RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

JEAN-PIERRE DUVAL

# Mots de Lyndon et périodicité

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 14, nº 2 (1980), p. 181-191
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1980__14_2_181_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 14, n° 2, 1980, p. 181 à 191)

# MOTS DE LYNDON ET PÉRIODICITÉ (*)

par Jean-Pierre DUVAL (1)

Communiqué par J.-F. PERROT

Résumé. — *Nous montrons dans cet article comment, en ordonnant le monoïde libre $X^*$ engendré par un alphabet $X$, nous pouvons établir une caractérisation de la périodicité des mots de ce monoïde.*

Abstract. — *We show in this note how, by ordering the free monoïd $X^*$, generated by an alphabet $X$, we can establish a caracterisation of periodicity of the words on this alphabet.*

## INTRODUCTION

Les problèmes de périodicité sont au centre de nombreuses questions sur les mots; que l'on s'intéresse, à la suite de [8], à l'étude des équations dans le monoïde libre, ou dans le groupe libre [9], ou bien aux problèmes algorithmes de « Word Matching » [7], on retrouve l'importance des résultats connus sur les périodes, tel le théorème de [6].

Plus récemment [11], posait la question d'une relation entre le nombre de couvertures disjointes d'un mot et sa période, et les résultats obtenus [3], à la suite de [1], permettent d'y apporter une réponse [5].

DÉFINITIONS : On désigne par $X^*$ le monoïde libre engendré par un alphabet $X$, ses éléments sont appelés des mots, le mot vide est noté 1, et l'ensemble des mots non vides est noté $X^+$. La *longueur* d'un mot $f$ est notée $|f|$. Un mot $g$ est un *facteur* d'un mot $f$ ssi $f \in X^* g X^*$, c'est un *facteur gauche* si $f \in g X^*$, et un *facteur droit* si $f \in X^* g$.

On dit qu'un entier non nul $\lambda$ est une *période* d'un mot $f \in X^+$ ssi chaque fois que deux lettres de $f$ sont à distance $\lambda$ elles sont identiques (c'est-à-dire ssi chaque fois que $xgy$ est un facteur de $f$ satisfaisant $x \in X$, $y \in X$, et $|xg| = \lambda$, alors $x = y$). Il n'est pas nécessaire, pour que $\lambda > 0$ soit une période de $f \in X^+$, que $f$ soit une puissance exacte d'un mot de longueur $\lambda$, mais il suffit que $f$ soit un facteur d'un mot de cette forme; ainsi, $u \in X^*$, $v \in X^+$, $k > 0$ le mot $f = (uv)^k u$ admet pour

(*) Reçu avril 1979, révisé novembre 1979.
(1) Laboratoire d'Informatique, Université de Rouen, Haute-Normandie, Mont-Saint-Aignan.

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics, 0399-0540/1980/181/$ 5.00

pétiode $\lambda = |uv|$; plus avant, au sens de la définition tout entier supérieur ou égal à la longueur de $f$ est une période de $f$. L'ensemble des périodes d'un mot $f$ est donc non vide, et ce mot admet une *plus petite période* qui est inférieure ou égale à $|f|$.

Par exemple, pour $X = \{x, y\}$, la plus petite période du mot $xyxxy$ est 3, et celle du mot $xxxy$ est 4.

On appelle *point* d'un mot $f \in X^*$ tout couple $(f', f'')$ de mots de $X^*$ satisfaisant $f = f' f''$.

On dit qu'un mot non vide $u$ est une *répétition* au point $(f', f'')$ du mot $f = f' f'' \in X^+$ ssi :

$$uX^* \cap f'' X^* \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad X^* u \cap X^* f' \neq \emptyset$$

[de façon plus intuitive si nous superposons les couples $(f', f'')$ et $(u, u)$ les lettres en coïncidence sont identiques].

Pour tout $g' \in X^*$, $g'' \in X^*$, et $u \in X^+$ : le mot $u$ est une répétition au point $(g' u, ug'')$; ce n'est cependant pas la seule forme possible et il n'est pas nécessaire que $u^2$ soit un facteur de $f$ pour être une répétition en un point de $f$; par exemple $xxy$ est une répétition au point $(y, xx)$ du mot $yxx$; plus généralement en tout point $(f', f'')$, d'un mot non vide $f = f' f''$, le mot $u = f'' f'$ est une répétition. Ainsi, en chaque point d'un mot, l'ensemble des répétitions est non vide et on appelle *répétition élémentaire* en un point $(f', f'')$ l'unique répétition de plus courte longueur en ce point.

Notons que si $\lambda > 0$ est une période de $f \in X^+$, en tout point $(f', f'')$ du mot $f$ il existe au moins une répétition de longueur $\lambda$, et par suite, la plus petite période de $f$ est supérieure ou égale à la longueur de la répétition élémentaire en chaque point $(f', f'')$ de $f$. On dit que $(f', f'')$ est un *point critique* de $f = f' f'' \in X^+$, ssi la longueur de la répétition élémentaire en ce point est exactement égale à la plus petite période de $f$.

Le résultat peut alors s'énoncer :

THÉORÈME DU POINT CRITIQUE : *Tout mot non vide admet au moins un point critique, c'est-à-dire, la plus petite période d'un mot non vide est égale au maximum des longueurs des plus courtes répétitions en chaque point du mot.*

Par exemple pour $X = \{x, y\}$ et $f = xyxxyxyxxyxxy$; $f = (xyxxyxyx)^1\, xyxxy$, 8 est une période de $f$, c'est la plus petite période de $f$; notons la longueur de la répétition élémentaire en chaque point de $f$ :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
 & x & & y & & x & & x & & y & & x & & y & & x & & x & & y & & x & & x & & y & \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 5 & & 2 & & 2 & & 8 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1
\end{array}$$

La répétition élémentaire au point $(xyxx, yxyxxyxxy)$ est $yxyxx$ de longueur 5, et la plus grande longueur de ces répétitions est 8, égale à la plus petite période de $f$ et s'obtient au point $(xyxxyxy, xxyxxy)$; qui est le seul point critique du mot considéré.

Un premier résultat sur ce point a été établi par [1]; considérant un mot « suffisamment long » comme une application $f$ de $\mathbb{Z}$ dans $X$ : on dit que $\lambda > 0$ est une période locale de $f$ au point $i \in \mathbb{Z}$ ssi pour tout $j \in [i-\lambda, i], f(j) = f(j+\lambda)$, c'est-à-dire que $f([i-\lambda, i+\lambda])$ est de la forme $xuxux$ avec $x \in X$ et $|ux| = \lambda$; leur résultat est alors le suivant : *soit $g$ un facteur fini de $f$, si en chaque lettre de $g$ il existe une période locale (de $f$), le maximum sur $g$ des minimums en chaque lettre de $g$ des périodes locales, est une période de $g$.*

Notons que l'existence d'une période locale $\lambda$, au sens de Cesari-Vincent, implique l'existence d'une répétition de longueur $\lambda$, mais la réciproque n'est pas vraie.

*Exemple :*

$$f = \ldots yxxy_1\ yxx_1\ yxxyyxx \ldots,$$

$$g = yxxy_1\ yxx_1\ yxxyyxx \qquad \text{avec} \quad y_1 = y \quad \text{et} \quad x_1 = x.$$

La période locale de $f$ au voisinage de $y_1$ n'est pas définie, sans connaissance du contexte de $g$ dans $f$, elle serait au moins égale à 4 en supposant que la lettre de $f$ précédent $g$ est $y$. Il en est de même au point $x_1$, et la période locale serait de 7 en supposant que la lettre de $f$ précédent $g$ est $x$, et serait au moins égale à 11 si nous supposons comme précédemment que cette lettre est $y$. Par contre les répétitions sont définies, $yyxx$ de longueur 4 est une répétition au point $(yxx, y_1\, yxxyxxyyxx)$, $y$ de longueur 1 est une répétition au point $(yxxy_1, yxxyxxyyxx)$, $x$ de longueur 1 est une répétition au point $(yxxy_1\, yx, x_1\, yxxyyxx)$, $yxx$ de longueur 3 est une répétition au point $(yxxy_1\, yxx_1, yxxyyxx)$; aucun de ces points n'est un point critique de $g$ dont la période élémentaire est 7; toutefois l'existence d'un point critique dans $g$ qui est garantie par le théorème du point critique est confirmée par l'observation : $(yxxy_1\, y, xxyxxyyxx)$ est un point critique de $g$.

Nous avons donné en [3] une preuve complète du théorème du point critique qui utilise une récurrence sur la longueur des mots différente de celle de Césari-Vincent. En [5] nous avons développé l'application au problème de M. P. Schützenberger. Le théorème du point critique peut également se démontrer en faisant appel à la théorie des mots de Lyndon, qui a pour origine l'étude des factorisations des mots du monoïde libre : c'est cette preuve, conceptuellement plus intéressante, qui fait l'objet du présent article.

Rappelons que, étant donné un alphabet totalement ordonné $(X, <)$, et le monoïde libre ordonné lexicographiquement $(X^*, <)$, on dit qu'un mot non vide $x_1 \dots x_n$ de $X^+$ est un *mot de Lyndon* si et seulement si il est strictement inférieur à chacun de ses conjugués propres, c'est-à-dire, pour $i=2, \dots, n$, on a

$$x_1 \dots x_n < x_i \dots x_n x_1 \dots x_{i-1} \quad [10].$$

On sait, [2], que : *tout mot de $X^+$ se factorise de manière unique en une suite non croissante de mots de Lyndon*, c'est-à-dire, *que l'ensemble des mots de Lyndon forme une factorisation complète du monoïde libre* [12]. Nous avons montré, en outre, que cette factorisation s'obtient en temps linéaire en la longueur du mot [4].

La preuve s'obtient très facilement à partir des propriétés classiques des mots de Lyndon dans le cas particulier d'un mot $f$ « suffisamment long » par rapport à sa période c'est-à-dire $|f| \geqq 3\lambda$, où $\lambda$ est la plus petite période de $f$. $f$ est de la forme $f=(v)^k w$ avec $|v|=\lambda$, $k \geqq 3$, $v \in w X^*$. $\lambda$ étant la plus petite période de $f$, $v$ est un mot primitif, il admet donc un conjugué $v'' v'$, avec $v=v' v''$, qui est un mot de Lyndon d'où $f=v'(v'' v')^{k-1} v'' w$, or le mot $v'' v'$ étant un mot de Lyndon il n'admet pas de facteur gauche propre qui soit facteur droit et par conséquent la répétition élémentaire au point $(v' v'' v', (v'' v')^{k-2} v'' w)$ est exactement $v'' v'$, avec $|v'' v'| = |v| = \lambda$, le point en question est ainsi un point critique de $f$.

Dans le cas général nous obtiendrons le résultat annoncé comme conséquence d'un énoncé plus précis, à savoir :

DÉFINITION : On appelle *facteur résiduel* d'un mot $f \in X^+$ le plus long facteur droit de $f$ qui est de la forme $(uv)^k u$, satisfaisant $u \in X^*$, $v \in X^+$, $k > 0$ et $uv$ est un mot de Lyndon.

THÉORÈME : *Soient $f \in X^+$, $r$ le facteur résiduel de $f$, et, $g \in X^*$ le facteur gauche « complémentaire » tel que $f=gr$ :*

(*a*) *si $g$ n'est pas facteur de $r$, $(g, r)$ est un point critique de $f$;*

(*b*) *si $g$ est facteur de $r$, $(f', f'')$ est un point critique de $f$, où $f''$ est le facteur droit maximal de $r$ et $f'$ satisfait $f=f' f''$.*

Après quelques propriétés techniques des mots de Lyndon et des factorisations en mots de Lyndon, nous étudierons successivement le cas où $f$ est un mot de Lyndon (proposition 5) et le cas général où $f$ est un produit de mots de Lyndon.

## 1. RAPPELS

Rappelons que l'on considère un alphabet $X$ et $X^*$ le monoïde libre engendré par $X$. On dit qu'un facteur $g$ d'un mot $f \in X^+$ est un *facteur propre* ssi $g \neq f$ et

$g \neq 1$; on dit que c'est un *facteur strict* ssi $g \neq f$. On dit que deux mots $f$ et $g$ sont *conjugués* s'ils sont de la forme $f = h' h''$ et $g = h'' h'$, si de plus $h' \neq 1$ et $h'' \neq 1$ on dit qu'ils sont *conjugués propres*. Un mot qui n'est puissance stricte d'aucun autre mot de $X^*$ est dit *primitif*, il est alors différent de chacun de ses conjugués propres [8], de plus chaque conjugué est lui-même primitif.

Nous supposons l'alphabet $X$ totalement ordonné d'une manière quelconque par $<$ ; on définit alors l'ordre lexicographique sur $X^*$ par $f \leqq g$ si et seulement si l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

(1.1) $g \in f X^*$;

(1.2) $f$ est de la forme $hxh'$, $g$ de la forme $hyh''$ avec $x, y \in X$ et $x < y$.

Il en résulte immédiatement :

Proposition 1 : *Soient $f$, $g$, $h$ trois éléments de $X^*$ :*

(1) *si $f \leqq g \leqq h$ : le plus long facteur gauche commun à $f$ et $h$ est un facteur gauche de $g$;*

(2) *si $f$ n'est pas facteur gauche de $g$ et $f \leqq g$ : pour tout $v \in X^*$, on a $fv < g$.*

## 2. PROPRIÉTÉS DES MOTS DE LYNDON

On dit qu'un mot $f$ de $X^+$ est un *mot de Lyndon* [10] ou *mot lexicographique standard* [12] si, et seulement si, il satisfait l'une des trois propositions suivantes qui sont équivalentes :

(2.1) $f$ est un mot primitif et il est le plus petit de sa classe de conjugués;

(2.2) $f$ est strictement inférieur à chacun de ses conjugués propres;

(2.3) $f$ est strictement inférieur à chacun de ses facteurs droits propres.

Rappelons brièvement la preuve de l'équivalence.

Un mot primitif est différent de chacun de ses conjugués propres; il est immédiat que (2.1) et (2.2) sont équivalentes.

Soient $f'$ et $f''$ non vides tels que $f = f' f''$; $f'' < f'' f'$; il est clair que (2.3) implique (2.2).

Soient $f'$ et $f''$ non vides tels que $f = f' f''$, et supposons : $f'' \leqq f$ et $f < f'' f'$. Il en résulte, d'après la proposition 1, que $f''$ est un facteur gauche de $f$; posons $f = f'' h$; $f = f'' h < f'' f'$, d'où $h < f'$ et $hf'' < f' f'' = f$, ce qui contredit (2.2); et par suite (2.2) implique (2.3).

L'équivalence des propositions (2.1), (2.2), et (2.3) est établie.

Remarque 1 : Il s'en déduit que tout mot primitif admet un conjugué qui est un mot de Lyndon, puisque tout conjugué d'un mot primitif est un mot primitif.

PROPOSITION 2 : *Soit $f$ un mot de Lyndon :*

(1) *aucun facteur gauche propre de $f$ n'est facteur droit de $f$;*

(2) *si $h$ est un facteur de $f$ : ou bien $h$ est un facteur gauche de $f$, ou bien $f < h$.*

La preuve en est immédiate. □

LEMME 1 : *Le produit $fg$, de deux mots de Lyndon $f$ et $g$, est un mot de Lyndon si et seulement si $f < g$.*

*Preuve :* Si $f$ et $g$ sont deux mots de Lyndon ainsi que $fg$ : $f < fg < g$. Réciproquement, si $f < g$, $g$ n'est pas facteur gauche de $f$, et ne saurait être facteur gauche $fg$ sans que $g$ admette un facteur propre gauche et droit, ce qui contredirait la proposition 2 sur $g$, et par suite $fg < g$; soit $h$ un facteur droit propre de $fg$ : ou bien $h$ est un facteur droit de $g$ et $fg < g \leqq h$, ou bien $h$ est de la forme $h'g$ et $h'$ est un facteur droit propre de $f$ d'où $f < h'$ et d'après la proposition 1 $fg < h'g$; il en résulte que (2.3) est satisfaite : $fg$ est un mot de Lyndon. □

REMARQUE 2 : Plus généralement si $f$ et $g$ sont deux mots de Lyndon satisfaisant $f < g$; pour tout entier $k$ :

(*a*) $f^k g$ est un mot de Lyndon; de plus si $u$ est un facteur gauche non vide de $f^k$;

(*b*) $u < g$; et, si $u$ est facteur de $g$ : $u$ est un facteur gauche de $g$.

LEMME 2 : *Soit $f$ un mot de Lyndon et $s$ un facteur gauche de $f$, distinct de $f$; soit $x \in X$ :*

(*a*) *si $f < sx$ : pour tout entier $k$, $f^k sx$ est un mot de Lyndon;*

(*b*) *si $sx$ n'est pas facteur gauche de $f$ et $sx < f$ : pour tout entier non nul $k$, et pour tout $h \in X^*$, le plus long facteur gauche de $f^k sxh$ qui soit un mot de Lyndon est $f$.*

*Preuve :* Pour établir (*a*), il suffit de monter, d'après le lemme 1, que $sx$ est un mot de Lyndon. Posons $f = sv$ et considérons un facteur droit propre $hx$ de $sx$; $hv$ est un facteur droit propre de $sv$, d'où, $sv < hv < hx$, et par suite $s < hx$, or $|s| \geqq |hx|$ d'où $sx < hx$. Ce qui permet de conclure que $sx$ satisfait (2.3), c'est donc un mot de Lyndon.

Établissons (*b*) : Sachant que $sx$ n'est pas facteur gauche de $f$ et $sx < f$, pour tout $h$ : $sxh < f^k sxh$; le plus long facteur gauche de $f^k sxh$ qui soit un mot de Lyndon est un facteur gauche de $f^k s$, et d'après (2.3) ce ne peut-être que $f$. □

Du lemme 2, il se déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 3 : *Soit $u \in X^+$; si $u$ est facteur gauche d'un mot de Lyndon, $u$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = t^k s$ où $t$ est un mot de Lyndon, $k$ un entier non nul, et $s$ un facteur gauche distinct de $t$.*

*Preuve :* Il suffit de poser $t$, le plus long facteur gauche de $u$ qui soit un mot de Lyndon, et de choisir $k$ et $s$ tels que $t^k s$ soit le plus long facteur gauche de $u$ de cette forme, il résulte du lemme 2 que, sachant que $u$ est facteur gauche d'un mot de Lyndon et que $t$ est le plus long facteur gauche de $u$ qui est un mot de Lyndon, nécessairement $u = t^k s$. □

REMARQUE 3 : Soit $f$ et $g$ deux mots de Lyndon tels que $g < f$; soit $k$ un entier non nul et $s$ un facteur gauche strict de $f$ : $gf^k s$ est de la forme $f' \ s'$ où $f'$ est un mot de Lyndon et $s'$ un facteur gauche strict de $f'$.

*Preuve :* Il résulte du lemme 1 que $gf^{k+1}$ est un mot de Lyndon, et d'après la proposition 3 nous pouvons conclure. □

## 3. PROPRIÉTÉS DES FACTORISATIONS EN MOTS DE LYNDON

Rappelons le :

THÉORÈME DE CHEN FOX ET LYNDON : *Tout mot $f \in X^+$ se factorise de manière unique en une suite non croissante de mots de Lyndon*, c'est-à-dire, *qu'il existe une suite unique, $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_n$, de mots de Lyndon telle que $f = f_1 f_2 \ldots f_n$.*

Nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur.

*Preuve :* La proposition est vérifiée pour tout mot de longueur 1, supposons la vraie pour tout mot de longueur au plus $p$ et montrons qu'elle est vraie pour tout mot de longueur $p+1$.

Soit $f \in X^+$ tel que $|f| = p+1$; soit $h$ le plus long facteur droit de $f$ qui soit un mot de Lyndon et soit $g$ le facteur gauche complémentaire de $h$, tel que $f = gh$. D'après l'hypothèse de récurrence $g$ se factorise de manière unique en une suite non croissante de mots de Lyndon : $g = g_1 \ldots g_n$; $g_n h$ n'est pas un mot de Lyndon et d'après le lemme 1 il en résulte $g_n \geqq h$. Ce qui établit l'existence d'une factorisation de $f$ : $f = g_1 \ldots g_n h$.

Supposons l'existence d'une autre factorisation de $f$, $f = f_1 \ldots f_m$, en mots de Lyndon. Par choix de $h$ : $|h| \geqq |f_m|$; si nous supposons $|h| > |f_m|$ alors $h$ s'écrit $h = f'_j f_{j+1} \ldots f_m$ où $f'_j$ est un facteur droit non vide de $f_j$, il en résulte, puisque $h$ est un mot de Lyndon, que $f'_j < f_m$, et, puisque $f_j$ est un mot de Lyndon, que $f_j \leqq f'_j$, d'où $f_j < f_m$, ce qui est contradictoire; et par suite $|h| = |f_m|$ et $h = f_m$. Ce qui établit l'unicité de la factorisation.

La proposition est donc vraie au rang $p+1$. Ce qui achève la preuve. □

NOTATION : La factorisation d'un mot $f$ en mots de Lyndon est un élément de $(X^+)^*$ que nous noterons : $F(f) = (f_1) \ldots (f_n)$.

REMARQUE 4 : Si $F(f)=(f_1)\ldots(f_n)$ alors $f_1$ est le plus long facteur gauche de $f$ qui est un mot de Lyndon, $f_n$ est le plus long facteur droit de $f$ qui est un mot de Lyndon, et c'est le facteur droit de $f$ minimal dans l'ordre lexicographique.

Étant donné un mot $f$, soit $t^k s$ le plus long facteur droit de $f$ qui satisfasse : $k \geqq 1$, $t$ est un mot de Lyndon et $s$ un facteur gauche strict de $t$; on dit que $r=t^k s$ est le *facteur résiduel* de $f$; posons

$$f=gt^k s \qquad \text{et} \qquad F(g)=(g_1)\ldots(g_p), \qquad F(s)=(s_1)\ldots(s_q).$$

Les assertions suivantes sont satisfaites :

(3.1) $s_1 < t$;

(3.2) $g_p > t$;

(3.3) $F(f)=F(g)\,(t)^k\,F(s)$;

(3.4) pour tout $h\in X^*$ : $F(fh)=F(g)\,F(t^k sh)$.

*Preuve :* L'assertion (3.1) résulte immédiatement de la définition de $s$; $t^k s$ est le plus long facteur droit de $f$ qui est de cette forme et il résulte de la remarque 3 que $g_p > t$; (3.1) et (3.2) permettent de conclure à (3.3). De plus $g_p$ est un mot de Lyndon et $t^k s$ n'est pas un facteur gauche de $g$, on a donc pour tout $h\in X^*$, $g_p > t^k sh$, d'où il résulte (3.4). □

Il s'en déduit immédiatement :

PROPOSITION 4 : *Soit $f$ un élément de $X^+$, $r$ le facteur résiduel de $f$, et $g\in X^*$ tel que $f=gr$; pour tout $h\in X^*$ : $F(fh)=F(g)F(rh)$.*

## 4. POINT CRITIQUE D'UN MOT DE LYNDON

Considérons un mot de Lyndon $f$ de longueur $\geqq 2$; soit $f''$ le facteur droit maximal de $f$, et $f'$ tel que $f=f'f''$;

(4.1) Aucun facteur droit non vide de $f'$ n'est facteur gauche de $f''$.

*Preuve :* Soit $u\in X^*$ le plus long facteur droit de $f'$ qui soit facteur gauche de $f''$. Posons $f''=uv$, $uf''=uuv$ est un facteur droit de $f$, de même que $v$; $f''$ est le facteur droit maximal de $f$ d'où $uuv \leqq uv$ et $v \leqq uv$; il en résulte $uv \leqq v \leqq uv$ d'où $u=1$; ce qui permet de conclure. □

(4.2) Aucun facteur gauche non vide de $f'$ n'est facteur droit de $f''$.

*Preuve :* En effet $f$ est un mot de Lyndon et n'admet pas de facteur propre qui soit facteur gauche et facteur droit. □

(4.3) $f'$ n'est pas facteur de $f''$.

*Preuve :* Supposons que $f''$ est de la forme $f''=uf'\,v$, alors $f=f'\,uf'\,v$ est un mot de Lyndon et $f'\,uf'\,v<f'\,v$, d'où $uf'\,v<v$ ce qui est contradictoire puisque $f''=uf'\,v$ est le facteur droit maximal de $f$. □

(4.4) $f''$ n'est pas facteur de $f'$.

*Preuve :* Supposons $f'$ de la forme $f'=uf''\,v$, alors $f=uf''\,vf''$ et $f''<f''\,vf''$; ce qui est contradictoire puisque $f''$ est le facteur droit maximal de $f$. □

Des assertions 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, nous pouvons déduire la proposition suivante :

PROPOSITION 5 : *Soient $f$ un mot de Lyndon, $f''$ le facteur droit maximal de $f$, et $f'$ le facteur gauche de $f$ tel que $f=f'\,f''$ :*

(*a*) *$(f', f'')$ est un point critique de $f$;*

(*b*) *$(f'', f')$ est un point critique de $f''\,f'$.*

*Preuve :* D'après les propriétés, la répétition élémentaire en $(f', f'')$ est $f''\,f'$ et $|f''\,f'|=|f|$ est la plus petite période de $f$. De même $f'\,f''$ est la répétition élémentaire de $(f'', f')$ et $|f|$ est la plus petite période de $f''\,f'$. □

## 5. POINT CRITIQUE D'UN PRODUIT DE MOTS DE LYNDON

Considérons une suite non croissante de mots de Lyndon, $f_1, \ldots, f_p$, et, $t$ un mot de Lyndon strictement inférieur à $f_p$, $k$ un entier non nul, et $s$ un facteur gauche strict de $t$, satisfaisant : $t^k s$ n'est pas facteur gauche de $f_p$.

Notons $t''$ le facteur droit maximal de $t$ et posons $t'$ tel que $t$ : $t=t'\,t''$.

Les assertions suivantes sont satisfaites :

(5.1) $t^k\,s<f_p$;

(5.2) pour $i=1, \ldots, p$ : $t^k\,s$ n'est pas facteur gauche de $f_i$;

(5.3) pour $i=1, \ldots, p$ : $t^k\,s$ n'est pas facteur de $f_i$;

(5.4) $t^k s$ n'est pas facteur de $f_1 \ldots f_p$;

(5.5) aucun facteur gauche non vide de $t^k s$ n'est facteur droit de $f_1 \ldots f_p$;

(5.6) si $f_1 \ldots f_p$ est facteur de $t^k s$ : $f_1 \ldots f_p$ est facteur de $t$;

(5.7) si $f_1 \ldots f_p$ n'est pas facteur de $t$ : $(f_1 \ldots f_p, t^k s)$ est un point critique de $f_1 \ldots f_p\, t^k s$;

(5.8) si $f_1 \ldots f_p$ est facteur droit de $t$ : $(f_1 \ldots f_p t', t''\,t^{k-1} s)$ est un point critique de $f_1 \ldots f_p\, t^k s$;

(5.9) si $f_1 \ldots f_p$ est facteur de $t$, sans être facteur droit de $t$ : $t''$ n'est pas facteur de $f_1 \ldots f_p$;

(5.10) si $f_1 \ldots f_p$ est facteur de $t$, sans être facteur droit de $t$ : $(f_1 \ldots f_p t', t''\,t^{k-1}\,s)$ est un point critique de $f_1 \ldots f_p\, t^k s$.

*Preuve :* $t$ et $f_p$ étant deux mots de Lyndon satisfaisant $t < f_p$, il résulte de la remarque 2 (*b*) que l'assertion (5.1) est satisfaite.

Par hypothèse pour $i=1, \ldots, p, f_p \leqq f_i$, et d'après (5.1), $t^k s < f_p \leqq f_i$, $t^k s$ n'étant pas facteur gauche de $f_p$, la proposition 1 nous permet de conclure à (5.2).

Il s'en déduit d'après la proposition 2 (2) que l'assertion (5.3) est vérifiée.

D'après (5.3), si nous supposons que $t^k s$ est facteur de $f_1 \ldots f_p$, il en résulte qu'un facteur gauche de $t^k s$ est facteur droit de l'un des $f_i$ ce qui est impossible, sachant que $t^k s < f_i$ et que $f_i$ est un mot de Lyndon, il en résulte que (5.4) est vérifiée.

De la même façon nous pouvons conclure à (5.5).

L'assertion (5.6) se déduit alors immédiatement de (5.5).

Considérons la répétition élémentaire $u$ en $(f_1 \ldots f_p,\ t^k s)$, il résulte de l'assertion (5.5) que $u$ ne saurait être facteur droit de $f_1 \ldots f_p$ et facteur gauche de $t^k s$; il résulte de l'assertion (5.4) que $u$ ne saurait être facteur droit de $f_1 \ldots f_p$ et $t^k s$ facteur gauche de $u$. Il résulte alors de (5.6) que si $f_1 \ldots f_p$ n'est pas facteur de $t$, nécessairement $t^k s$ est un facteur gauche de $u$, par suite $|u|$ est une période de $f_1 \ldots f_p\ t^k s$, c'est la plus petite période, ce qui établit (5.7).

Si $f_1 \ldots f_p$ est un facteur droit de $t$, il est clair que $|t|$ est une période de $f_1 \ldots f_p t^k s$, et $t$ étant un mot de Lyndon il résulte de la proposition 5 que la répétition élémentaire en $(f_1 \ldots f_p\ t',\ t''\ t^{k-1}\ s)$ est $t''\ t'$, ce qui permet de conclure à l'assertion (5.8).

Supposons que $t$ est de la forme $at''b$, sachant que $t''$ est le facteur droit maximal de $t$, nous avons nécessairement $b=1$, d'où il résulte que l'assertion (5.9) est vérifiée.

Supposons que $f_1 \ldots f_p$ est facteur de $t$ sans être facteur droit et soit $u$ la répétition élémentaire en $(f_1 \ldots f_p\ t',\ t''\ t^{k-1}\ s)$: $t$ est un mot de Lyndon et $t''$ le facteur droit maximal de $t$, il résulte de la proposition 5 que $u$ est de la forme $u=t''\ vt'$, et de l'assertion (5.9) que $v$ est non vide et que $f_1 \ldots f_p\ t'$ est un facteur droit de $t''\ vt'$. De plus les hypothèses de (5.10) impliquent que $|f| \geqq 2$ et par suite $t' \neq 1$, or $t$ est un mot de Lyndon et $(t', t'')$ un point critique de $t$, il en résulte que $vt'$ ne saurait être facteur gauche de $t^{k-1}\ s$ sans que $v$ soit une puissance de $t$, et il s'en déduirait que $f_1 \ldots f_p$ est un facteur droit de $v$ et par suite de $t$ ce qui contredirait l'hypothèse : par conséquent $t''\ vt'$ n'est pas un facteur gauche de $t''\ t^{k-1}\ s$ et il en résulte que $t''\ t^{k-1}\ s$ est un facteur gauche de $t''\ vt'.f_1 \ldots f_p\ t'$ est un facteur droit de $u=t''\ vt'$, et $t''\ t^{k-1}\ s$ est un facteur gauche. $|u|$ est la plus petite période de $f_1 \ldots f_p t^k s$ et $(f_1 \ldots f_p\ t',\ t''\ r^{k-1}\ s)$ un point critique ce qui établit (5.10), et achève la preuve des assertions (5.1) à (5.10). □

*Fin de la démonstration du théorème :* Soient $f \in X^+$, $r = t^k s$ le facteur résiduel de $f$, et $g \in X^+$ tel que $f = gr$. Posons $F(g) = (f_1) \ldots (f_p)$. Il résulte de l'assertion (3.2) que $f_1 \geqq \ldots \geqq f_p > t$.

Si $g$ n'est pas facteur de $r$ l'assertion (5.7) nous permet de conclure que $(g, r)$ est un point critique de $f$, ce qui établit ($a$).

Notons $f''$ le facteur droit maximal de $t^k\, s$ et $t''$ le facteur droit maximal de $t$, et posons $f = f'f''$, $t = t'\, t''$, nécessairement $f'' = t''\, t^{k-1}\, s$ et par conséquent si $g$ est facteur de $r$, il résulte de l'assertion (5.6) que $g$ est facteur de $t$, et des assertions (5.8) et (5.10) que $(f', f'')$ est un point critique de $f$ ce qui établit ($b$), et achève la preuve du théorème.

## BIBLIOGRAPHIE


1. Y. CESARI et M. VINCENT, *Une caractérisation des mots périodiques, C. R. Acad. Sc.*, t. 286, série A, 1978, p. 1175.
2. K. T. CHEN, R. H. FOX et R. C. LYNDON, *Free Differential Calculus IV*, *Ann. Math.*, vol. 68, 1958, p. 81-95.
3. J. P. DUVAL, *Sur la périodicité des mots*, Thèse de 3e cycle, Université de Rouen, 1978.
4. J. P. DUVAL, *Algorithme de factorisation d'un mot en mots de Lyndon*, Actes du premier colloque A.F.C.E.T.-S.M.F. de Math. appliquées, t. II, 1978, p. 15-26.
5. J. P. DUVAL, *Périodes et répétitions des mots du monoïde libre*, Theoretical Computer Sciences, vol. 9, 1979, p. 17-26.
6. M. J. FINE et H. S. WILF, *Uniqueness Theorems for Periodic Functions*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 16, 1965, p. 109-114.
7. D. E. KNUTH, J. H. MORRIS et V. R. PRATT, *Fast Pattern Matching in Strings*, S.I.A. M.J. Comput., vol. 6, (2), 1977, p. 321-349.
8. A. LENTIN, *Équations dans le monoïde libre*, Gauthier-Villars et Mouton, Paris-La Haye, 1972.
9. R. C. LYNDON et P. E. SCHUPP, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 1977.
10. M. P. SCHUTZENBERGER, *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisés dans un problème de Mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreil-Pisot, 1958/1959, Institut Henri-Poincaré, Paris, 1958.
11. M. P. SCHUTZENBERGER, *A Property of Finitely Generated Submonoïds*, *in* Algebraic Theory of Semi-Groups, G. POLLAK, éd., North Holland, 1979, p. 545-576.
12. G. VIENNOT, *Bases des algèbres de Lie libres et factorisation des monoïdes libres*, Lecture Notes in Mathematics, n° 691, Springer-Verlag, 1979.