

JEAN-JACQUES PANSIOT

## **Mots infinis de Fibonacci et morphismes itérés**

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 17, n° 2 (1983), p. 131-135

<[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1983\\_\\_17\\_2\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1983__17_2_131_0)>

© AFCET, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MOTS INFINIS DE FIBONACCI ET MORPHISMES ITÉRÉS (\*)

par Jean-Jacques PANSIOT <sup>(1)</sup>

Communiqué par J. BERSTEL

---

Résumé. — *Nous montrons que tous les morphismes itérés qui engendrent le mot infini de Fibonacci sur  $k$  lettres sont des puissances d'un même morphisme.*

Abstract. — *We show that all iterated morphisms generating the infinite Fibonacci word on  $k$  letters are powers of a single morphism.*

### INTRODUCTION

Soit  $f$  le morphisme du monoïde  $\{a, b\}^*$ , défini par  $f(a) = ab$ ,  $f(b) = a$ . En itérant le morphisme  $f$ , on obtient le mot infini de Fibonacci  $F$ ,  $F = abaababaabaababab...$  Ce mot a été étudié par divers auteurs, voir par exemple l'exposé de J. Berstel [1] sur les propriétés des facteurs de  $F$ . Appelons rigide de base  $h$  un mot infini tel que tout morphisme qui l'engendre par itération soit une puissance du morphisme  $h$ . Nous allons montrer que  $F$  est rigide de base  $f$ , et plus généralement si on considère le mot infini de Fibonacci sur  $k + 1$  lettres engendré par le morphisme  $g$ ,  $g(a_0) = a_0 a_1 \dots a_k$ ,  $g(a_i) = a_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , il est rigide de base  $g$ .

On connaît déjà plusieurs mots infinis rigides, dont le mot de Thue (ou de Morse) [2], et un mot étudié en connection avec les répétitions dans les mots sur un alphabet à quatre lettres [3]. Le mot de Fibonacci généralisé est le premier mot rigide connu sur un alphabet à plus de deux lettres.

Dans le paragraphe suivant nous donnons des propriétés des facteurs de  $F$ , que nous utilisons dans le dernier paragraphe pour obtenir notre résultat.

---

(\*) Reçu septembre 1982.

(<sup>1</sup>) Centre de Calcul de l'Esplanade, U.E.R. de Mathématique, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

### QUELQUES PROPRIÉTÉS DU MOT DE FIBONACCI GÉNÉRALISÉ

Dans tout ce qui suit  $k$  est un entier fixé,  $k \geq 1$ , et  $X = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ . Le morphisme  $g : X^* \rightarrow X^*$  est défini par :

$$g(a_0) = a_0 a_1 \dots a_k, \quad g(a_i) = a_{i-1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Soit  $G_i = g^i(a_0)$ ,  $i \geq 0$ . On observe que  $G_{i+1}$  commence par  $G_i$  et on note  $G = g^\omega(a_0)$  le mot infini obtenu comme limite de la suite  $G_i$ ,  $i \geq 0$ . Soit  $G_{-i} = g^{-i}(a_0) = a_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , ce qui a un sens car  $g^i(g^{-i}(a_0)) = a_0$ . On pose :

$$X_i = \{G_{i-k}, G_{i-k+1}, \dots, G_i\}, \quad i \geq 0,$$

en particulier on peut identifier  $X_0$  et  $X$ . Un mot est  $i$ -factorisable s'il appartient à  $X_i^*$  (ou à  $X_i^\omega$  s'il est infini)  $i \geq 0$ . On a les propriétés suivantes.

**PROPRIÉTÉ 1 :** On a la relation  $G_1 = G_0 G_{-1} \dots G_{-k}$ , et par application de  $g^i$ ,  $G_{i+1} = G_i G_{i-1} \dots G_{i-k}$ . En particulier  $G$  est  $i$ -factorisable,  $i \geq 0$ .

**PROPRIÉTÉ 2 :** L'ensemble  $X_i$  est un code suffixe car chacun de ses mots se termine par une lettre distincte. Tout mot fini a donc au plus une  $i$ -factorisation.

**PROPRIÉTÉ 3 :** La  $i$ -factorisation de  $G$  est unique,  $i \geq 0$ .

*Preuve :* C'est évident pour  $i=0$ . Supposons qu'on ait deux  $i$ -factorisations de  $G$ ,  $i > 0$ ,  $G = G_{i_1} G_{i_2} \dots = G_{j_1} G_{j_2} \dots$ . Soit  $n$  le premier indice tel que  $i_n \neq j_n$ . Si on remplace toutes les occurrences de  $G_i$  par  $G_{i-1} \dots G_{i-1-k}$  on obtient deux  $(i-1)$ -factorisations. Si  $G_{i_n}$  et  $G_{j_n}$  sont différents de  $G_i$ , ces deux  $i-1$  factorisations sont distinctes ce qui est impossible par hypothèse de récurrence. Donc par exemple  $G_{i_n} = G_i \neq G_{j_n}$ . Mais alors les premières occurrences de  $G_{i-1-k}$  dans les deux  $i-1$  factorisations ne peuvent coïncider ce qui est impossible et il y a donc bien une seule  $i$ -factorisation.

**PROPRIÉTÉ 4 :** Dans la  $i$ -factorisation de  $G$ , tout facteur  $G_{i-p}$ ,  $0 \leq p < k$ , est suivi soit de  $G_{i-p-1}$  soit de  $G_i$ , et  $G_{i-k}$  est toujours suivi de  $G_i$ .

Cette propriété se montre aisément pour  $i=0$ , et on l'induit pour tout  $i$  en observant que la  $i$ -factorisation de  $G$  s'obtient en regroupant en  $G_i$  les facteurs  $G_{i-1} \dots G_{i-1-k}$  de la  $(i-1)$ -factorisation.

**PROPRIÉTÉ 5 :** Les mots  $a_0 a_0$ , et donc  $G_i G_i$ ,  $i \geq 0$ , sont facteurs de  $G$ .

**PROPRIÉTÉ 6 :** Si  $G = \alpha G_{i+1} \beta$ ,  $i \geq 0$ , alors la  $i$ -factorisation de  $G$  factorise  $\alpha$ , et le facteur qui suit  $\alpha$  est  $G_i$ .

*Preuve :* Pour  $i=0$  c'est évident. Supposons, pour  $i \geq 1$  :

$$G = \alpha G_{i+1} \beta = \alpha G_i G_{i-1} \dots G_{i-k} \beta = \alpha G'_{i-1} \dots G'_{i-1-k} G_{i-1} \dots G_{i-k} \beta.$$

Par hypothèse de récurrence, la  $(i-1)$ -factorisation de  $G$  factorise  $\alpha$ , et le facteur qui suit est  $G'_{i-1}$ . La  $i$ -factorisation de  $G$  est obtenue en regroupant des facteurs  $G'_{i-1} \dots G'_{i-1-k}$  en  $G''_i$ . Un tel regroupement ne peut chevaucher  $\alpha$  et  $G'_{i-1}$ , donc la  $i$ -factorisation de  $G$  factorise  $\alpha$ , et le facteur qui suit est soit  $G_i$ , s'il y a regroupement, soit  $G'_{i-1}$ . Montrons que ce ne peut être  $G'_{i-1}$ . Si c'était le cas, la  $i$ -factorisation de  $G_{i+1} \beta$  serait de la forme :

$$G'_{i-1} \dots G'_{i-j} G'_i \dots = G'_{i-1} \dots G'_{i-j} G''_{i-1} \dots G''_{i-k-1}, \dots, j \geq k.$$

On aurait alors deux  $(i-1)$ -factorisations distinctes pour le mot :

$$G'_{i-1} \dots G'_{i-j} G''_{i-1} \dots G''_{i-k-1} = G'_{i-1} \dots G'_{i-k-1} G_{i-1} \dots G_{i-j}.$$

C'est impossible par la propriété 2, et donc le facteur qui suit  $\alpha$  dans la  $i$ -factorisation est  $G_i$ .

On peut donner une propriété un peu plus forte en observant que la  $(i+1)$ -factorisation de  $G$  ne peut chevaucher  $\alpha$  et  $G_{i+1}$  :

**PROPRIÉTÉ 7 :** Si  $G = \alpha G_{i+1} \beta$ ,  $i \geq 0$ , alors la  $(i+1)$ -factorisation de  $G$  factorise  $\alpha$  et le facteur qui suit  $\alpha$  est soit  $G_i$  soit  $G_{i+1}$ .

En corollaire on a la propriété suivante :

**PROPRIÉTÉ 8 :** Si  $G_i u G_i$ ,  $i \geq 0$  est un facteur de  $G$  alors  $G_i u$  est  $i$ -factorisable.

En remarquant que dans la  $i$ -factorisation de  $G$  le plus long mot séparant deux occurrences successives de  $G_i$  est  $G_{i-1} \dots G_{i-k}$ , et que  $|G_{i-1} \dots G_{i-k}| = |G_i| - |G_{i-k-1}|$ , on a :

**PROPRIÉTÉ 9 :** Dans la  $i$ -factorisation de  $G$ ,  $i \geq 1$ , deux occurrences successives de  $G_i$  sont séparées par un mot de longueur strictement inférieure à  $|G_i|$ . On a aussi  $|G_{i+1}| < 2|G_i|$ .

## RIGIDITÉ DE G

Soit  $h$  un morphisme de  $X^*$  dans  $X^*$  tel que  $h^\omega(a_0) = G$ . Nous allons montrer que  $h$  est une puissance de  $g$ .

**PROPOSITION 1 :** Pour tout  $i \geq 1$  il existe  $j$  et  $p$ ,  $j \geq i$ ,  $0 \leq p < k$  tels que  $h(G_i) = G_j G_{j-1} \dots G_{j-p}$ .

*Preuve :* Soit  $j$  l'entier défini par  $|G_j| \leq |h(G_i)| < |G_{j+1}|$ . On a bien  $j \geq i$ , sinon  $h^\omega(G_i)$  ne serait pas infini.

Comme  $G$  commence par  $G_i$ , et donc par  $h(G_i)$ , ainsi que par  $G_{j+1} = G_j G_{j-1} \dots G_{j-k}$ , on a  $h(G_i) = G_j u$ , où  $u$  est un facteur gauche de  $G_{j-1} \dots G_{j-k}$ . D'autre part  $G$  contient des occurrences de  $G_i G_i$  (propriété 5), donc de  $h(G_i G_i) = G_j u G_j u$ . Par la propriété 8,  $G_j u$  est  $j$ -factorisable, et par la propriété 9 sa  $j$ -factorisation contient exactement un facteur  $G_j$ , soit  $G_j u = \alpha G_j \beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$   $j$ -factorisables. Mais par la propriété 7, la  $j$ -factorisation de  $G$  commence par la  $j$ -factorisation de  $\alpha$ . Donc  $\alpha$  est vide et  $u = \beta$  est  $j$ -factorisable, soit  $h(G_i) = G_j G_{j-1} \dots G_{j-p}$  pour un certain  $p < k$ .

PROPOSITION 2 : Si  $h(G_i) = G_j \dots G_{j-p}$ ,  $i \geq 1$ ,  $j \geq i$ ,  $0 \leq p < k$  alors  $h(G_{i+1}) = G_{j+1}$ .

Preuve : Soit  $h(G_i) = G_j \dots G_{j-p}$ . Comme  $G$  commence par  $G_{i+1} G_i$ , donc par :

$$h(G_{i+1} G_i) = h(G_i G_{i-1} \dots G_{i-k} G_i)$$

$$= G_j \dots G_{j-p} h(G_{i-1} \dots G_{i-k}) G_j \dots G_{j-p}$$

par la propriété 7,  $h(G_{i-1} \dots G_{i-k})$  est  $j$ -factorisable, soit  $h(G_{i-1} \dots G_{i-k}) = G_{j-p-1} \dots G_{j-k} u$ ,  $u$   $j$ -factorisable. Si  $u$  était non vide il commencerait par  $G_j$ . Mais alors la  $j$ -factorisation de  $G$  commencerait par  $h(G_i) = h(G_{i-1} \dots G_{i-k}) = G_{j-p-1} \dots G_{j-k}$ ... ce qui est impossible car  $j-p-1 < j$ . Donc  $u$  est vide et :

$$h(G_{i+1}) = h(G_i G_{i-1} \dots G_{i-k}) = G_j \dots G_{j-p} G_{j-p-1} \dots G_{j-k} = G_{j+1}. \quad \blacksquare$$

Par la proposition 1, il existe  $q \geq 1$  et  $p$ ,  $0 \leq p < k$  tels que :

$$h(G_i) = G_q \dots G_{q-p}$$

Par induction sur  $i \geq 2$ , et en appliquant la proposition 2 on obtient :

PROPOSITION 3 : Il existe  $q \geq 1$  tel que pour  $i \geq 2$  :

$$h(G_i) = G_{q+i-1}$$

On peut ensuite étendre cette propriété pour  $i \leq 1$  :

PROPOSITION 4 : Il existe  $q \geq 1$  tel que pour  $i \geq -k$  :

$$h(G_i) = G_{q+i-1}$$

Preuve : C'est déjà démontré pour  $i \geq 2$ . Supposons que cela soit vrai pour  $i \geq l > -k$ .  $G$  commence par :

$$h(G_{k+l} G_{k+l-1}) = h(G_{k+l-1} \dots G_{l-1} G_{k+l-1})$$

$$= G_{q+k+l-2} G_{q+k+l-3} \dots G_{q+l-1} h(G_{l-1}) G_{q+k+l-2}$$

En considérant la  $q+k+l-2$  factorisation de  $G$ , on obtient que

$$h(G_{l-1}) = G_{q+l-2}. \quad \blacksquare$$

Comme  $G_{-i} = a_i$ , et en posant  $n = q-1$  on a :

THÉORÈME : *Le morphisme  $h$  est égal à  $g^n$ , le mot infini  $G$  est donc rigide de base  $g$ .*

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. BERSTEL, *Mots de Fibonacci*, exposé au Séminaire d'Informatique théorique, Rapport LITP, 1980-1981, Paris.
2. J.-J. PANSIOT, *The Morse Sequence and Iterated Morphisms*, Inf. Proc. Lett., vol. 12, n° 2, 1981, p. 68-70.
3. J.-J. PANSIOT, A propos d'une conjecture de F. Dejean sur les répétitions dans les mots, *Actes de la Fête des Mots*, juin 1982, Rouen, également à paraître.