RAIRO. Informatique théorique

F. H. Raymond

Note sur la suppression des étiquettes en programmation

RAIRO. Informatique théorique, tome 11, nº 1 (1977), p. 3-16

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1977__11_1_3_0>

R.A.I.R.O. Informatique Théorique/Theoretical Computer Science
(vol. 11, n° 1, 1977, p. 3 à 16).

NOTE SUR LA SUPPRESSION DES ÉTIQUETTES EN PROGRAMMATION (*)

par F. H. RAYMOND (1)

Communiqué par M. Nivat

La définition et les propriétés d'une algèbre formelle dite algèbre des fonctions ont fait l'objet d'une note antérieure, ref. [7], la présente note en donne une extension par l'introduction d'un opérateur d'empaquetage, par celle des fonctions permettant d'en sortir et de celles permettant d'en répéter l'exécution. En limitant l'usage de l'empaquetage aux fonctions boucles (exprimant la sémantique de boucles de programme), l'approche proposée rejoint celle de J. Arsac et exprime la sémantique des instructions composées contenant des instructions EXIT (*i*), *i* entier.

1. INTRODUCTION

Cette note fait suite (2) à [7] en introduisant dans l'algèbre des fonctions $\mathscr{A}$ un nouvel opérateur, appelé opérateur d'empaquetage, et dans l'ensemble des fonctions qui expriment dans $\mathscr{A}$ le concept d'instruction EXIT (*i*) d'une part, et celui de branchement amont ou de boucle d'autre part.

Rappelons la définition de $\mathscr{A}$:

DÉFINITION : *$\mathscr{A}$ est une algèbre à opérateurs dont les termes forment l'ensemble F (ensemble des fonctions) et les opérateurs l'ensemble S :*

$$S = \{ \mathrm{COND}, \mathrm{REC}, S^0, S^1, S^2, \ldots \},$$

COND, REC, S^0, S^1, ... sont des symboles atomiques. A $\mathscr{A}$ est associée l'algèbre formelle dénotée $\hat{\mathscr{A}}$ comme celà est classique. Si $f_1, \ldots, f_n \in \hat{\mathscr{A}}$ alors :

$$f_1 \ldots f_n S^n \in \hat{\mathscr{A}},\ f_1 f_2 f_3\ \mathrm{COND} \in \hat{\mathscr{A}},\ \chi\ \varphi(\chi)\ \mathrm{REC} \in \hat{\mathscr{A}}.$$

Dans $\chi\ \varphi(\chi)$ REC, $\varphi(\chi)$ évoque un schéma fonctionnel de $\hat{\mathscr{A}}$ ayant au moins une occurrence d'un schéma fonctionnel χ quelconque.

DÉFINITION : *Soit F_0 un sous-ensemble non vide de F, $\hat{\mathscr{A}}_{F_0}$ la sous-algèbre fonctionnelle engendrée par F_0, nous appelons fonction tout membre de la cloture fonctionnelle de F_0.*

REMARQUE : Nous convenons d'exprimer par $f \in \mathscr{A}$ l'appartenance d'une fonction f à $\mathscr{A}$ ou l'appartenance d'un schéma fonctionnel à $\hat{\mathscr{A}}$.

(*) Reçu en janvier 1976.

(1) Conservatoire National des Arts et Métiers.

(2) Le lecteur voudra bien corriger l'énoncé de la propriété 1 du paragraphe 6 de [7] en supprimant « et seulement si ».

Le produit de fonctions, dénoté $f_1 \circ f_2$ habituellement et composé par l'opérateur S^2 selon $f_1 f_2\ S^2$ dans l'algèbre des fonctions, peut être considéré de deux manières.

Selon la première $f_1 \circ f_2$ et $f_1\ f_2\ S^2$, sont des objets de même nature que f_1 et f_2 pris séparément et appréhendés comme tels par un exécutant. Ainsi si le symbole S^2 est associé à f_2 comme suffixe, $f_2\ S^2$ isolément n'a aucun sens pour tout exécutant, mais acquiert une signification si $f_2\ S^2$ est associé à une autre fonction f_1 avec laquelle nous formons un produit : l'exécutant comprend que f_2 est à appliquer à (ou aux) l'objet produit par f_1.

Ce « passage » d'objets est inséparable de la séquentialité d'une structure de commande, mais la séquentialité peut être le principe premier si l'exécutant « comprend » dans $f_1 \circ f_2$ chacun des symboles ainsi : f_1 et f_2 lui désignent des actions ou instructions et $\circ$ lui ordonne après exécution de f_1 de poursuivre par l'exécution de f_2. Telle est la seconde manière de considérer $f_1 \circ f_2$ et $f_1\ f_2\ S^2$, le concept de produit de fonctions (conduisant à celui de « produit d'actions ») est donc conséquence de la séquentialité. Les deux voies coïncident si l'environnement, dans lequel les actions de l'exécutant ont lieu, est défini sans ambiguïté et si entre les actions issues de la compréhension de f_1 et celles issues de f_2 il n'y a pas d'effets de bords.

La fonction $f_1 \dots f_n\ S^n$ conduit à une analyse analogue mais de plus elle met en évidence que ne s'impose pas – soit comme principe premier, soit comme conséquence – la séquentialité puisque des exécutants distincts peuvent prendre en charge les actions à associer à chacune des fonctions $f_1 \dots f_{n-1}$. Pareille, ou semblable, remarque s'applique à la fonction conditionnelle. Si nous considérons une fonction récursive simple $\chi\ \varphi\ (\chi)$ REC, telle que définie dans [7], l'exécutant l'appréhende comme un tout et la première directive qu'il reçoit est d'exécuter $\varphi\ (\chi)$: nous sommes ramenés aux cas précédents tout le temps qu'il n'a pas à exécuter la fonction x contenue dans $\varphi\ (\chi)$. Lorsqu'il doit exécuter χ il lui est ordonné de lui substituer la fonction $\chi\ \varphi\ (\chi)$ REC elle-même et par conséquent de continuer l'exécution telle que nous venons de l'expliquer.

χ joue donc un rôle de repère dans le corps $\varphi\ (\chi)$ dès lors que la fonction soumise à l'exécutant est la fonction $\chi\ \varphi\ (\chi)$ REC, rôle explicité par χ en première position à gauche dans toute fonction formée avec l'opérateur binaire REC.

Il est clair que le concept de structure de commande ne s'impose pas en premier lieu, mais nous avons la liberté d'agir autrement et c'est ainsi que s'est effectué le développement parallèle des ordinateurs et des langages de programmation. Dès lors nous sommes amenés à penser que des progrès pourraient peut-être être accomplis si le choix d'une structure de commande ne précède pas toute analyse conceptuelle. C'est la démarche que nous avons suivie dans [7] et qui caractérise également la présente note.

Le paragraphe 2 définit une extension de l'algèbre des fonctions, le paragraphe 3 en fait l'application aux fonctions-boucles et en suivant J. Arsac [1] restreint l'opérateur dit d'empaquetage introduit dans le paragraphe 2 à ces seules fonctions. Le paragraphe 4 propose une brève conclusion.

2. EXTENSION DE L'ALGÈBRE DES FONCTIONS

2.1. Dans cette note $\mathscr{A}$ évoque l'algèbre formelle des fonctions dont, selon la définition (§ 2.1 de [7]), l'ensemble des opérateurs est :

$$S = \{ \text{EMP}, \text{COND}, \text{REC}, S^0, S^1, \ldots \}$$

il contient un nouvel opérateur EMP défini ci-après, et dont l'ensemble F_0 a pour sous-ensembles

$$\{f_i^* \mid \forall\, i \in N\} \qquad \text{et} \qquad \{f_i^{**} \mid \forall\, i \in N\},$$

définis dans le paragraphe 2.3 plus bas.

2.2. Opérateur d'empaquetage

Il est désigné par le nom (symbole) propre EMP.

DÉFINITION : *Soit* $f \in \mathscr{A}$, *alors* $f\,\text{EMP} \in \mathscr{A}$.

f EMP *est une fonction dite empaquetée.*

f *est le corps de* $f\,$EMP.

Il est plus naturel du point de vue informatique de représenter par $\{f\}$ la fonction f EMP en convenant que dans $\mathscr{A}$ les accolades seront réservées à cet usage.

Exemples : Soit

$$g, f \in \mathscr{A}, \qquad \{f\} \in \mathscr{A}, \qquad \underbrace{\{\ldots}_{i \text{ fois}}\{f\}\underbrace{\ldots\}}_{i \text{ fois}} \in \mathscr{A}, \qquad \{f\}\{g\}S^2 \in \mathscr{A}.$$

L'interprétation de l'empaquetage est associée à l'interprétation des fonctions f_i^* et f_i^{**}, introduites dans le paragraphe 2.3 qui suit et réciproquement.

DÉFINITIONS : f *est à la profondeur* 0 *dans les fonctions* $f_1 \ldots f \ldots f_n\, S^n$, $f_1 \ldots f_{n-1}, \ldots, f\, S^n$ $ff_1 f_2$ COND et $f_1 f_2 f$ COND.

Une occurrence d'une fonction est à la profondeur 1 *dans* $\{\varphi\}$ *si elle est à la profondeur* 0 *dans la fonction* φ *et en particulier* f *est à la profondeur* 1 *dans* $\{f\}$.

Une occurrence d'une fonction est à la profondeur $i+1$ *dans* $\{\varphi\}$ *si elle est à la profondeur* i *dans* φ.

Exemples :

f_1, f_2, f_3, sont à la profondeur 0 dans les fonctions $f_1 f_2 f_3\, S^3$ et $f_1 f_2 f_3$ COND et à la profondeur 2 dans $\{\,\{f_1 f_2 f_3\, S^3\,\}\,\}$.

La fonction $\{f_2\,\}$ est à la profondeur 0 dans $f_1\,\{f_2\,\}f_3\, S^3$ et à la profondeur 1 dans $\{f_1\,\{f_2\,\}f_3\, S^3\,\}$ alors que f_2 y est à la profondeur 2.

PROPRIÉTÉ : *Une occurrence d'une fonction à la profondeur i dans une fonction elle-même à la profondeur j dans une fonction* φ *est à la profondeur* $i+j$ *dans* φ.

Démonstration : Si l'occurrence considérée de f est à la profondeur i dans g, par définition de la profondeur cette occurrence de f est dans une fonction formée avec i fois l'opérateur d'empaquetage.

g a la profondeur j dans φ a pour la même raison toutes ses occurrences dans une fonction φ formée avec j fois l'opérateur EMP, entre autres opérateurs de S, par suite f a toutes ses occurrences dans la fonction φ formée avec $i+j$ fois l'opérateur EMP d'où résulte la propriété.

Exemple : f_2 est à la profondeur 2 dans $\{f_1\,\{f_2\,\}\,S^2\,\}$ laquelle est à la profondeur 1 dans $\{\,\{f_1\,\{f_2\,\}\,S^2\,\}f_3 f_0\, S^3\,\}$, donc f_2 est à la profondeur 3 dans cette dernière fonction.

2.3. Fonctions f_i^* et f_i^{**}, indicées par i

Comme il est naturel dans $\mathscr{A}$ les fonctions de F_0 sont définies par leur interprétation, il en est donc de même des fonctions particulières f_i^*, f_i^{**}.

DÉFINITIONS : 1° *Toute occurrence de la fonction* f_i^* *ou de la fonction* f_i^{**} *à la profondeur j dans une fonction* φ *y est libre si* $i \leqq j$ *et liée si* $i > j$;

2° *une fonction est bien formée si et seulement si toutes les occurrences des fonctions* f_i^*, f_i^{**} *qu'elle peut contenir y sont libres.*

Exemples : f_1^* est liée dans $p f_1^* f$ COND $(i = 1, j = 0)$;

f_1^* est à la profondeur 1 dans $\{f_1^*\}$, celle-ci est à la profondeur 0 dans $p\,\{f_1^*\,\}$ COND donc f_1^* est à la profondeur 1 dans cette dernière; $i = 1$; $j = 1$, f_1^* y est libre;

f_2^{**} est liée dans $\{\,p f^{**} f\,\text{COND}\,\}$ et libre dans $\{\,\{\,p f_2^{**} f\,\text{COND}\,\}f'\, S^2\,\}$ $(i = 2, j = 2)$;

f_1^* est libre dans $\{\,p\,\{f_1^*\,\}f f_1^*\, S^2\,\text{COND} f'\, S^2\,\}$, cette fonction est bien formée.

Interprétation : Dans toute interprétation des atomes de $\mathscr{A}$, toute occurrence libre de f_i^*, $i \in N$, est comprise par l'exécutant comme lui enjoignant de considérer comme achevée l'interprétation de la fonction empaquetée dans laquelle l'occurrence de f_i^* y est à la profondeur i.

Toute occurrence libre de f_i^{**}, $i \in N$, est comprise par l'exécutant comme lui enjoignant de substituer à f_i^{**} la fonction empaquetée dans laquelle l'occurrence de f_i^{**} est à la profondeur i.

Exemples : Selon l'interprétation définie ci-dessus, nous avons l'équivalence

$$\{ pf_1 ff_1^* S^2 \mathrm{COND} f' S^2 \} \equiv pf_1 f' S^2 f \mathrm{COND}.$$

Soit $\{ f_1 \, p \, \pi_0 f_2 f_1^{**} \, S^2 \, \mathrm{COND} \;\; S^2 \}$ ou avec l'autre manière d'exprimer COND (*voir* § 2.8 de [7]) :

$$\{ f_1 (p \to \pi_0, f_2 f_1^{**} S^2) S^2 \},$$

l'interprétation de f_1^{**} conduit à l'équivalence :

$$\{ f_1 (p \to \pi_0, f_2 f_1^{**} S^2) S^2 \} \equiv x f_1 (p \to \pi_0, f_2 \, x \, S^2) S^2 \, \mathrm{REC}.$$

REMARQUE : Dans la suite $p f_1 f_2$ COND sera toujours représentée par $(p \to f_1, f_2)$.

Observation importante : L'interprétation de f_i^* ne donne aucun sens à une fonction empaquetée dans laquelle f_i^* y est contenue par l'intermédiaire d'une fonction de la forme $f_1 \ldots f^* \ldots f_n f \, S^{n+1}$, dans laquelle f_i^* est au rang j. Cette fonction n'acquiert – si cela était utile – de sens (ou elle est interprétable) que si l'exécutant est du type séquentiel dont le plus naturel est celui qui explore la fonction considérée de gauche à droite.

Dans la suite une fonction sera bien formée si et seulement si elle répond à la définition 2 précédente et n'a aucune occurrence de f_i^* dans le corps d'une fonction formée avec S^n sauf en position terminale (dans ce cas (3) $f_1 \ldots f_n f_i^* \, S^{n+1} \equiv f_1 \ldots f_n \;\; \pi_0 \;\; S^{n+1} f_i^* \;\; S^2$ par une propriété de $\mathscr{A}$).

Nous complétons les définitions des fonctions initiales et terminales dans le paragraphe 3 de [7] par

DÉFINITION : *Toute fonction initiale* (*terminale*) *dans f est initiale* (*terminale*) *dans* $\{ f \}$.

Conséquence : f est terminale dans $\{ f_1 f_2 \{ \varphi (f) \} S^3 \}$ et $(p \to f_1, \{ \varphi (f) \})$ si f est terminale dans $\varphi (f)$.

2.4. Interprétation de l'empaquetage

L'interprétation proposée englobe celle des fonctions f_i^* et f_i^{**} x évoque un objet de B ou B^p, $p \in N$.

La fonction ν utilisée dans les points 2 et 3 ci-dessous est la fonction de valuation de [7] :

(3) Rappelons que π_0 est la fonction identique, $\pi_0 \in \mathscr{A}$.

1° $[x]\{f\} = [x]f$ si toutes les occurrences des fonctions f_i^* et f_i^{**} dans f sont à une profondeur au moins égale à $i+1$, ($i = 1, 2, \ldots$).

2° $[x]\{f\} = [x]f$ si $[[x]f]\,\mathrm{v}$ ne dépend d'aucune fonction f_i^{**} à la profondeur i dans f sinon

$$[x]\{f\} = [x]f\,S_{\{f\}}^{f_i^{**}}$$

3° $[x]\{f\} = [x]f$ si $[[x]f]\,\mathrm{v}$ ne dépend d'aucune fonction f_i^* à la profondeur i dans f sinon l'application de v est arrêtée conformément à l'interprétation de f_i^*.

4° Les règles ci-dessus sont appliquées autant de fois qu'il est nécessaire dans le corps f de $\{f\}$ si f contient des fonctions empaquetées possédant des occurrences libres de f_i^* et f_i^{**}.

Remarque : Soit évoquée par le schéma ci-dessous une fonction bien formée et supposons l'exécutant du type séquentiel l'interprétation de f_i^* est alors représentée par les branchements évoqués par les flèches :

$$--\{--\{--f_1^*--\{--f_3^*---\}--f_2^*---\}--f_1^*---\}---$$

Ces branchements (qu'il est préférable d'appeler des bifurcations) sont exprimés par des instructions EXIT comme il a été proposé entre autres par Bochmann [3], J. Arsac [1] leur donne comme noms ω [1], ω [2], ... L'ensemble des fonctions f_i^* généralise la fonction f^* introduite antérieurement par J. Kott [6] et nous-mêmes.

De même manière, l'interprétation séquentielle de f_i^{**} conduit au schéma ci-dessous lorsque les fonctions f_i^{**} sont toutes terminales

$$---\{---\{---f_1^{**}---\{---f_2^{**}---f_3^{**}---\}---f_2^{**}---\}---\}$$

Si chaque accolade ouvrante est dotée d'une étiquette I (selon le paragraphe 4.2 de [7]), l'étiquette est dès lors celle de la fonction empaquetée correspondante, la fonction f_i^{**} à la profondeur i dans $I\{\ \ldots\ \}$ est la sémantique dans $\mathscr{A}$ de l'instruction GOTO I.

2.5. Axiomes de $\mathscr{A}$

Aux axiomes proposés dans [7] nous devons ajouter ceux qui concernent l'interprétation de EMP et des fonctions f_i^* et f_i^{**} (ils seront référencés $a_1, a_2, \ldots$). L'exposé précédant conduit naturellement à :

a_1, $\{f\} \equiv f$ si et seulement si toutes les occurrences des fonctions f_i^{**} sont au moins à la profondeur $i+1$ dans $\{f\}$ et toutes les occurrences de f_i^* sont libres, ou si f ne possède aucune occurrence de ces fonctions;

a_2, pour toute fonction f et $\forall\, i \in N$, $f_i^* f S^2 \equiv f_i^*$;

a_3, toute occurrence terminale de π_0 (respectivement f_i^*) à la profondeur i dans une fonction empaquetée peut être remplacée par f_i^* (respectivement π_0) (on obtient une fonction équivalente);

a_4, si $f_1 \preccurlyeq f_2$ alors $\{f_1\} \preccurlyeq \{f_2\}$.

REMARQUE : Les règles de calcul et propriétés de $\mathscr{A}$ s'appliquent à l'intérieur de $\{\ \ldots\ \}$ nous aurons à les étendre lorsque l'opérateur d'empaquetage est en jeu.

2° La deuxième partie du point 2 de l'interprétation de l'empaquetage étant rapprochée de l'interprétation de la fonction récursion simple (4) $\chi\,\varphi(\chi)$ REC, (§ 4.1 de [7]), nous obtenons immédiatement (5)

$$\chi\,\varphi(\chi)\,\mathrm{REC} \equiv \{\varphi(\chi)\, S^{\chi}_{f_1^{**}}\}. \tag{1}$$

Le cas général nous conduira à l'axiome a_5; auparavant rappelons :

DÉFINITION : 1° *Toute fonction récursion simple est une fonction récursion (générale) ;*

2° *soit une fonction représentée par* $\varphi(\chi, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ *dans laquelle les fonctions* $\xi_1, \ldots, \xi_r$ *sont des fonctions récursions et possédant toutes ou certaines d'entre elles des occurrences de* χ, *alors :*

$$\chi\,\varphi(x, \xi_1, \ldots, \xi_r)\,\mathrm{REC}$$

est une fonction récursion;

3° *il n'y a pas d'autres règles pour la définition des fonctions récursions.* L'axiome A_{14} de [7] s'énonce :

axiome A_{14} *:*

$$\chi\,\varphi(\chi, \xi_1, \ldots, \xi_r)\,\mathrm{REC} \equiv \varphi(\chi, \xi_1, \ldots, \xi_r)\, S^{\chi}_{\chi\varphi(x)\,\mathrm{REC}}$$

$\xi_1, \ldots, \xi_r$ toutes ou certaines d'entre elles pouvant posséder des occurrences de χ; on procède de même pour les fonctions $\xi_1, \ldots, \xi_r$.

DÉFINITION : *f est la profondeur* 1 *dans* $\chi\,\varphi(\chi)$ REC *si elle est à la profondeur* 0 *dans* φ, *f y est à la profondeur j si elle est à la profondeur* $j-1$ *dans* φ, *c'est-à-dire à la profondeur* $j-1$ *dans l'une des fonctions* $\xi_1, \ldots, \xi_r$.

---

(4) $\chi\,\varphi(\chi)$ REC est une fonction récursion simple si $\varphi(x)$ n'a aucune occurrencc de REC.
(5) $S^f_{f'}$ est l'opérateur de substitution; soit $g \in \mathscr{A}$, $g\, S^f_{f'} \in \mathscr{A}$, $g\, S^f_{f'}$ est déduite de g en substituant la fonction f' à toutes les occurrences de f dans g.

DÉFINITION : *Toute fonction initiale* (*terminale*) *de* φ *est initiale* (*terminale*) *de* $\chi\, \varphi$ REC.

La sémantique de la relation (1) est l'axiome a_5 :

axiome a_5 *:* soit une fonction récursion de corps $\varphi(\chi, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ cette notation rappelant que $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont des occurrences de fonctions récursions alors :

$$\chi\, \varphi(\chi)\, \mathrm{REC} \equiv \{ \varphi' \},$$

où φ' est déduite de φ en remplaçant toutes les occurrences de χ à la profondeur $i-1$ dans φ par f_i^{**} et en procédant de même manière pour les fonctions $\xi_1, \ldots, \xi_r$ jusqu'à ce qu'il ne subsiste plus d'opérateur REC dans φ'.

2.6. Factorisation d'une fonction

PROPRIÉTÉ 1 : *Soit une fonction* φ *dont les fonctions terminales sont* $f, f_1, \ldots, f_n$. (*l'ordre n'est pas significatif*) *parmi lesquelles nous choisissons* f, *alors :*

$$\varphi \equiv \{ \varphi' f S^2 \},$$

où φ' *est déduite de* φ *par substitution :*

– *de la fonction* π_0 *à toutes les occurrences terminales de* f (*et en simplifiant la fonction ainsi obtenue*)

– *des fonctions* $f_1 f_1^* S^2, \ldots, f_n f_1^* S^2$ *aux occurrences terminales de* $f_1, \ldots, f_n$ *respectivement.*

Note : $f, f_1, \ldots, f_n$ peuvent évidemment être des fonctions empaquetées.

Preuve : Par la propriété 4 (§ 3.2 de [7]) :

$$\varphi' f S^2 \equiv \varphi'\, S^{\pi_0}_{\pi_0 f S^2}\, S^{f_1^*}_{f_1^* f S^2} \equiv \varphi'\, S^{\pi_0}_{f} \qquad \text{(axiomes } A_{12} \text{ et } a_2\text{)}.$$

Puisque d'après la propriété 1 :

$$\varphi' \equiv \varphi(f, f_1, \ldots, f_n)\, S^{f}_{\pi_0}\, S^{f_1}_{f_1 f_1^* S_2}, \ldots, S^{f_n}_{f_n f_1^* S^2},$$

$$\varphi'\, S^{\pi_0}_{f} \equiv \varphi(f, f_1 f_1^* S^2, \ldots, f_n f_1^* S^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} \{ \varphi' f S^2 \} &\equiv \{ \varphi(f, f_1 f_1^* S^2, \ldots) \} \\ &\equiv \{ \varphi(f, f_1, \ldots, f_n) \} && \text{(axiomes } a_3 \text{ et } A_{12}\text{)} \\ &\equiv \varphi(f, f_1, \ldots, f_n) && \text{(axiome } a_1\text{)}. \end{aligned}$$

Exemple : Soit $\varphi \equiv (p \rightarrow f_1 f_2 f S_3, g_1 g_2 S^2)$, ses fonctions terminales sont f et g_2.

Factorisons avec f selon la propriété ci-dessus, nous obtenons :

$$(p \to f_1 f_2 f S^3, g_1 g_2 S^2) \equiv \{(p \to f_1 f_2 \pi_0 S^3, g_1 g_2 S^2 f_1^* S^2) f S^2\}.$$

PROPRIÉTÉ 2: *Soit* φ *une fonction dont toutes les occurrences de* f_i^{**} *sont au moins à la profondeur* $i+1$, *alors :*

$$f\{\varphi\} S^2 \equiv \{\varphi'\}$$

où φ' *est déduite de* φ *en remplaçant ses fonctions initiales par leur produit avec* f *en facteur gauche.*
La preuve résulte directement de a_1 et de la propriété 2 (§ 3.1 [7]).

PROPRIÉTÉ 3 : $\{\varphi\} f S^2 \equiv \{\varphi' f S^2\}$ *où* φ' *est déduite de* φ *en substituant aux occurrences libres de* f_i^* *à la profondeur i le produit* $f f_i^* S^2$.

Preuve : Soient $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions terminales de φ, par construction de φ' ce sont les fonctions terminales de φ' (si f_i^* est terminale on applique l'axiome a_3). Celles de $\varphi' f S^2$ sont donc, propriété 4 (§ 3.2 [7]), $f_1 f S^2, \ldots, f_n f S^2$. Or chaque occurrence de f_i^* à la profondeur i dans φ conduit à arrêter la valuation de φ pour poursuivre par celle de f en facteur droite; la valuation de $\{\varphi' f S^2\}$ s'achève par $f f_i^* S^2$ si f_i^* intervient selon l'interprétation de cette fonction, ceci achève la preuve.

Exemple :

$$\{(p \to f_1^*, g_1)(q \to f_1, f_2) S^2\} f S^2 \equiv \{(p \to f f_1^* S^2, g_1)(q \to f_1, f_2) S^2 f S^2\}.$$

3. FONCTIONS-BOUCLES

3.1. Les fonctions-boucles forment un sous-ensemble des fonctions récursions; elles sont définies par :

DÉFINITION 1 : 1° *Une fonction-boucle simple est une fonction récursion simple de corps* $\varphi(\chi)$ *où toutes les occurrences de* χ *sont terminales;*

2° *la fonction récursion de corps* $\varphi(x, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ *où* $\xi_1, \ldots, \xi_r$ *sont des fonctions-boucles est une fonction-boucle si les occurrences de* x *sont terminales dans* φ.

Il en résulte que les occurrences de χ dans $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont des fonctions terminales et que ces fonctions sont terminales dans φ.

Conséquence : L'axiome a_5 conduit à :

$$\chi\varphi(\chi, \xi_1, \ldots, \xi_r) \mathrm{REC} \equiv \{\varphi'\}$$

φ' est la fonction déduite de φ selon l'axiome a_5 et toutes les occurrences de f_i^{**} dans φ' sont terminales, d'où :

PROPRIÉTÉ 1 : *Toute fonction-boucle est équivalente à une fonction empaquetée dans laquelle toutes les fonctions* f_i^{**} *sont terminales.*

Exemple :

$$\chi(p_1 \to f_1 \chi S^2, \chi_1(p_2 \to f_2 \chi S^2, (p_3 \to f_3 \chi_1 S^2, f_4))\mathrm{REC})\mathrm{REC}$$

est une fonction-boucle. Par a_5 elle est équivalente à :

$$\{(p_1 \to f_1 f_1^{**} S^2, \{(p_2 \to f_2 f_2^{**} S^2, (p_3 \to f_3 f_1^{**} S^2, f_4))\})\}.$$

Nous remarquons qu'elle se déduit directement de la forme étiquetée proposée antérieurement (§ 4.2 [7]) :

Réservons maintenant en suivant J. Arsac [1, 2] *l'usage de l'empaquetage à la construction de fonctions-boucles; par conséquent il en est de même des fonctions f_i^* et f_i^{**}.*

De la propriété 1 ci-dessus il résulte donc que toutes les occurrences de fonctions empaquetées dans une fonction empaquetée sont terminales.

Commençons par les fonctions-boucles simples.

3.2. Fonctions-boucles simples

Soient $g_1 \chi S^2, \ldots, g_1 \chi S^2, f_1, \ldots, f_n$ les fonctions terminales du corps dénoté $\varphi(g_1 \chi S^2, \ldots, g_k \chi S^2, \ldots, f_n)$ d'une fonction-boucle simple, selon la définition rappelée au début du paragraphe 3.1. Par la propriété 1 (§ 2.6) nous avons

$$\varphi \equiv \{\varphi'(g_1, \ldots, g_k, f_1 f_1^* S^2, \ldots, f_n f_1^* S^2)\chi S^2\}.$$

D'où

$$\chi\varphi(\chi)\mathrm{REC} \equiv \chi\{\varphi' \chi S^2\}\mathrm{REC}$$

et par l'axiome a_5 :

$$\chi\varphi(\chi)\mathrm{REC} \equiv \{\varphi' f_1^{**} S^2\}. \tag{1}$$

L'utilisation en premier lieu de l'axiome a_5 donnant

$$\chi\varphi(\chi)\mathrm{REC} \equiv \{\varphi'(g_1 f_1^{**} S^2, \ldots, g_k f_1^{**} S^2, f_1 f_1^* S^2, \ldots, f_n f_1^* S^2)\} \tag{2}$$

nous en déduisons que la propriété 5 (§ 3.2 [7]) est valide compte-tenu de l'axiome a_2.

La relation (2) montre que l'une ou l'autre des règles suivantes peut être adoptée.

Règle 1 *: f_1^{**} est implicite*; alors dans le corps d'une fonction empaquetée les fonctions terminales $g_1, \ldots, g_k$ sont interprétées comme $g_1 f_1^{**} S^2, \ldots, g_k f_2^{**} S^2$.

Règle 2 *: f_1^* est implicite*; alors dans le corps d'une fonction empaquetée les fonctions terminales $f_1, \ldots, f_n$ sont interprétées comme $f_1 f_1^* S^2, \ldots, f_n f_1^*, S^2$.

Il y a lieu de remarquer que la seconde règle exprime l'axiome a_3 (§ 2.4.) La règle appliquée à (1) conduit au même résultat qu'appliquée à (2), alors qu'il n'y a aucun sens à appliquer la règle 2 à (1), la propriété utilisée pour établir (1) exprimant une propriété de f_1^*.

Dans un langage de programmation où les symboles BEGIN et END ne sont pas réservés à la construction de suites d'instructions empaquetées un symbole, REPEAT par exemple, peut annoncer que BEGIN et END jouent les rôles de $\{$ et $\}$ respectivement de telle sorte que l'instruction :

REPEAT BEGIN S END

a pour sémantique la fonction empaquetée $\{ f_s \}$, f_s étant la fonction décrivant la sémantique de S. L'instruction :

LOOP S REPEAT

serait équivalente et toute autre analogue, et $\{ S \}$ ce qui est plus simple, comme l'a proposé J. Arsac.

Exemples : 1° fonction-boucle primitive de corps $(p \rightarrow f \chi S^2, \pi_0)$ (§ 5.1 [7]) :

$$\begin{aligned} \chi(p \rightarrow f \chi S^2, \pi_0)\,\mathrm{REC} &\equiv \{(p \rightarrow f, f_1^*)\} && \text{(règle 1)} \\ &\equiv \{(p \rightarrow f f_1^{**} S^2, \pi_0)\} && \text{(règle 2);} \end{aligned}$$

2° fonction-boucle de corps $f_1\,(p \rightarrow \pi_0, f_2\,\chi\, S^2)\, S^2$ qui est la sémantique du schéma de programme $n+$ (1/2) de Dijsktra :

$$\begin{aligned} \chi f_1(p \rightarrow \pi_0, f_2 \chi S^2) S^2\,\mathrm{REC} &\equiv \{f_1(p \rightarrow f_1^*, f_2) S^2\} && \text{(règle 1)} \\ &\equiv \{f_1(p \rightarrow \pi_0, f_2 f_1^{**} S^2) S^2\} && \text{(règle 2).} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\{f_1(p \rightarrow f_1^*, f_2) S^2\} \equiv \{f_1(p \rightarrow f_1^*, \pi_0) S^2 f_2 S^2\},$$

cette dernière fonction décrivant la sémantique de l'instruction proposée par N. Wirth [6] :

REPEAT BEGUIN S_{f_1}; WHEN p : EXIT; S_{f_2} END

et de l'instruction proposée par O. Dahl [4] :

LOOP S_{f_1}; WHILE $\neg\, p : S_{f_2}$; REPEAT

Les suites d'instructions S_{f1}, S_{f2} ayant f_1, f_2 comme sémantique respectivement.

A noter que la première pourrait être exprimée par

REPEAT BEGIN S_{f_1}; IF p THEN EXIT ELSE S_{f_2} END

et la seconde par

LOOP S_{f_1}; IF $\neg\, p$ THEN EXIT; S_{f_2}; REPEAT.

3.3. Fonctions-boucles générales

Par l'axiome a_5 toutes les fonctions f_i^{**} dans le corps de la fonction empaquetée $\{\varphi'\}$ équivalente à une fonction-boucle sont terminales, or il en est de même des fonctions-boucles $\xi_1, \ldots, \xi_r$ évoquées dans l'axiome a_5 et par conséquent toutes les fonctions empaquetées dans φ' sont terminales. Les fonctions terminales autres que f_i^{**} dans $\{f\}$ à la profondeur j dans φ' sont donc terminales dans φ'. Par conséquent, nous pouvons, en application de l'axiome a_3 leur substituer leur produit avec f_{j+1}^{*} en facteur terminal.

La fonction $\{f'\}$ ainsi obtenue ne possède comme fonctions terminales que f_i^{*} et f_i^{**}, $i = 1, 2, \ldots$.

Considérons une telle fonction $\{f'\}$ à la profondeur 0 dans φ donc à la profondeur 1 dans $\{\varphi\}$. Soit $\{f''\}$ la fonction obtenue en substituant à toute occurrence de f_i^{**} à la profondeur $i-1$ dans f' la fonction f_{i-1}^{*}.

Il est immédiat que :

$$\{\varphi(\{f''\}f_1^{**}S^2)\} \equiv \{\varphi\}. \tag{1}$$

Nous procéderons de même manière au niveau de chaque occurrence des fonctions empaquetées dans φ jusqu'à obtenir la disparition des fonctions f_i^{**} dans le corps de chacune d'elles, elles cessent d'être terminales, seule la fonction f_1^{**} en relation a (1) est terminale.

Nous avons donc :

Propriété 4 : *Toute fonction-boucle est équivalente à une fonction empaquetée contenant des occurrences de fonctions empaquetées en facteur gauche avec la seule fonction f_1^{**}, les fonctions terminales de corps de chacune d'elles sont les fonctions f_i^{*}.*

Exemple : 1° Soit la fonction-boucle :

$$\{(q_1 \to \{(p_1 \to f_1 f_2^{**} S^2, (p_2 \to f_2 f_1^{**} S^2, f_3))\}, (q_2 \to h, f_1^{**} S^2, h_2))\} \tag{2}$$

nous obtenons en premier lieu : (construction des fonctions $\{f'\}$ dans l'exposé ayant conduit à la propriété 4) :

$$\{(q_1 \to \{(p_1 \to f_1 f_2^{**} S^2, (p_2 \to f_2 f_1^{**} S^2, f_3 f_2^{*} S^2))\},$$
$$(q_2 \to h_1 f_1^{**} S^2, h_2 f_1^{*} S^2))\}$$

et en second lieu [par (1) ci-dessus] :

$$\{(q_1 \to \{(p_1 \to f_1 f_1^{*} S^2, (p_2 \to f_2 f_1^{**} S^2, f_3 f_2^{*} S^2))\} f_1^{**} S^2,$$
$$(q_2 \to h_1 f_1^{**} S^2, h_2 f_1^{*} S^2))\}.$$

La règle 1 est applicable, d'où

$$\{(q_1 \to \{(p_1 \to f_1 f_1^{*} S^2, (p_2 \to f_2, f_3 f_2^{*} S^2))\},$$
$$(q_2 \to h, h_2 f_1^{*} S^2))\}$$

alors que la règle 2 ne l'est pas.

2° Remplaçons dans la fonction (2) ci-dessus la fonction f_3 par

$$\{(p_3 \to f_3 f_3^{**} S^2, (p_4 \to f_4 f_2^{**} S^2, f_5))\},$$

elle est à la profondeur 2 dans (2). Elle est remplacée par

$$\{(p_3 \to f_3 f_3^{**} S^2, (p_4 \to f_4 f_2^{**} S^2, f_5 f_3^{*} S^2))\}$$

puis par

$$\{(p_3 \to f_3 f_2^{*} S^2, (p_4 \to f_4 f_1^{*} S^2, f_5 f_3^{*} S^2))\} f_1^{**} S^2,$$

d'où la fonction

$$\begin{aligned}\{(q_1 \to \{(p_1 \to f_1 f_1^{*} S^2, (p_2 \to f_2 f_1^{**} S^2,\\ \{(p_3 \to f_3 f_2^{*} S^2, (p_4 \to f_4 f_1^{*} S^2, f_5 f_3^{*} S^2))\} f_1^{**} S^2))\} f_1^{**} S^2,\\ (q_2 \to h_1 f_1^{**} S^2, h_2 f_1^{*} S^2))\}.\end{aligned}$$

La règle 1 conduit à supprimer toutes les occurrences de f_1^{**}. La propriété 4 a un corollaire immédiat.

PROPRIÉTÉ 5 : *Si f_1^{**} est implicite (règle 1 du § 3.2) l'opérateur d'empaquetage et l'ensemble des fonctions (de sortie de l'empaquetage) f_i^{*} suffisent à construire l'ensemble des fonctions-boucles.*

L'axiome a_3, en rappelant que toute fonction empaquetée est terminale dans toute fonction-boucle à toutes profondeurs, conduit de son côté à :

PROPRIÉTÉ : *Si f_i^{*} est implicite (règle 2 du § 3.2) l'opérateur d'empaquetage et l'ensemble des fonctions (de bifurcations en amont) f_i^{**} suffisent à construire l'ensemble des fonctions-boucles.*

Observons dans ce cas que le recours aux fonctions de sortie est non seulement implicite mais inutile en raison de l'axiome a_3.

4. CONCLUSION

Dans la mesure où la définition proposée des fonctions récursions seraient considérées comme introduisant une « sorte d'étiquette », attachée à χ dans $\chi\ \varphi\ (\chi)$ REC, et en se limitant aux fonctions-boucles nous avons proposé une extension de l'algèbre des fonctions mettant en évidence que l'empaquetage sans étiquettes d'une fonction était possible moyennant l'introduction de fonctions exprimant la sémantique d'une instruction de sortie d'un empaquetage soit (règle 1) en aval, soit (règle 2) en amont (dans l'hypothèse d'un exécutant séquentiel). Le choix est arbitraire, mais il n'est pas évident que la suppression des étiquettes rende toujours plus clairs et compréhensibles des programmes et facilite nécessairement leur construction systématique.

Le premier choix (règle 1) correspond à la voie proposée par : G. Bochmann [3], J. Arsac [1], étudiée par J. Arsac *et al.* [2], S. R. Kosaraju [5], Ruggiu [8] entre autres.

Le second choix (règle 2) nous apparaît tout aussi naturel en particulier si nous imaginons la réalisation du concept d'exécutant séquentiel au niveau de la microprogrammation, mais cela est un autre sujet et il n'est pas du propos de cette note de l'aborder.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. ARSAC, *Les langages sans étiquettes*, Publication 73/13, Institut de Programmation, Université de Paris VI.
2. J. ARSAC, L. NOLIN, G. RUGGIU et J. P. VASSEUR, *Le système de programmation structurée* EXEL. Revue Technique THOMSON CSF, vol. 6, n° 3, septembre 1974, p. 715 à 736.
3. G. V. BOCHMANN, *Multiple Exits From a loop without the* GOTO, Comm. A.C.M., vol. 16, n° 7, juillet 1973, p. 443-444.
4. O. DAHL, E. DIJKSTRA et C. HOARE, *Structured programming*, Academic Press, London, 1972. Voir aussi D. KNUTH, *Structured programming with "goto" Statements*, Computing Surveys, Vol. 6, n° 4, décembre 1974.
5. S. R. KOSARAJU, *Analysis of structures Programs*, Journal of computer and systems Sciences, vol. 9, n° 3, décembre 1974.
6. J. KOTT, *Remarques sur la structure des schémas de programme*, *in* Théorie des automates, des langages et de la programmation, Colloque I.R.I.A./1972, p. 191-194.
7. F. H. RAYMOND, *Note sur l'algèbre des fonctions*, R.A.I.R.O., n° R-3, 1975, p. 25-49.
8. G. RUGGIU, *De l'organigramme à la formule*, Thèse d'État, Université Paris VI, 1974.
9. N. WIRTH, *On certain basis concepts of programming languages*, Stanfort Computer Sciences, Report CS 65, Stanford, Calif., May 1967.