MANNING, Axiom A diffeomorphisms have rationnal zeta fonctions, *Bull. London Math. Soc.*, 1971, *3*, p. 215-220.