SYMEON BOZAPALIDIS

Sur une classe de transformations d'arbres

Informatique théorique et applications, tome 22, n° 1 (1988), p. 43-47

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1988__22_1_43_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 22, n° 1, 1988, p. 43 à 47)

SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS D'ARBRES (*)

par Symeon BOZAPALIDIS [1]

Communiqué par J. E. PIN

Résumé. – *On introduit une certaine classe de transformations d'arbres qui a de bonnes propriétés : elle est close par composition, elle préserve les principales familles de forêts (reconnaissables, algébriques) et en outre, dans cette classe, l'égalité est décidable.*

Abstract. – *We study a class of tree-transformation from T_Σ to T_Γ whose graph is a recognizable subset of the $\Sigma \otimes \Gamma$-algebra $T_\Sigma \times T_\Gamma$.*
It is shown that these transformations preserve recognizable and algebraic forests and are closed under composition.

T_Σ désigne l'ensemble des arbres sur l'alphabet gradué Σ.

1. TRANSFORMATIONS $\Sigma \otimes \Gamma$-RECONNAISSABLES

Étant donné deux alphabets gradués disjoints Σ & Γ, on définit leur produit tensoriel $\Sigma \otimes \Gamma$ par

$$(\Sigma \otimes \Gamma)_n = \bigcup_{0 \leqq k \leqq n} \Sigma_k \Gamma_{n-k} \quad \text{(concatenation)}.$$

On peut munir $T_\Sigma \times T_\Gamma$ d'une structure de $\Sigma \otimes \Gamma$-algèbre si l'on pose

$$\sigma\tau((s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k), \ldots, (s_n, t_n)) = (\sigma s_1 \ldots s_k, \tau t_{k+1} \ldots t_n)$$

où $\sigma \in \Sigma_k$, $\tau \in \Gamma_{n-k}$, $s_i \in T_\Sigma$ & $t_j \in T_\Gamma$.

(*) Reçu novembre 1986, révisé février 1987.
[1] Aristote University of Thessaloniki, Department of Mathematics. Thessaloniki, Grèce.

0296-1598 88/01 43 05/$2.50/© Gauthier-Villars

On va étudier les transformations de T_Σ vers T_Γ dont les graphes associés sont exactement les parties $\Sigma\otimes\Gamma$-reconnaissables de $T_\Sigma \times T_\Gamma$. Notons $\mathscr{R}(\Sigma, \Gamma)$ cette classe. Soient

$$\varphi_\Sigma : \quad T_{\Sigma\otimes\Gamma} \to T_\Sigma \qquad \& \qquad \varphi_\Gamma : \quad T_{\Sigma\otimes\Gamma} \to T_\Gamma$$

les homomorphismes définis par

$$\varphi_\Sigma[\sigma\tau(\omega_1 \ldots \omega_k \ldots \omega_n)] = \sigma(\varphi_\Sigma \omega_1 \ldots \varphi_\Sigma \omega_k)$$
$$\varphi_\Gamma[\sigma\tau(\omega_1 \ldots \omega_k \ldots \omega_n)] = \tau(\varphi_\Gamma \omega_{k+1} \ldots \varphi_\Gamma \omega_n)$$

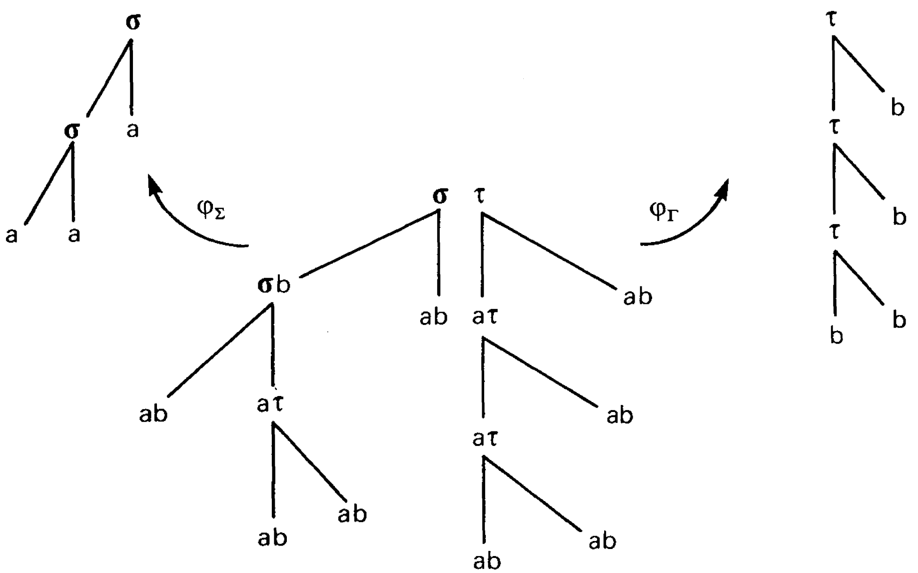
et $h_{\Sigma,\Gamma} : T_{\Sigma\otimes\Gamma} \to T_\Sigma \times T_\Gamma$ l'application induite :

$$h_{\Sigma, T}\,\omega = (\varphi_\Sigma \omega, \ \omega_\Gamma \omega).$$

$h_{\Sigma,\Gamma}$ est l'unique $\Sigma\otimes\Gamma$-homomorphisme qui de plus est surjectif.

L'exemple suivant visualise les choses :

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma_2 = \{\sigma\}, & \Sigma_0 = \{a\} \\ \Gamma_2 = \{\tau\}, & \Gamma_0 = \{b\} \end{array}\right\} \Sigma_n = \Gamma_n = \varnothing, \qquad n \neq 0{,}2$$



PROPOSITION : *Les transformations* $\Sigma\otimes\Gamma$-*reconnaissables de* T_Σ *vers* T_Γ *coïncident avec les bimorphismes* $(\varphi_\Sigma, L, \varphi_\Gamma)$

$$\begin{tikzcd} & T_{\Sigma\otimes\Gamma} \arrow[dl, "\varphi_\Sigma"'] \arrow[dr, "\varphi_\Gamma"] & \\ T_\Sigma & & T_\Gamma \end{tikzcd} \qquad L \in \mathrm{Rec}\ (T_{\Sigma\oplus\Gamma})$$

pour lesquels $L=h_{\Sigma,\Gamma}^{-1}(h_{\Sigma,\Gamma}(L))$.

Preuve : Soit $A\in\mathscr{R}(\Sigma, \Gamma)$, alors $L=h_{\Sigma,\Gamma}^{-1}(A)$ est une forêt reconnaissable de $T_{\Sigma\otimes\Gamma}$ et comme $h_{\Sigma,\Gamma}$ est surjectif, $h_{\Sigma,\Gamma}(L)=A$. La réciproque : si $L\in\mathrm{Rec}(T_{\Sigma\otimes\Gamma})$ est telle que $L=h_{\Sigma,\Gamma}^{-1}(h_{\Sigma,\Gamma}(L))$ en vertu du lemme qui suit, $h_{\Sigma,\Gamma}(L)$ est $\Sigma\otimes\Gamma$-reconnaissable. ■

LEMME : *Soit* Ω *un alphabet gradué,* $\mathscr{A}$ *une* Ω-*algèbre telle que l'unique* Ω-*homomorphisme* $h: T_\Omega\to\mathscr{A}$ *est surjectif. Soit encore* L *une forêt reconnaissable de* T_Ω *telle que* $L=h^{-1}(h(L))$. *Alors l'image* $h(L)$ *est une partie reconnaissable de* $\mathscr{A}$.

Preuve : On a un diagramme commutatif d'homomorphismes surjectifs

$$\begin{tikzcd} & T_\Omega \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h_L"] & \\ \mathscr{A} \arrow[rr, "g"'] & & \mathscr{A}_L \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{A}_L$ est la Ω-algèbre syntaxique de L et h_L l'homomorphisme canonique associé ([2], p. 87). Il est facile de prouver que

$$h(L)=g^{-1}(g(h(L)).$$

Cette relation et le fait que $\mathscr{A}_L$ est finie nous donne la reconnaissabilité de $h(L)$. ■

Quelle que soit la forêt algébrique $U\subseteq T_\Sigma$, son image inverse $\varphi_\Sigma^{-1}(U)$ est aussi algébrique ([1], théorème 4.1); comme la classe des forêts algébriques est fermée par homomorphisme linéaire et par intersection avec une forêt reconnaissable, la forêt

$$\varphi_\Gamma(\varphi_\Sigma^{-1}(U)\cap L)$$

est bien algébrique. Ainsi

PROPOSITION : *Les transformations $\Sigma \otimes \Gamma$-reconnaissables préservent la reconnaissabilité et l'algébricité.* ■

Il est aussi intéressant de noter que l'égalité dans $\mathscr{R}(\Sigma, \Gamma)$ est décidable. Cela vient du fait que pour $A_1, A_2 \in \mathscr{R}(\Sigma, \Gamma)$

$$A_1 = A_2 \quad \text{ssi} \quad h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A_1) = h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A_2)$$

et la dernière relation est décidable puisqu'il s'agit de forêts reconnaissables. On va terminer ce paragraphe avec la remarque que $\mathscr{R}(\Sigma, \Gamma)$ contient la classe importante des relations de la forme

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \times C_i, \qquad B_i \in \operatorname{Rec}(T_\Sigma) \qquad \& \qquad C_i \in \operatorname{Rec}(T_\Gamma).$$

En effet, soit $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$) un automate d'arbres reconnaissant $B \subseteq T_\Sigma$ (resp. $C \subseteq T_\Gamma$); alors le produit $\mathscr{B} \times \mathscr{C}$ admet une structure canonique de $\Sigma \otimes \Gamma$-algèbre et il reconnait $B \times C$.

2. FERMETURE PAR COMPOSITION

THÉORÈME : *La classe des transformations considérées est fermée par composition.*

Preuve : On considère trois alphabets gradués Σ, Γ & Δ et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& & & T_{\Sigma \otimes \Gamma \oplus \Delta} \arrow[dll, "\varphi_{\Sigma \otimes \Gamma}"'] \arrow[d, "h_{\Sigma, \Gamma, \Delta}"] \arrow[drr, "\varphi_{\Gamma \otimes \Delta}"] & & & \\
& T_{\Gamma \otimes \Delta} \arrow[ddl] \arrow[d, "h_{\Sigma, \Gamma}"] \arrow[ddrr] & & T_\Sigma \times T_\Gamma \times T_\Delta \arrow[dll, "p_{\Sigma, \Gamma}"] \arrow[drr, "p_{\Gamma, \Delta}"'] & & T_{\Gamma \otimes \Delta} \arrow[ddll] \arrow[d, "h_{\Gamma, \Delta}"] \arrow[ddr] & \\
& T_\Sigma \times T_\Gamma \arrow[dl] \arrow[drr] & & & & T_\Gamma \times T_\Delta \arrow[dll] \arrow[dr] & \\
T_\Sigma & & & T_\Gamma & & & T_\Delta
\end{tikzcd}$$

où les flèches P désignent les projections d'un produit, et où les flèches verticales sont les seules flèches (homomorphismes) qui font commuter ce diagramme.

Prenons $A_1 \in \mathscr{R}(\Sigma, \Gamma)$ & $A_2 \in \mathscr{R}(\Gamma, \Delta)$ et posons

$$L_1 = h^{-1}_{\Sigma,\Gamma}(A_1), \qquad L_2 = h^{-1}_{\Gamma,\Delta}(A_2) \qquad \& \qquad A = P^{-1}_{\Sigma,\Gamma}(A_1) \cap P^{-1}_{\Gamma,\Delta}(A_2)$$

alors

$$h^{-1}_{\Sigma,\Gamma,\Delta}(A) = \varphi^{-1}_{\Sigma\otimes\Gamma}(L_1) \cap \varphi^{-1}_{\Gamma\otimes\Delta}(L_2).$$

Comme l'image de A par la projection $P_{\Sigma,\Delta}: T_\Sigma \times T_\Gamma \times T_\Delta \to T_\Sigma \times T_\Delta$ est justement la composition $A_1 \circ A_2$, du diagramme commutatif ci-après

$$\begin{tikzcd}
T_{\Sigma\otimes\Gamma\otimes\Delta} \arrow[r, "\varphi_{\Sigma\otimes\Delta}"] \arrow[d, "h_{\Sigma,\Gamma,\Delta}"'] & T_{\Sigma\otimes\Delta} \arrow[d, "h_{\Sigma,\Delta}"] \\
T_\Sigma \times T_\Gamma \times T_\Delta \arrow[r, "P_{\Sigma,\Delta}"'] & T_\Sigma \times T_\Delta
\end{tikzcd}$$

on tire que

$$h^{-1}_{\Sigma,\Delta}(A_1 \circ A_2) = \varphi_{\Sigma\otimes\Delta}(h^{-1}_{\Sigma,\Gamma,\Delta}(A)).$$

En appliquant le lemme au $\Sigma\otimes\Delta$-homomorphisme $h_{\Sigma,\Delta}$ et à la forêt $L = \varphi_{\Sigma\otimes\Delta}$ $(h^{-1}_{\Sigma,\Gamma,\Delta}(A))$ qui est reconnaissable (car $\varphi_{\Sigma\otimes\Delta}$ est linéaire et $h^{-1}_{\Sigma,\Gamma,\Delta}(A)$ reconnaissable) on déduit que $A_1 \circ A_2 \in \mathscr{R}(\Sigma, \Delta)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Arnold et M. Dauchet, *Forêts algébriques et homomorphismes inverses*, Information and Control, vol. 37, n° 2, p. 182-196.
2. F. Gecseg et M. Steinby, *Tree Automata*, Akademiai Kiado, Budapest, 1984.