

A. ARNOLD

M. DAUCHET

Théorie des magmoïdes

RAIRO. Informatique théorique, tome 13, n° 2 (1979), p. 135-154

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1979__13_2_135_0

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES MAGMOÏDES (II) (*)

A. ARNOLD ⁽¹⁾ et M. DAUCHET ⁽²⁾

Communiqué par M. NIVAT

Résumé. — Les principales opérations appliquées aux arbres, telles que la substitution, sont décrites de façon axiomatique en définissant la structure algébrique de magmoïde. Les arbres eux-mêmes peuvent alors être définis comme les éléments d'un magmoïde libre. Il devient donc possible de traiter de façon plus algébrique la théorie des langages d'arbres. Nous donnons ici un exposé formel des éléments de base de cette théorie ainsi qu'un exemple d'application (2^e partie).

Abstract. — The main operations applied to trees, such as substitution, are axiomatically described by defining the algebraic structure of magmoïd. Trees themselves can be defined then as elements of a free magmoïd. Thus it is possible to deal with tree languages theory in a more algebraic way. We give here a formal presentation of basic elements of this theory and also an example of application.

AVERTISSEMENT

Nous donnons ici la seconde partie de l'article « Théorie des magmoïdes » dont la première partie a paru dans cette même revue (vol. 12, 1978, p. 235-257). Les références bibliographiques de numéro inférieur ou égal à 26 sont données dans cette première partie.

CHAPITRE III

LES K-MORPHISMES DE MAGMOÏDES

Pour pouvoir traiter certains problèmes de la théorie classique des arbres [3], nous avons eu besoin de considérer des « homomorphismes » qui à un arbre faisaient correspondre un k -uplé d'arbres. Goguen et Thatcher [14] ont également fait remarquer que de tels homomorphismes permettaient de décrire simplement certains transducteurs. Dans le cadre des magmoïdes, cela revient à

(*) Reçu août 1978.

⁽¹⁾ Université de Poitiers, Laboratoire d'Informatique, Bâtiment de Mathématiques, Poitiers.

⁽²⁾ Université de Lille-I, U.E.R.-I.E.E.A. Informatique, Villeneuve-d'Ascq.

considérer des morphismes qui, au lieu de conserver la fibration, la *k-dilataent* i. e. $M_q^p \subset M_{kq}^{kp}$.

1. Définitions et propriétés

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, nous appellerons *k-morphisme* d'un magmoïde M dans un magmoïde M' toute application φ de M dans M' qui vérifie :

$$K1 : \forall p \geq 0, \forall q \geq 0, \varphi(M_q^p) \subset M_{kq}^{kp};$$

$$K2 : \forall p \geq 0, \varphi(e_p) = e'_{kp}, \text{ où les } e_i \text{ et } e'_j \text{ sont les éléments neutres de } M \text{ et } M';$$

$$K3 : \forall u \in M_q^p, u' \in M_r^q, \varphi(u \cdot u') = \varphi(u) \cdot \varphi(u');$$

$$K4 : \forall u \in M_q^p, u' \in M_{q'}^{p'}, \varphi(u \otimes u') = \varphi(u) \otimes \varphi(u').$$

La propriété K1 exprime que φ *k-dilate* les fibres et K2 indique que l'image d'un élément neutre est encore un élément neutre. K2 et K3 expriment que φ est compatible avec les produits. A ce propos il est immédiat que si $u \cdot u'$ est défini, K2 assure que $\varphi(u) \cdot \varphi(u')$ l'est aussi.

Dans le cas où $k = 1$, on retrouve bien la définition des morphismes donnée au chapitre I. Le cas $k = 0$ ne présente pratiquement aucun intérêt puisque l'image de M par un 0-morphisme de M dans M' se réduit à l'élément e'_0 unique élément de M'^0_0 .

Il est également clair que le composé d'un *k-morphisme* et d'un *k'-morphisme* est un *k.k'-morphisme*.

A partir de maintenant, nous appellerons *morphisme* toute application φ tel qu'il existe un entier *k strictement positif* tel que φ est un *k-morphisme*. Les morphismes définis précédemment seront donc désormais appelés *1-morphismes*.

A tout entier k et tout magmoïde $\langle M, \cdot, \otimes, e, e_0 \rangle$, nous associons le magmoïde $\langle k\text{-dil}(M), \cdot, \otimes, e', e'_0 \rangle$ défini par

$$k\text{-dil}(M_q^p) = M_{kq}^{kp};$$

$$e'_0 = e_0;$$

$$e' = e_k.$$

On en déduit que $e'_p = e' \otimes \dots \otimes e' = e_k \otimes \dots \otimes e_k$. Il est clair que $k\text{-dil}(M)$ est encore un magmoïde. D'autre part, du point de vue ensembliste, $k\text{-dil}(M)$ est une partie de M ; l'injection canonique de $k\text{-dil}(M)$ dans M , notée i_k est un *k-morphisme* de $k\text{-dil}(M)$ dans M . En effet :

$$(i) \ i_k \text{ k-dilate la fibration puisque pour tout } u \in k\text{-dil}(M_q^p) \ i_k(u) = u \in M_{kq}^{kp};$$

$$(ii) \ i_k(e'_0) = e'_0 = e_0 \text{ et } i_k(e') = e' = e_k;$$

$$(iii) \ i_k(u \cdot u') = i_k(u) \cdot i_k(u') = u \cdot u';$$

$$(iv) \ i_k(u \otimes u') = i_k(u) \otimes i_k(u') = u \otimes u'.$$

La proposition suivante montre qu'à beaucoup de points de vue, l'étude des morphismes se ramène aisément à celle des *1-morphismes*.

PROPOSITION 12 : Si φ est un k -morphisme de M dans M' , il existe un et un seul 1-morphisme φ' de M dans $k\text{-dil}(M')$ tel que $\varphi = i_k \circ \varphi'$.

Démonstration : Soit φ un k -morphisme de M dans M' . Pour tout élément u de M'_q , $\varphi(u)$ est un élément de $M'^{k_p}_{k_q}$, donc un élément de $k\text{-dil}(M')^p_q$. Ceci permet de définir une application φ' de M dans $k\text{-dil} M'$ et on a bien $\varphi = i_k \circ \varphi'$. D'autre part φ' est bien un 1-morphisme. Cette décomposition est bien unique puisque i_k est injective. \square

Cette proposition permet en particulier de montrer que $\tilde{T}(\Sigma)$ est encore libre quand on ne considère plus seulement les 1-morphismes, mais aussi tous les k -morphismes.

THÉORÈME 3 : Soit Σ un alphabet gradué et φ une application k -dilatante de Σ dans un magmoïde M (i. e. $\varphi(\Sigma_p) \subset M^k_{kp}$). Alors il existe un et un seul k -morphisme φ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M qui étend φ .

Démonstration : On démontre d'abord de la même façon que pour la proposition précédente qu'il existe une et une seule application 1-dilatante φ' de Σ dans $k\text{-dil}(M)$ telle que $\varphi = i_k \circ \varphi'$. Comme $\tilde{T}(\Sigma)$ est libre, il existe un 1-morphisme $\bar{\varphi}'$ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $k\text{-dil}(M)$ tel que sa restriction à Σ coïncide avec φ' . $\bar{\varphi} = i_k \circ \bar{\varphi}'$ est alors un k -morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M dont la restriction à Σ coïncide avec $i_k \circ \varphi' = \varphi$. Cette extension $\bar{\varphi}$ est unique, car s'il en existait une autre ψ , d'après la proposition 12 on aurait $\psi = i_k \circ \psi'$, où ψ' est un 1-morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $k\text{-dil}(M)$; mais comme la restriction de ψ à Σ est égale à φ , la restriction de ψ' à Σ est égale à φ' d'où $\psi' = \bar{\varphi}'$ puisque $\bar{\varphi}'$ est l'unique extension homomorphe de Σ à $\tilde{T}(\Sigma)$. \square

Exemple 7 : Soit $\Sigma = \{ +, \times, a, b \}$ avec $d(+)=d(\times)=2$ et $d(a)=d(b)=0$; soit $\Delta = \{ +, \times, -, a_1, a_2, b_1, b_2 \}$ avec $d(+)=d(\times)=d(-)=2$ et $d(a_1)=d(a_2)=d(b_1)=d(b_2)=0$.

Considérons l'application 2-dilatante φ de Σ dans le magmoïde $T(\Delta)$ définie par

$$\varphi(+)=\langle 4; +(x_1, x_3), +(x_2, x_4) \rangle \in T(\Delta)_4^2,$$

$$\varphi(\times)=\langle 4; -(\times(x_1, x_3), \times(x_2, x_4)), +(\times(x_1, x_4), \times(x_2, x_3)) \rangle \in T(\Delta)_4^2,$$

$$\varphi(a)=\langle 0; a_1, a_2 \rangle \in T(\Delta)_0^2; \varphi(b)=\langle 0; b_1, b_2 \rangle \in T(\Delta)_0^2.$$

Calculons l'image par φ de $u = \langle 1; \times(+ (a, x_1), b) \rangle \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1$. Remarquons d'abord que $u = \times . ((+ . (a \otimes \text{Id}_1)) \otimes b)$ d'où

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(\times) . ((\varphi(+)) . (\varphi(a) \otimes \varphi(\text{Id}_1))) \otimes \varphi(b) \\ &= \varphi(\times) . ((\varphi(+)) . (\langle 0; a_1, a_2 \rangle \otimes \text{Id}_2)) \otimes \langle 0; b_1, b_2 \rangle \\ &= \varphi(\times) . (\langle \langle 4; +(x_1, x_3), +(x_2, x_4) \rangle . \langle 2, a_1, a_2, x_1, x_2 \rangle \rangle \otimes \langle 0; b_1, b_2 \rangle) \\ &= \varphi(\times) . (\langle \langle 2; +(a_1, x_1), +(a_2, x_2) \rangle \otimes \langle 0; b_1, b_2 \rangle \rangle) \\ &= \langle 4; -(\times(x_1, x_3), \times(x_2, x_4)), +(\times(x_1, x_4), \times(x_2, x_3)) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle 2; +(a_1, x_1), +(a_2, x_2), b_1, b_2 \rangle \\ &= \langle 2; -(\times (+ (a_1, x_1), b_1), \times (+ (a_2, x_2), b_2)), \\ &\quad + (\times (+ (a_1, x_1), b_2), \times (+ (a_2, x_2), b_1)) \rangle \in T(\Delta)_2^2 \end{aligned}$$

Intuitivement, on peut interpréter cet exemple de la façon suivante : les symboles de Σ sont l'addition et la multiplication complexes et deux nombres complexes; ceux de Δ sont l'addition, la soustraction et la multiplication réelle et quatre nombres réels. Le 2-morphisme φ peut être alors considéré comme une interprétation de \mathbf{C} dans \mathbf{R}^2 en ce sens qu'à a et b sont associés les couples $\langle a_1, a_2 \rangle$ et $\langle b_1, b_2 \rangle$ qui sont formés des parties réelles et parties imaginaires (i. e. $a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2$) et que l'image par φ des opérations complexes permet de calculer les parties réelle et imaginaire du résultat en fonction des parties réelles et imaginaires des arguments. Ainsi, en posant $x_1 = x_1 + ix_2, x_2 = x_3 + ix_4, x_1 + x_2$ devient $(x_1 + x_3) + i(x_2 + x_4)$.

2. Morphismes de magmoïdes projetables

Lorsque M et M' sont deux magmoïdes projetables, on a vu au chapitre précédent que si φ est un 1-morphisme de M dans M' l'image par φ des torsions de M est parfaitement définie. Nous allons maintenant examiner l'image des torsions de M par un morphisme quelconque.

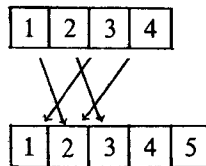
Pour tout entier k positif, nous considérons l'application v_k de Θ dans Θ définie comme suit. Rappelons que tout entier de $[kp]$ s'écrit de façon unique $k(i - 1) + j$ avec $i \in [p]$ et $j \in [k]$. Si $\theta \in \Theta_q^p$ alors $v_k(\theta)$ est l'application de Θ_{kq}^{kp} définie par

$$v_k(\theta)(k(i - 1) + j) = k(\theta(i) - 1) + j.$$

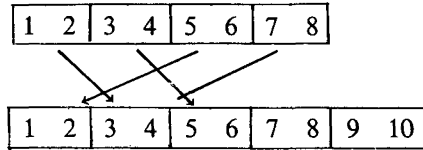
Intuitivement $v_k(\theta)$ est la même application que θ , mais qui opère sur des suites de k entiers consécutifs. Ainsi l'application

$$\begin{aligned} \theta : [4] &\rightarrow [5], \\ 1 &\rightarrow 2, \\ 2 &\rightarrow 3, \\ 3 &\rightarrow 1, \\ 4 &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

peut se représenter par



Alors $v_2(\theta) : [8] \rightarrow [10]$ sera représentée par



c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 v_2(\theta) : 1 &\rightarrow 3, \\
 &2 \rightarrow 4, \\
 &3 \rightarrow 5, \\
 &4 \rightarrow 6, \\
 &5 \rightarrow 1, \\
 &6 \rightarrow 2, \\
 &7 \rightarrow 3, \\
 &8 \rightarrow 4.
 \end{aligned}$$

En particulier, si $p=0$, i. e. si $\theta = O_q$ alors $v_k(\theta) = O_{kq}$; si $\theta = Id_p$, $v_k(\theta) = Id_{kp}$.

Cette application v_k est un k -morphisme. En effet par définition elle k -dilata les fibres et $v_k(Id_p) = Id_{kp}$.

D'autre part $v_k(\theta \cdot \theta') = v_k(\theta) \cdot v_k(\theta')$.

En effet

$$\begin{aligned}
 v_k(\theta) \cdot v_k(\theta')(k(i-1)+j) &= v_k(\theta')(v_k(\theta)(k(i-1)+j)) \\
 &= v_k(\theta')(k(\theta(i)-1)+j) = k(\theta'(\theta(i)-1)+j) \\
 &= k(\theta \cdot \theta'(i)-1)+j = v_k(\theta \cdot \theta').
 \end{aligned}$$

Enfin $v_k(\theta \otimes \theta') = v_k(\theta) \otimes v_k(\theta')$. En effet, si $\theta \in \Theta_q^p$ et $\theta' \in \Theta_{q'}^{p'}$, alors

$$\begin{aligned}
 v_k(\theta \otimes \theta')(k(i-1)+j) \\
 = k(\theta \otimes \theta'(i)-1)+j = \begin{cases} k(\theta(i)-1)+j & \text{si } i \leq p, \\ k(q+\theta'(i-p)-1)+j & \text{si } p < i \leq p+p' \end{cases}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 v_k(\theta) \otimes v_k(\theta') &= \begin{cases} v_k(\theta)(k(i-1)+j) & \text{si } k(i-1)+j \leq kp \\ kq + v_k(\theta)(k(i-1)+j-kp) & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} k(\theta(i)-1)+j & \text{si } i \leq p, \\ kq + k(\theta'(p-i)-1)+j & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

De plus cette application v_k est injective. D'après la proposition 12 il existe donc un 1-morphisme injectif v'_k de Θ dans $k\text{-dil}(\Theta)$ tel que $v_k = i_k \circ v'_k$. On en déduit que $v'_k(\Theta)$ est un sous-magmoïde $k\text{-dil}(\Theta)$.

PROPOSITION 13 : *Pour tout entier k , v_k est le seul k -morphisme de Θ dans Θ .*

Démonstration : Soit ψ un k -morphisme de Θ dans Θ . On montre que $\forall \theta \in \Theta$, $\psi(\theta) = v_k(\theta)$.

- Si $\theta = O_q \in \Theta_q^0$ alors $\psi(\theta) \in \Theta_{kq}^0$. Or l'unique élément de Θ_{kq}^0 est $O_{kq} = v_k(O_q)$.
- Si $\theta = \text{Id}_1 \in \Theta_1^1$ alors $\psi(\theta) = \text{Id}_k = v_k(\theta)$.
- Si $\theta = \Pi_p^i \in \Theta_p^1$ alors $\theta = O_{i-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{p-i}$ et

$$\psi(\theta) = \psi(O_{i-1}) \otimes \psi(\text{Id}_1) \otimes \psi(O_{p-i}) = v_k(O_{i-1}) \cdot v_k(\text{Id}_1) \cdot v_k(O_{p-i}) = v_k(\Pi_p^i).$$

- Si $\theta \in \Theta_q^p$ avec $p \geq 2$ alors pour tout entier $l = k(i-1) + j \in [kp]$:

$$\begin{aligned} \Pi_{kp}^l &= O_{k(i-1)} \otimes O_{j-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{k-j} \otimes O_{k(p-i)} \\ &= \Pi_k^j \cdot (O_{k(i-1)} \otimes \text{Id}_k \otimes O_{k(p-i)}) = \Pi_k^j \cdot v_k(\Pi_p^i) = \Pi_k^j \cdot \psi(\Pi_p^i), \end{aligned}$$

d'où

$$\Pi_{kp}^l \cdot \psi(\theta) = \Pi_k^j \cdot \psi(\Pi_p^i) \cdot \psi(\theta) = \Pi_k^j \cdot \psi(\Pi_q^{\theta(i)})$$

et

$$\Pi_{kp}^l \cdot v_k(\theta) = \Pi_k^j \cdot v_k(\Pi_p^i) \cdot v_k(\theta) = \Pi_k^j \cdot v_k(\Pi_q^{\theta(i)}) = \Pi_k^j \cdot \psi(\Pi_q^{\theta(i)}).$$

On en déduit, puisque Θ est projetable, que $\psi(\theta) = v_k(\theta)$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 14 : *Pour tout entier k , il existe un seul 1-morphisme de Θ dans $k\text{-dil}(\Theta)$. De plus ce 1-morphisme est injectif.*

Démonstration : S'il existait deux 1-morphismes φ_1 et φ_2 distincts de Θ dans $k\text{-dil}(\Theta)$, $i_k \circ \varphi_1$ et $i_k \circ \varphi_2$ seraient deux k -morphismes distincts de Θ dans Θ .

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 15 : *Soient M et M' deux magmoïdes projetables et φ et ψ deux k -morphismes de M dans M' . Alors φ et ψ coïncident sur les torsions de M .*

Démonstration : Soit μ l'isomorphisme entre Θ et $\Theta(M)$ et μ' l'isomorphisme entre Θ et $\Theta(M')$. $\mu'^{-1} \circ \varphi \circ \mu$ et $\mu'^{-1} \circ \psi \circ \mu$ sont donc deux k -morphismes de Θ dans Θ ; ils sont donc égaux à v_k d'après la proposition 3.4, d'où sur $\Theta(M)$, $\varphi = \psi = \mu \circ v_k \circ \mu^{-1}$.

C.Q.F.D.

Il en découle en particulier que l'image dans un magmoïde projetable M' par un k -morphisme des torsions d'un magmoïde projetable M s'identifie à l'image par un k -morphisme du magmoïde Θ ; et, comme il existe un seul k -morphisme de Θ dans un magmoïde projetable, de même que nous identifions Θ et $\Theta(M)$, nous identifierons cette image à $v_k(\Theta)$.

PROPOSITION 16 : *Pour tout magmoïde projetable M et tout entier $k > 0$, k -dil M est un magmoïde projetable.*

Démonstration : Soit μ l'isomorphisme entre Θ et $\Theta(M)$. Alors $\mu \circ v_k$ est un k -morphisme de Θ dans M . Il existe donc un 1-morphisme λ de Θ dans k -dil(M), tel que $\mu \circ v_k = i_k \circ \lambda$. Comme μ , v_k et i_k sont injectifs, λ est aussi injectif et $\lambda(\Theta)$ est un sous-magmoïde de k -dil(M) isomorphe à Θ . Pour que k -dil(M) soit projetable, il faut donc que si u et $u' \in k$ -dil(M) $_q^p$ et si $\forall i \leq p$, $\lambda(\Pi_p^i) \cdot u = \lambda(\Pi_p^i) \cdot u'$ alors $u = u'$. Or si $\lambda(\Pi_p^i) \cdot u = \lambda(\Pi_p^i) \cdot u'$, alors

$$i_k(\lambda(\Pi_p^i) \cdot u) = i_k(\lambda(\Pi_p^i) \cdot u') = \mu(v_k(\Pi_p^i)) \cdot u = \mu(v_k(\Pi_p^i)) \cdot u',$$

ou encore en identifiant comme d'habitude θ et $\mu(\theta)$, $v_k(\Pi_p^i) \cdot u = v_k(\Pi_p^i) \cdot u'$ et donc $\forall j \leq k$, $\Pi_k^j \cdot v_k(\Pi_p^i) \cdot u = \Pi_k^j \cdot v_k(\Pi_p^i) \cdot u'$, or $\Pi_k^j \cdot v_k(\Pi_p^i) = \Pi_{kp}^{k(i-1)+j}$, puisque $v_k(\Pi_p^i)$ est l'application de $[k]$ dans $[kp]$ qui à j associe $k(i-1) + j$, d'où $\forall i \leq p$, $\forall j \leq k$, $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j} \cdot u = \Pi_{kp}^{k(i-1)+j} \cdot u'$ et donc $\forall l \leq kp$, $\Pi_{kp}^l \cdot u = \Pi_{kp}^l \cdot u'$. Comme M est projetable, u et u' sont égaux en tant qu'éléments de M et donc aussi en tant qu'éléments de k -dil(M). \square

THÉORÈME 4 : *Toute application k -dilatante φ d'un alphabet gradué Σ dans un magmoïde projetable M s'étend de façon unique en un k -morphisme $\hat{\varphi}$ de $T(\Sigma)$ dans M .*

Démonstration : L'application φ se décompose de manière unique en une application 1-dilatante φ' de Σ dans k -dil(M) et l'injection canonique i_k de k -dil(M) dans M . Comme k -dil(M) est projetable, φ' s'étend de façon unique en un 1-morphisme $\hat{\varphi}'$ de $T(\Sigma)$ dans k -dil(M) et $i_k \circ \hat{\varphi}'$ est un k -morphisme de $T(\Sigma)$ dans M qui étend $i_k \circ \varphi' = \varphi$. L'unicité de cette extension $\hat{\varphi}$ découle de l'unicité de $\hat{\varphi}'$ et de l'unicité de la factorisation par i_k . \square

CHAPITRE IV

LES MAGMOÏDES DE PARTIES

De même que l'ensemble des parties d'un monoïde est classiquement muni d'une structure de monoïde nous pouvons munir l'ensemble des parties d'un

magmoïde d'une structure de magmoïde de façon à former un magmoïde de parties. Dans le cas du magmoïde projetable libre $T(\Sigma)$ nous pouvons construire deux magmoïdes de parties différents. Dans l'un de ces magmoïdes de parties le produit de composition est la « greffe complète » de Boudol [5], appelée « *OI*-substitution » par Engelfriet et Schmidt [13]; dans l'autre ce produit de composition est la « greffe restreinte », ou « *IO*-substitution ».

1. Le magmoïde additif des parties

Soit M un magmoïde quelconque. Nous définissons le magmoïde $P_A(M)$ de la façon suivante :

- $P_A(M)_q^p = \mathcal{P}(M_q^p)$;
- si $U \in P_A(M)_q^p$ et $V \in P_A(M)_q^p$ alors $U.V = \{u.v/u \in U, v \in V\}$;
- si $U \in P_A(M)_q^p$ et $V \in P_A(M)_{q'}^{p'}$ alors $U \otimes V = \{u \otimes v/u \in U, v \in V\}$.

Il est alors facile de montrer que $P_A(M)$ est bien un magmoïde dont les éléments neutres sont les éléments $\{e_p\}$, où e_p est l'élément neutre de M_q^p . Il est clair aussi que l'injection canonique de M dans $P_A(M)$ qui à u associe $\{u\}$ est un 1-morphisme de magmoïde et donc que M peut être considéré comme un sous-magmoïde de $P_A(M)$.

Ce magmoïde a également la propriété suivante, qui justifie son qualificatif d'additif.

PROPOSITION 17 : *Soit M un magmoïde quelconque. Pour U, U_1, U_2, V, V_1, V_2 appartenant aux fibres adéquates, les égalités suivantes sont vraies :*

$$\begin{aligned}(U_1 \cup U_2).V &= (U_1.V) \cup (U_2.V), \\ U.(V_1 \cup V_2) &= (U.V_1) \cup (U.V_2), \\ (U_1 \cup U_2) \otimes V &= (U_1 \otimes V) \cup (U_2 \otimes V), \\ U \otimes (V_1 \cup V_2) &= (U \otimes V_1) \cup (U \otimes V_2).\end{aligned}$$

Enfin le magmoïde $P_A(M)$ n'est jamais projetable; la raison en est que $P_A(M)_0^0$ contient toujours au moins deux éléments $\{e_0\}$ et \emptyset , ce qui contredit l'axiome des projections.

Exemple 8 : Soit un alphabet gradué Σ tel que Σ_0 contienne au moins deux éléments a et b . Si le magmoïde $P_A(T(\Sigma))$ est projetable son magmoïde de torsions est celui de $T(\Sigma)$. Considérons alors

$$A = \{a \otimes b, b \otimes a\} \in P_A(T(\Sigma))_0^2$$

et

$$B = A \cup \{a \otimes a, b \otimes b\} \in P_A(T(\Sigma))_0^2.$$

Par définition du produit de composition dans $P_A(T(\Sigma))$, nous avons

$$\begin{aligned} \pi_2^1 . A &= \pi_2^1 . B = \{a, b\}, \\ \pi_2^2 . A &= \pi_2^2 . B = \{a, b\} \end{aligned}$$

et comme $A \neq B$, $P_A(T(\Sigma))$ n'est pas projectable.

2. Le magmoïde projectable $P(T(\Sigma))$

Il est possible de construire à partir de $T(\Sigma)$ (où à partir de magmoïdes projectables ayant des propriétés voisines de celles de $T(\Sigma)$, cf. [2]) un autre magmoïde de parties, qui, à la différence de $P_A(T(\Sigma))$ sera projectable.

Nous posons $P(T(\Sigma))_q^p = [\mathcal{P}(T(\Sigma)_q^1)]^p$. Tout élément U de $P(T(\Sigma))_q^p$ s'écrit donc $\langle U_1, \dots, U_p \rangle$ avec $U_i \subset T(\Sigma)_q^1$.

Sur $P(T(\Sigma))$ nous définissons le *produit de composition* de la façon suivante : soit $V = \langle V_1, \dots, V_q \rangle \in P(T(\Sigma))_q^p$:

(i) soit $t \in T(\Sigma)_q^1$. D'après la proposition 5, t s'écrit de façon unique $\tilde{t} . \theta$ avec $\tilde{t} \in \tilde{T}(\Sigma)_p^1$ et $\theta \in \Theta_q^p$. Nous posons alors $t . V = \{ \tilde{t} . [v_1, \dots, v_p] / \forall i \in [p], v_i \in V_{\theta(i)} \}$. Nous avons donc $t . V \subset T(\Sigma)_r^1$;

(ii) pour U inclus dans $T(\Sigma)_q^1$, nous posons $U . V = \bigcup_{t \in U} t . V$ qui est inclus dans $T(\Sigma)_r^1$;

(iii) pour $U = \langle U_1, \dots, U_p \rangle \in P(T(\Sigma))_q^p$ nous posons

$$U . V = \langle U_1 . V, \dots, U_p . V \rangle$$

qui appartient à $P(T(\Sigma))_r^p$ puisque chacun des $U_i . V$ est inclus dans $T(\Sigma)_r^1$.

Exemple 9 : Soit Σ un alphabet gradué qui contient le symbole f de arité 2 et les symboles a et b de arité 0. Soient $A = \langle \{a, b\} \rangle \in P(T(\Sigma))_0^0$ et $u = \langle 1; f(x_1, x_1) \rangle \in T(\Sigma)_1^1$. Cet élément u s'écrit $f . \theta$, où θ est l'application de [2] dans [1]. Par définition

$$u . A = \{ f . [v_1, v_2] / v_1 \in \{a, b\}, v_2 \in \{a, b\} \} = \{ f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b) \}.$$

Remarquons que $\{u\}$ est un élément de $P_A(T(\Sigma))_1^1$ et que $\{a, b\}$ est un élément de $P_A(T(\Sigma))_0^0$. Mais d'après la définition du produit de composition dans ce magmoïde $\{u\} . \{a, b\} = \{u . a, u . b\} = \{f(a, a), f(b, b)\}$.

Nous retrouvons donc bien la différence entre la greffe complète et la greffe restreinte.

L'associativité de ce produit de composition est une conséquence immédiate de l'associativité de la greffe complète, ou *OI*-substitution, démontrée par Boudol [5] et Engelfriet et Schmidt [13].

Le *produit tensoriel* est défini par : si

$$U = \langle U_1, \dots, U_p \rangle \in P(T(\Sigma))_q^p \quad \text{et} \quad V = \langle V_1, \dots, V_{p'} \rangle \in P(T(\Sigma))_{q'}^{p'},$$

alors

$$U \otimes V = \langle U_1 \cdot D_1, \dots, U_p \cdot D_1, V_1 \cdot D_2, \dots, V_{p'} \cdot D_2 \rangle,$$

où

$$D_1 = \langle \{\pi_{q+q'}^1\}, \dots, \{\pi_{q+q'}^q\} \rangle \in P(T(\Sigma))_{q+q'}^q$$

et

$$D_2 = \langle \{\pi_{q+q'}^{q+1}\}, \dots, \{\pi_{q+q'}^{q+q'}\} \rangle \in P(T(\Sigma))_{q+q'}^{q'}$$

Nous avons

$$U_i \cdot D_1 \subset T(\Sigma)_{q+q'}^1 \quad \text{et} \quad V_j \cdot D_2 \subset T(\Sigma)_{q+q'}^1,$$

d'où $U \otimes V \in P(T(\Sigma))_{q+q'}^{p+p'}$.

L'associativité de ce produit tensoriel se vérifie aisément. Il est alors facile de montrer que $P(T(\Sigma))$, muni de ces deux produits est un magmoïde dont les éléments neutres sont les éléments $\langle \{\pi_p^1\}, \dots, \{\pi_p^p\} \rangle \in P(T(\Sigma))_p^p$.

Considérons maintenant l'application qui à u appartenant à $T(\Sigma)_q^p$ associe $\langle \{\pi_p^1 \cdot u\}, \dots, \{\pi_p^p \cdot u\} \rangle$ appartenant à $P(T(\Sigma))_q^p$. Il est clair que c'est une injection — puisque u est entièrement défini par ses projections. De plus il est facile de montrer que c'est un 1-morphisme de magmoïde. Nous identifierons désormais tout élément de $T(\Sigma)$ à son image par cette injection dans $P(T(\Sigma))$. Il en résulte que $T(\Sigma)$ est un sous-magmoïde de $P(T(\Sigma))$.

Montrons maintenant que $P(T(\Sigma))$ est projetable. Il est immédiat que les torsions de $T(\Sigma)$ sont dans $P(T(\Sigma))$. Soient donc

$$U = \langle U_1, \dots, U_p \rangle \in P(T(\Sigma))_q^p$$

et $V = \langle V_1, \dots, V_p \rangle \in P(T(\Sigma))_q^p$ et supposons que pour tout $i \in [p]$, $\pi_p^i \cdot U = \pi_p^i \cdot V$. Il découle de la définition du produit de composition que $\pi_p^i \cdot U = U_i$ et $\pi_p^i \cdot V = V_i$ et donc $U = V$, ce qui entraîne que l'axiome des projections est vérifié.

Du fait que $\pi_p^i \cdot \langle U_1, \dots, U_p \rangle = U_i$ il résulte que, si l'on identifie $U \subset T(\Sigma)_q^p$ à $\langle U \rangle \in P(T(\Sigma))_p^p$, $[U_1, \dots, U_p] = \langle U_1, \dots, U_p \rangle$. Nous pouvons donc considérer que le produit direct dans $P(T(\Sigma))$ s'identifie au produit cartésien.

En étendant canoniquement l'opération de réunion dans $\mathcal{P}(T(\Sigma)_q^1)$ à $P(T(\Sigma))_q^p$, il découle immédiatement des définitions :

PROPOSITION 18 : *Pour U, U_1, U_2, V, V_1, V_2 appartenant aux fibres adéquates de $P(T(\Sigma))$, les relations suivantes sont vraies :*

$$(U_1 \cup U_2) \cdot V = (U_1 \cdot V) \cup (U_2 \cdot V),$$

$$U \cdot (V_1 \cup V_2) \cong (U \cdot V_1) \cup (U \cdot V_2),$$

$$(U_1 \cup U_2) \otimes V = (U_1 \otimes V) \cup (U_2 \otimes V),$$

$$U \otimes (V_1 \cup V_2) = (U \otimes V_1) \cup (U \otimes V_2).$$

L'exemple 9 montre bien que, pour la deuxième relation, on peut avoir l'inclusion stricte.

Appelons « additivité » la propriété que $U \cdot (V_1 \cup V_2)$ soit toujours égale à $(U \cdot V_1) \cup (U \cdot V_2)$. Nous avons donc construit à partir du magmoïde projetable libre $T(\Sigma)$ deux magmoïdes de parties, l'un est additif et l'autre projetable, les propriétés d'additivité et de projetabilité étant mutuellement exclusives.

CHAPITRE V

UN EXEMPLE D'APPLICATION

Les résultats présentés ici ne sont que prétextes à illustrer, autour d'exemples, l'utilisation du formalisme et des outils définis précédemment. Une étude systématique des domaines ici effleurés est réalisée dans nos autres travaux [2, 9, 27, 28, 29].

1. Les forêts algébriques classiques

La notion de forêt algébrique généralise celle de langage algébrique comme le prouvent les définitions suivantes :

DÉFINITION : Une grammaire algébrique d'arbres est la donnée d'un quadruplet $G = (V, \Sigma, P, A)$ où :

- V est un ensemble fini de variables syntaxiques graduées;
- Σ est l'alphabet gradué terminal fini;
- A est l'axiome, choisi dans V , de arité 0;
- P est un nombre fini de règles de la forme

$$X(x_1, \dots, x_n) \rightarrow t(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}), \quad \text{où tout } i_j \in [n],$$

$$X(x_1, \dots, x_n) \in V \quad \text{et} \quad t(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \in T(\Sigma \cup V)_n^1.$$

Par la suite, nous utiliserons les notations des magmoïdes, et une règle s'écrira sous la forme $X(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \tilde{t} \cdot \theta$, où $\tilde{t} \in T(\Sigma \cup V)^1$ et $\theta \in \Theta_n$ ou encore $X \rightarrow \tilde{t} \cdot \theta$.

Un arbre t_1 de $T(\Sigma \cup V)_0^1$ se dérive en t_2 de $T(\Sigma \cup V)_0^1$ dans G ssi il existe u, v et une règle $X \rightarrow \tilde{t} \cdot \theta$ de P tels que

$$t_1 = u \cdot X(x_1, \dots, x_n) \cdot v \quad \text{et} \quad t_2 = u \cdot \tilde{t} \cdot \theta \cdot v.$$

On notera

$$t_1 \underset{G}{\Rightarrow} t_2.$$

On indiquera parfois sous la flèche la règle utilisée $\xrightarrow[G]{\star}$ désignant la clôture transitive de \Rightarrow , la forêt $F(G)$ engendrée par G est définie par

$$F(G) = \{ t \in T(\Sigma)_0^1 \mid A \xrightarrow[G]{\star} t \}.$$

Exemple 10 : $G = (V, \Sigma, P, A)$:

$$\begin{aligned} V &= \{ A, X(x_1, x_2), S(x_1, x_2), Y(x_1) \} \\ \Sigma &= \{ \bar{a}, a(x_1), b(x_1, x_2), b'(x_1, x_2), b''(x_1, x_2) \}. \end{aligned}$$

L'ensemble des règles est $P = \{ r_1, \dots, r_7 \}$ avec

$$\begin{aligned} r_1 &: A \rightarrow X(b''(\bar{a}, \bar{a}), \bar{a}), \\ r_2 &: X(x_1, x_2) \rightarrow X(S(x_1, a(x_2)), a(x_2)), \\ r_3 &: X(x_1, x_2) \rightarrow Y(b'(x_1, x_2)), \\ r_4 &: S(x_1, x_2) \rightarrow x_1, \\ r_5 &: S(x_1, x_2) \rightarrow b''(x_2, x_2), \\ r_6 &: Y(x_1) \rightarrow b(x_1, x_1), \\ r_7 &: Y(x_1) \rightarrow Y(b(x_1, x_1)). \end{aligned}$$

Donnons un exemple de dérivation dans la grammaire G en précisant les règles utilisées et en détaillant les opérations de composition avec les notations des magmoïdes

$$A \underset{r_1}{\Rightarrow} X(b''(\bar{a}, \bar{a}), \bar{a}),$$

en posant

$$u_1 = x_1 \quad \text{et} \quad v_1 = \langle b''(\bar{a}, \bar{a}), \bar{a} \rangle,$$

l'arbre obtenu par la première dérivation s'écrit $u_1.X(x_1, x_2).v_1$ et se dérive par r_2 en $u_1.X(S(x_1, a(x_2)), a(x_2)).v_1 = t_2$.

En posant

$$u_2 = u_1 = x_1 \quad \text{et} \quad v_2 = \langle S(x_1, a(x_2)), a(x_2) \rangle.v_1,$$

on a

$$t_2 = u_2.X(x_1, x_2).v_2 \underset{r_3}{\Rightarrow} u_2.Y(b'(x_1, x_2)).v_2 = t_3;$$

posant

$$u_3 = x_1 \quad \text{et} \quad b'(x_1, x_2).v_2 = v_3,$$

on a

$$t_3 = u_3.Y(x_1).v_3 \underset{r_6}{\Rightarrow} u_3.b(x_1, x_1).v_3 = t_4,$$

soit encore

$$t_4 = b(x_1, x_1).b'(x_1, x_2) \langle S(x_1, a(x_2)), a(x_2) \rangle v_1.$$

Posant

$$u_4 = b(v_3, b'(x_1, a\bar{a})) \quad \text{et} \quad v_4 = \langle x_1, a(x_2) \rangle.v_1 = \langle b''(\bar{a}, \bar{a}), a\bar{a} \rangle,$$

il est facile de voir que $t_4 = u_4.S(x_1, x_2).v_4$ et on a

$$t_4 \underset{r_5}{\Rightarrow} u_4.b''(x_2, x_2).v_4 = u_4.b''(a\bar{a}, a\bar{a}) = t_5.$$

En développant, on obtient :

$$t_5 = b(b'(S(x_1, a(x_2)).v_1, a\bar{a}), b'(b''(a\bar{a}, a\bar{a}), a\bar{a})).$$

Posant

$$b(b'(x_1, a\bar{a}), b'(b''(a\bar{a}, a\bar{a}))) = u_5$$

et

$$v_5 = \langle x_1, a(x_2) \rangle.v_1,$$

on a

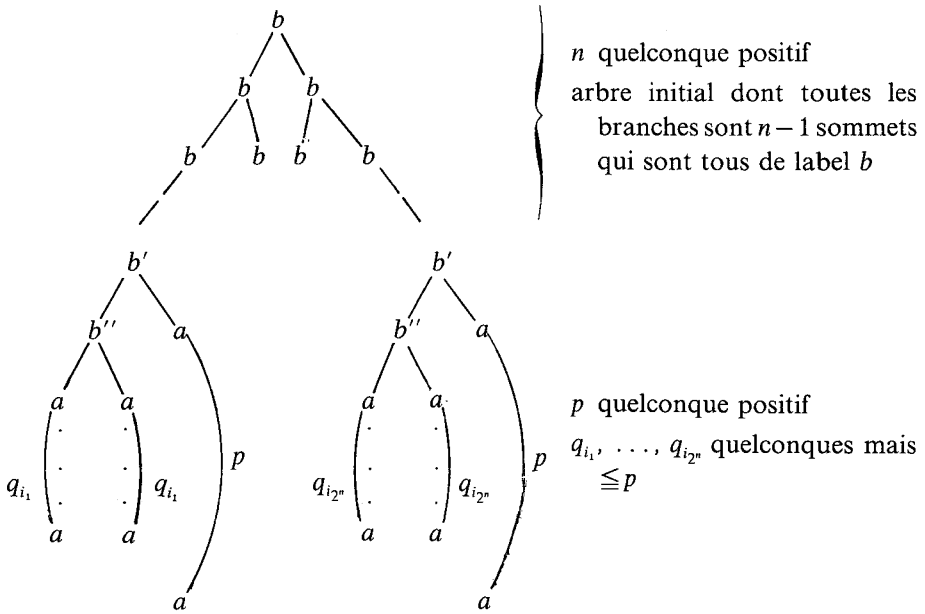
$$t_5 = u_5.S(x_1, x_2).v_5 \underset{r_4}{\Rightarrow} t u_5.x_1.v_5 = u_5.x_1.v_1 = u_5.b''(\bar{a}, \bar{a}).$$

Soit finalement

$$t = b(b'(b''(\bar{a}, \bar{a}), a\bar{a}), b'(b''(a\bar{a}, a\bar{a}), a\bar{a})).$$

Il est facile de voir que la forêt $F(G)$ est constituée de tous les arbres de la forme donnée page suivante.

On peut naturellement étendre au cas des forêts le théorème de Chomsky-Schützenberger pour les langages : toute forêt algébrique est composante de la plus petite solution d'une équation [5, 20]. Ce résultat s'énonce particulièrement bien dans le cadre du magmoïde [2] : à toute grammaire d'arbres G dont



l'ensemble V de variables est $\{X_1, \dots, X_k\}$, où X_i est de arité n_i on associe naturellement une application de $PT(\Sigma)_{n_1}^1 \times \dots \times PT(\Sigma)_{n_k}^1$ dans lui-même. Ceci se fait en deux temps :

(i) étant donné

$$\vec{Q} = \langle Q_1, \dots, Q_k \rangle \quad \text{avec } Q_i \in PT(\Sigma)_{n_i}^1,$$

$\sigma_{\vec{Q}} : T(\Sigma \cup V) \rightarrow PT(\Sigma)$ est le morphisme de magmoïde projetable défini par :

pour $X_i \in V$, $\sigma_{\vec{Q}}(X_i) = Q_i$,

pour $f \in \Sigma$, $\sigma_{\vec{Q}}(f) = \{f\}$;

(ii) on définit ensuite \hat{G} par

$$\hat{G}(\vec{Q}) = \langle R_1, \dots, R_k \rangle,$$

où

$$R_i = \bigcup \{ \sigma_{\vec{Q}}(t_i) / X_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \rightarrow t \in G \}.$$

Il est alors facile de montrer que $\bigcup_{n \geq 0} \hat{G}^n(\emptyset)$ est le plus petit point fixe de \hat{G} et que, en admettant que l'axiome de G soit X_1 , la forêt engendrée par A est bien la première composante de ce point fixe.

2. L'algèbricité dans les magmoïdes

La définition donnée ci-dessus est une extension immédiate au cas des alphabets gradués du cas des langages. Dans le cadre des magmoïdes, la définition s'étend à nouveau en considérant des variables grammaticales de degré supérieur non nécessairement 1.

Ainsi, une grammaire k -algébrique sera la donnée d'un quadruplet $G' = (V, \Sigma, P, A)$ où :

V est un ensemble fini de variables de degré supérieur k et de degré inférieur un multiple de k ;

Σ est un alphabet terminal du même type que dans V-1;

A est l'axiome de degré inférieur 0;

P est un ensemble fini de règles de la forme

$$X(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{kn}) \rightarrow t(x_i, \dots, x_i) \in T(V \cup \Sigma)_{kn}^k.$$

La dérivation $\xrightarrow{*}$ se définit comme dans le cas précédent. Remarquons que les variables grammaticales ayant un degré supérieur $k > 1$, $T(V \cup \Sigma)$ n'est pas projetable, mais les éléments ne contenant pas de variable de V sont dans le magmoïde projetable $T(\Sigma)$.

On posera

$$F(G') = \{ \Pi_k^1 \cdot t \mid t \in T(\Sigma)_0^1 \text{ et } A \xrightarrow[G]{*} t \}.$$

Si $k=1$, on retrouve la définition donnée en V-1,

Exemple 11 : $G' = (V', \Sigma, P', A')$ est la grammaire 2-algébrique définie par

$$V' = \{ \langle 0; A' \rangle, \langle 4; X'(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \langle 2; Y'(x_1, x_2) \rangle, \langle 4; S'(x_1, x_2, x_3, x_4) \}$$

(les degrés supérieurs sont égaux à 2);

Σ est le même alphabet que dans l'exemple 10;

$P' = \{ r'_1, \dots, r'_7 \}$ avec (en omettant de préciser les degrés)

$$r'_1 : A' \rightarrow X'(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}, \mathcal{S});$$

$$r'_2 : X'(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\rightarrow X'(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \langle S'(x_1, x_2, a(x_3), a(x_4)), a(x_3), a(x_4) \rangle;$$

$$r'_3 : X'(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow Y'(c(x_1, x_2, x_3), \mathcal{S});$$

$$r'_4 : S'(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle;$$

$$\begin{aligned}
 r'_5 &: S'(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \langle x_3, x_3 \rangle; \\
 r'_6 &: Y'(x_1, x_2) \rightarrow \langle b(x_1, x_1), \$ \rangle; \\
 r'_7 &: Y'(x_1, x_2) \rightarrow Y'(b(x_1, x_1), \$).
 \end{aligned}$$

On remarquera que, comme S' est de degré supérieur 2, on ne peut pas effectuer toutes les compositions dans la partie droite de r'_2 .

Donnons maintenant un exemple de dérivation dans G' , les notations étant moins détaillées que dans l'exemple 10 :

$$\begin{aligned}
 A' &\xRightarrow{r'_1} X'(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}, \$) \\
 &\xRightarrow{r'_2} X'(x_1, x_2, x_3, x_4).S'(\bar{a}, \bar{a}, a\bar{a}, a\$), a\bar{a}, a\$ \rangle \xRightarrow{r'_3} Y'(x_1).v'_3
 \end{aligned}$$

avec

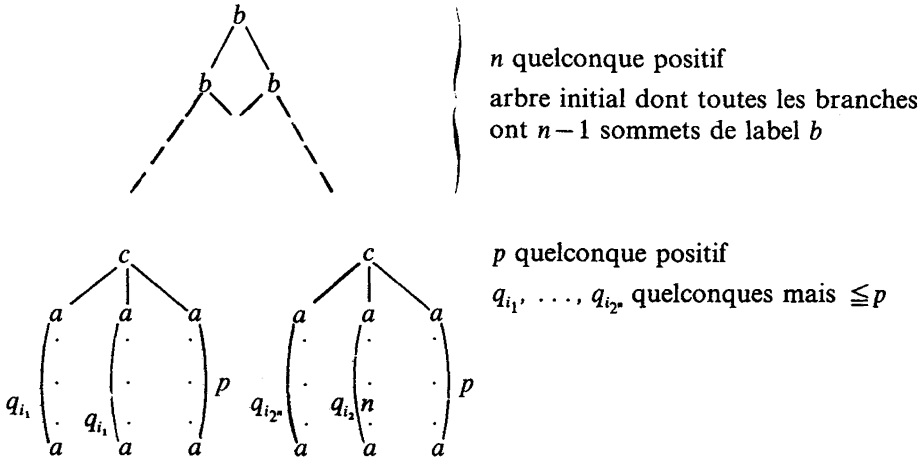
$$\begin{aligned}
 v'_3 &= \langle c(x_1, x_2, x_3), \$ \rangle. \langle S'(\bar{a}, \bar{a}, a\bar{a}, a\$), a\bar{a}, a\$ \rangle, \\
 Y'(x_1).v'_3 &\xRightarrow{r'_6} \langle b(x_1, x_2), \$ \rangle v'_3 = t'_4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t'_4 &= \langle b(\Pi_2^1.v'_3, c(x_1, x_2, a\bar{a})).S'(x_1, x_2, x_3, x_4). \langle \bar{a}, \bar{a}, a\bar{a}, a\$ \rangle, \$ \rangle \\
 &\xRightarrow{r'_5} \langle b(\Pi_2^1.v'_3, c(x_1, x_2, a\bar{a})). \langle a\bar{a}, a\bar{a} \rangle, \$ \rangle \\
 &= \langle b(c(x_1, x_2, a\bar{a}), c(a\bar{a}, a\bar{a}, a\bar{a})).S'(x_1, x_2, x_3, x_4). \langle \bar{a}, \bar{a}, a\bar{a}, a\$ \rangle, \$ \rangle \\
 &\xRightarrow{r'_4} \langle b(c(x_1, x_2, a\bar{a}), c(a\bar{a}, a\bar{a}, a\bar{a}))\bar{a}, \bar{a} \rangle, \$ \rangle = t',
 \end{aligned}$$

soit finalement

$$t' = \langle b(c(\bar{a}, \bar{a}, a\bar{a}), c(a\bar{a}, a\bar{a}, a\bar{a})), \$ \rangle.$$

Il est facile de vérifier que la forêt $F_1(G')$ est constituée des arbres de la forme



On peut encore montrer un théorème de Chomsky-Schützenberger pour les forêts k -algébriques [2] mais cette fois-ci au lieu de travailler dans le magmoïde des parties de $T(\Sigma)$ on travaille dans le magmoïde des parties de $T(\Delta)$, où pour chaque n , Δ_n et un ensemble fini d'arbres appartenant à $T(\Sigma)_{kn}^k$.

DÉFINITION : Soit G une grammaire 1-algébrique d'arbres (c'est-à-dire algébrique au sens classique) :

$$G = (V, \Sigma, P, A).$$

Soit Ψ un k -morphisme de magmoïdes.

La grammaire $\Psi(G) = (V', \Sigma', P', A')$ est définie par :

$$V' = \{ X'(x_1, \dots, x_{kn}) \mid X(x_1, \dots, x_n) \in V, X' \text{ de degré supérieur } k \};$$

$$\Sigma' = \Psi(\Sigma);$$

$$P' = \{ \Psi(u) \rightarrow \Psi(v) \mid u \rightarrow v \},$$

où ψ est étendu à $T(\Sigma \cup V)$ par $\Psi(X(x_1, \dots, x_n)) = X'(x_1, \dots, x_{kn})$ et pour tout $X \in V$.

$$A' = \Psi(A).$$

$\Psi(G)$ est évidemment k -algébrique et on a la propriété suivante, prouvée dans [2].

PROPOSITION 19 : Si Ψ est un k -morphisme linéaire, on a

$$\Pi_k^1 \cdot \Psi(F(G)) = F(\Psi(G)).$$

Exemple 12 : Soit Ψ le 2-morphisme linéaire défini par :

$$\Psi(b(x_1, x_2)) = \langle 4; b(x_1, x_3), \$ \rangle,$$

$$\Psi(a(x_1)) = \langle 2; a(x_1), \$ \rangle,$$

$$\Psi(b'(x_1, x_2)) = \langle 4; c(x_1, x_2, x_3), \$ \rangle,$$

$$\Psi(b''(x_1, x_2)) = \langle 4; x_1, x_3 \rangle \quad \text{et} \quad \Psi(\bar{a}) = \langle 0; \bar{a}, \$ \rangle.$$

Soit G la grammaire 1-algébrique de l'exemple 10 et G' la grammaire 2-algébrique de l'exemple 11.

Il est facile de vérifier que $G' = \Psi(G)$.

De plus, chaque règle r'_i de G' est l'« image » par Ψ de r_i . Par exemple, partant de r_2 , on a

$$\Psi(X(x_1, x_2)) \rightarrow \Psi(X(S(x_1, a(x_2)), a(x_2))),$$

qui s'écrit encore

$$X'(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \Psi(X(x_1, x_2) \cdot \langle S(x_1, x_2) \cdot \langle x_1, a(x_2) \rangle, a(x_2) \rangle),$$

$X'(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \Psi(X(x_1, x_2))$.

$$\langle \Psi(S(x_1, x_2)) \langle \Psi(x_1), \Psi(a(x_2)) \rangle, \Psi(a(x_2)) \rangle,$$

le deuxième membre s'écrit encore :

$$\begin{aligned} X'(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \langle S'(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \langle x_1, x_2, a(x_3), a(x_4) \rangle, a(x_3), a(x_4) \rangle \\ = X'(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \langle S'(x_1, x_2, a(x_3), a(x_4)), a(x_3), a(x_4) \rangle \end{aligned}$$

et on obtient bien r'_2 .

Ψ étant linéaire, la proposition 19 nous assure que

$$\Pi_2^1 \cdot \Psi(F(G)) = F(\Psi(G)) \quad \text{soit encore} \quad \Pi_2^1 \cdot \Psi(F(G)) = F(G').$$

Cette égalité est facile à vérifier sur les exemples donnés. Remarquons de plus que la dérivation donnée dans l'exemple 11 est l'image par Ψ de celle de l'exemple 10.

Les forêts k -algébriques qui sont l'image par un k -morphisme linéaire d'une forêt 1-algébrique sont appelées *k-algébriques linéaires* et jouissent de propriétés fort intéressantes [2].

Nous indiquons ci-dessous pour quelles raisons nous avons été amenés à considérer cette classe de forêts.

3. Le problème d'inversion de morphismes pour les arbres

Nous avons étudié ce problème dans le détail dans [9], [28], [29].

Dans le cas des langages, rappelons le résultat suivant [30] :

PROPOSITION 20 : *Soit φ un morphisme de monoïdes libres. Il existe un triplet (δ, K, Ψ) , où δ est un morphisme alphabétique, K un langage reconnaissable et Ψ un morphisme, tel que*

$$u = \varphi(t) \iff \exists \omega \in K, \quad \delta(\omega) = u \quad \text{et} \quad \Psi(\omega) = t.$$

Nous dirons que (δ, K, Ψ) inverse φ .

Cette proposition permet entre autres de construire, à partir d'une grammaire algébrique G , une grammaire algébrique G' telle que $\varphi^{-1}(L(G)) = L(G')$.

En effet, on a $\varphi^{-1}(L(G)) = \Psi(\delta^{-1}(L(G)) \cap K)$.

La construction de G' se fait en 3 étapes, en utilisant la propriété suivante :

PROPOSITION 21 : *Si δ est un morphisme alphabétique, G une grammaire algébrique, on a $\delta^{-1}(L(G)) = L(\delta^{-1}(G))$, où $\delta^{-1}(G)$ est obtenue en prenant pour règles les « images inverses par δ » (en un sens évident) des règles de G .*

Les trois étapes de la construction de G' sont alors évidemment :

- construction de $\delta^{-1}(G)$;

– intersection du langage algébrique obtenu avec le langage reconnaissable K :

– image par Ψ de la grammaire algébrique obtenue.

Notre but est de généraliser ces résultats au cas des forêts.

DÉFINITION : Un démarquage est un 1-morphisme linéaire tel que l'image de toute lettre graduée contienne au plus un sommet (autre qu'une variable de torsion).

Les démarquages ont, pour les arbres, comme l'indique la proposition suivante, une propriété comparable à celle des morphismes alphabétiques pour les mots.

PROPOSITION 22 : Si δ est un démarquage et G une grammaire 1-algébrique, on a $\delta^{-1}(L(G)) = L(\delta^{-1}(G))$, où $\delta^{-1}(G)$ est la grammaire obtenue en prenant pour règles les « images inverses par δ » des règles de G .

Ceci nous amène à généraliser comme suit aux forêts le problème d'inversion de morphisme.

DÉFINITION : Un 1-morphisme φ de magmoïdes libres est *inversible* ssi il existe un triplet (δ, K, Ψ) qui l'inverse, c'est-à-dire tel que :

δ est un démarquage;

K , une forêt reconnaissable;

ψ , un k -morphisme et

$$u = \varphi(t) \Leftrightarrow \exists \omega \in K, \quad \delta(\omega) = u \quad \text{et} \quad \Pi_k^1 \cdot \Psi(\omega) = t.$$

Dans le cadre classique des arbres, contrairement à ce qui se passe pour les langages (cf. prop. 20), il existe un 1-morphisme linéaire φ qui n'est inversible par aucun triplet (δ, L, Ψ) , où Ψ soit un 1-morphisme :

φ est le suivant,

$$\varphi(\bar{a}) = \bar{a}, \quad \varphi(a(x)) = a(x),$$

$$\varphi(b(x_1, x_2)) = b(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \varphi(c(x_1, x_2, x_3)) = b'(b''(x_1, x_2), x_3).$$

Un raisonnement simple supposant l'existence de Ψ et s'appuyant sur des considérations de degrés permet d'établir que φ n'est pas inversible.

Si φ était inversible par un triplet (δ, K, Ψ) , où Ψ serait un 1-morphisme linéaire, il est facile de voir que la forêt $F(G')$ de l'exemple serait algébrique au sens classique. φ n'étant pas tel, on peut se poser la question de l'algébricité au sens classique de $F(G')$. Nous avons prouvé dans [27] que $F(G')$ n'est pas algébrique au sens classique.

Dans le cadre des magmoïdes, l'extension de la notion de morphisme permet d'inverser tous les 1-morphismes linéaires, comme le prouve la proposition suivante, établie dans [29].

PROPOSITION 23 : *Tout 1-morphisme linéaire est inversible par un triplet (δ, K, Ψ) , où Ψ est un k -morphisme linéaire.*

Exemple 13 : Le morphisme φ considéré ci-dessus est inversible par $(\delta : \text{identité}, K = T\{a, a(x_1), b(x_1, x_2), b'(b''(x_1, x_2), x_3)\}_0^1, \Psi)$, où Ψ est le 2-morphisme de l'exemple 12.

On en déduit facilement que :

PROPOSITION 24 : *L'image inverse par un 1-morphisme linéaire d'une forêt algébrique classique n'est en général pas algébrique au sens classique mais est k -algébrique linéaire.*

On construit, comme dans le cas des langages, la grammaire de l'image inverse en 3 étapes par :

- démarquage inverse;
- intersection avec une forêt reconnaissable;
- k -morphisme linéaire,

étant entendu que ces trois opérations conservent l'algébricité au sens des magmoïdes [2].

Exemple 14 : Soit G la forêt 1-algébrique de l'exemple 10, G' la forêt 2-algébrique de l'exemple 11, φ le 1-morphisme linéaire déjà considéré.

Nous avons montré dans [27] que $\varphi^{-1}(F(G))$ n'est pas 1-algébrique. Mais, dans des magmoïdes, on obtient la grammaire k -algébrique de $\varphi^{-1}(F(G))$ en 3 étapes.

D'après l'exemple 13, le démarquage est ici l'identité et G est conservé. Comme $F(G) \subset K$, ce sont les deux premières étapes qui conservent G . Finalement, la construction se réduit ici à prendre $G' = \Psi(G)$, ce qui a été fait dans l'exemple 12.

COMPLÉMENT DE BIBLIOGRAPHIE

27. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Forêts algébriques et homomorphismes inverses*, Information and Control, vol. 37, 1978, p. 182-196.
28. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Sur l'inversion des morphismes d'arbres*, 5th Colloquium « Automata, Languages and Programming », Udine in Lecture Notes in Computer Science, n° 62, Springer-Verlag, 1978, p. 26-35.
29. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Morphismes et Bimorphismes d'arbres*, Theoretical Computer Science (à paraître).
30. M. NIVAT, *Transductions des langages de Chomsky*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, vol. 18, 1968, p. 339-456.