

MICHEL LATTEUX

Sur les TOL - Systèmes unaires

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle.
Informatique théorique*, tome 9, n° R3 (1975), p. 51-62

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1975__9_3_51_0>

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES TOL — SYSTEMES UNAIRES

par Michel LATTEUX ⁽¹⁾,

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — Le but de cet article est de donner un critère décidable de régularité pour les TOL-langages définis sur un alphabet d'une seule lettre. On montre, en outre, que si cette condition est vérifiée, le langage régulier correspondant est effectivement constructible.

I. INTRODUCTION

En 1968, dans le but de rendre compte du développement cellulaire de certaines espèces vivantes, A. Lindenmayer [6, 7], a défini de nouvelles classes de langages et de systèmes de génération de langages qui ont été, depuis, appelés L-langages et L-systèmes. Pour une motivation biologique plus approfondie, le lecteur intéressé pourra se reporter au chapitre 0 du livre de Herman et Rozenberg [2]. La théorie mathématique des L-systèmes a connu un développement très rapide, dont témoignent les ouvrages d'ensemble consacrés à ce sujet [2, 9] où l'on trouvera aussi une bibliographie très détaillée. Une des caractéristiques principales des familles de langages engendrés par les L-systèmes est de ne pas entrer commodément dans la hiérarchie classique définie par Chomsky. Ceci motive l'étude de certaines sous-classes de L-langages et de leur comportement vis-à-vis de la hiérarchie de Chomsky. C'est à une telle étude qu'est consacré le présent article dont le but est de donner un critère décidable de régularité pour les langages appartenant à une certaine sous-classe de L-langages.

Ce problème a été résolu récemment par Salomaa [11] dans le cas des DOL-langages (voir aussi Vitanyi [12]) mais reste ouvert pour les OL-lan-

(1) Département d'Informatique, Université de Lille-1, Villeneuve d'Ascq.

gages [11]. Les langages de Lindenmayer que nous considérons dans cet article sont définis sur un alphabet d'une seule lettre et sont appelés « unaires ». Ces langages, bien qu'ayant une structure non triviale, sont d'une étude plus commode parce qu'un mot peut être remplacé sans ambiguïté par sa longueur, ce qui permet l'utilisation d'outils arithmétiques. Les OL-langages unaires (UL-langages) ont pu être ainsi complètement caractérisés [1, 2] et un algorithme permettant de tester si un langage régulier est un UL-langage a été donné par Salomaa [10]. Par contre, pour les TOL-langages définis par Rozenberg [8] en laissant, à chaque étape de la dérivation, le choix entre plusieurs ensembles de règles de production, aucune étude ne concerne le cas où l'alphabet ne contient qu'une seule lettre. C'est cette classe, la classe des TOL-langages unaires (TUL-langages) qui est considérée dans cet article.

Dans la deuxième section, nous fixons les notations et nous donnons une définition des TUL-langages orientée vers la théorie des nombres (il est facile de vérifier l'équivalence entre cette définition et la définition classique de Rozenberg [8], dans le cas d'un alphabet d'une seule lettre). Les résultats des deux sections suivantes, en dehors de leur intérêt propre, sont nécessaires pour la suite ; nous y montrons qu'un langage engendré par un TUL-système déterministe ne contient aucun langage régulier infini et qu'un langage engendré par un TUL-système strictement non déterministe (toutes les « tables » contiennent au moins deux éléments) est un langage régulier effectivement constructible. Cette dernière propriété généralise le résultat principal de [1] (théorème 2.8). Dans la section 5, nous donnons une condition nécessaire et suffisante de régularité pour les TUL-langages. De cette condition générale nous déduisons, alors, quelques corollaires qui permettent, dans certains cas particuliers, d'affirmer, sans calcul, la régularité d'un TUL-langage. Nous montrons, enfin, que cette condition est décidable et que si elle est vérifiée, on peut effectivement construire le langage régulier correspondant. Ce dernier résultat est d'un grand intérêt ; il nous permet, en effet, dans un autre article [4], de montrer qu'il est décidable de déterminer si un langage régulier est un TUL-langage et si un TUL-langage est un UL-langage.

II. NOTATIONS ET DEFINITIONS

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble des entiers positifs. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous convenons de remplacer $\{x\}$ par x . Une *table* est une séquence finie, non vide, strictement croissante, d'éléments de \mathbb{N} . Par la suite, nous confondons tout ensemble fini non vide avec la table que l'on obtient en ordonnant cet ensemble. Nous dirons qu'une table $T = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est *déterministe* (*D*), *propre* (*P*), *grossissante* (*G*) respectivement si $p = 1$, $t_1 \geq 1$, $t_1 \geq 2$. Elle est *stable* si elle est non déterministe et contient 1. La *caractéristique* d'une table T non déterministe est le plus grand commun diviseur (pgcd) des différences $t_2 - t_1, \dots, t_p - t_1$. Un *TUL-schéma*

est un ensemble fini $G = \{ P_1, \dots, P_n \}$ où les P_i sont des tables. Nous considérerons, par abus de notation, G comme un alphabet fini composé des lettres P_1, \dots, P_n , ce qui nous permet de parler du monoïde libre G^* engendré par G , qui est appelé l'ensemble des dérivations de G . Un TUL-système est un couple (G, x) , où G est un TUL-schéma et $x \in \mathbb{N}_+$. A toute table $P_i = (t_1, \dots, t_k)$, on fait correspondre la fonction S_{P_i} définie sur \mathbb{N} par :

$$S_{P_i}(y) = \left\{ \sum_{j=1}^k y_j t_j \mid \forall j \in \{ 1, \dots, k \}, y_j \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{j=1}^k y_j = y \right\}.$$

Cette définition s'étend à $d \in G^*$ au moyen des relations : $S_\Lambda(y) = y$ ($\Lambda =$ le mot vide) et $S_{d'd''}(y) = S_{d''}(S_{d'}(y))$ pour $d', d'' \in G^*$. Le langage engendré par le TUL-système (G, x) , $L(G, x) = S_{G^*}(x) = \bigcup_{d \in G^*} S_d(x)$ sera appelé un TUL-langage. Nous dirons qu'un TUL-schéma (TUL-système) est *déterministe* (DTUL), *propre* (PTUL), *strictement non déterministe* (\bar{D} TUL) si toutes ses tables sont respectivement déterministes, propres, non déterministes. Pour $X = D, P, \bar{D}$, un XTUL-langage est un langage qui peut être engendré par un XTUL-système. Une table Q est dite *dérivée* dans le TUL-schéma G , s'il existe $d \in G^*$ tel que $Q \subseteq S_d(1)$. La *caractéristique* d'un TUL-schéma (TUL-système) non déterministe est le plus petit commun multiple (ppcm) des caractéristiques des tables non déterministes. Pour $x, y \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_+$, nous écrirons $x \equiv y \pmod{d}$ si x et y ont le même reste dans la division entière par d . Pour $\alpha \in G^*$ et $G' \subseteq G$, $l_{G'}(\alpha)$ désigne le nombre d'occurrences de lettres de G' dans α . La longueur de α s'écrit $l(\alpha)$. Enfin, pour tout ensemble A , le cardinal de A sera noté $|A|$.

III. TUL-LANGAGES DETERMINISTES

Éliminons le cas où toutes les tables sont déterministes en montrant qu'alors, le langage engendré ne peut pas être un langage régulier. Nous avons même un résultat plus fort qui nous sera utile dans la section 5 :

Théorème 1 : Un DTUL-langage ne contient aucun langage régulier infini.

Démonstration : Soient $G = \{ (p_1), \dots, (p_n) \}$ un DTUL-schéma et q_1, q_2, \dots, q_k les nombres premiers ≥ 2 qui apparaissent dans la décomposition en facteurs premiers des p_i . Supposons qu'il existe un langage régulier infini inclus dans $L' = \{ q_1^{s_1} \times \dots \times q_k^{s_k} / s_i \geq 0 \}$. Il existe alors $u, v \in \mathbb{N}_+$ tels que $u + pv \in L', \forall p \in \mathbb{N}$. En particulier $u(1 + q_1 \dots q_k v) \in L'$ et comme les q_i sont des nombres premiers et que $u \in L', 1 + q_1 \dots q_k v \in L'$, ce qui implique $v = 0$, d'où la contradiction. Donc $L(G, 1) \subseteq L' \cup \{ 0 \}$ ne contient aucun langage régulier infini. Nous avons le même résultat pour $L(G, x), \forall x \in \mathbb{N}_+$, puisque $L(G, x) \subseteq L(G', 1)$ où $G' = G \cup \{ (x) \}$. CQFD.

IV. TUL-LANGAGES STRICTEMENT NON DETERMINISTES

Montrons maintenant que tout langage, engendré par un TUL-système dont toutes les tables contiennent au moins deux éléments, est régulier. Nous pouvons nous ramener au cas où toutes les tables sont propres au moyen du résultat suivant :

Lemme 1 : Pour tout TUL-schéma G , il existe un PTUL-schéma G' de même caractéristique, vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{N}_+$, $L(G, x) \setminus \{0\} = \bigcup_{y \in A_x} L(G', y)$ où A_x est un ensemble fini qui est égal à $\{1\}$ si $x = 1$.

Démonstration : Nous pouvons supposer que la séquence $(0) \notin G$. Soit $Q = (0, k_1, \dots, k_s)$ une table impropre non déterministe de G . Distinguons deux cas :

1) Q est stable ($k_1 = 1$). Si $L(G, x)$ est fini, $L(G, x) = \{0, \dots, x\}$. Il suffira de prendre $G' = \{(1)\}$ et $A_x = \{1, \dots, x\}$. Si $L(G, x)$ est infini, $L(G, x) = \mathbb{N}$. Nous prendrons alors $G' = \{(1, 2)\}$ et $A_x = \{1\}$.

2) Q n'est pas stable ($k_1 > 1$). D'après [1], nous pouvons construire une table Q' grossissante de même caractéristique que Q et vérifiant $L(\{Q'\}, 1) = L(\{Q\}, 1) \setminus \{0\}$. Soit G' le TUL-schéma obtenu en remplaçant Q par Q' dans G . Pour tout $y \in Q'$ posons $j_y =$ le plus petit j tel que $y \in S_{Q^j}(1)$. Comme $Q' \subseteq L(\{Q\}, 1)$ avec Q impropre, il est clair que $Q' \subseteq S_{Q^u}(1)$ avec $u = \max \{j_y \mid y \in Q'\}$. Donc Q' est une table dérivée dans G et $L(G', 1) \subseteq L(G, 1)$. De plus, pour $x > 1$, comme

$$B_x = Q' \cup \{x\} \subseteq L(G, x), \bigcup_{y \in B_x} L(G', y) \subseteq L(G, x).$$

Réciproquement, $\forall y \in \mathbb{N}_+$, si $z \in S_Q(y) \setminus \{0\}$, $\exists t$ tel que $k_t^z \geq y$ donc $z \in S_{Q^{t+1}}(x), \forall x \in \mathbb{N}_+$. Si $x = 1, z \in L(\{Q\}, 1) \setminus \{0\} = L(\{Q'\}, 1) \subseteq L(G', 1)$ donc $L(G, 1) \setminus \{0\} = L(G', 1) \setminus \{0\}$. Si $x > 1, z \in L(\{Q\}, x) \setminus \{0\} = \{x\} \cup (L(\{Q\}, 1) \setminus \{0, 1\}) = \{x\} \cup (L(\{Q'\}, 1) \setminus \{1\}) = \{x\} \bigcup_{y \in Q'} L(\{Q'\}, y)$ car Q' est grossissante. Donc $z \in \bigcup_{y \in B_x} L(G', y)$ et

$$L(G, x) \setminus \{0\} = \bigcup_{y \in B_x} L(G', y) \setminus \{0\}.$$

En recommençant cette construction pour les autres tables impropres, nous obtenons le résultat annoncé. CQFD.

Lemme 2 : Soient $P = (p, p + k_1d, \dots, p + k_t d)$ une table non déterministe de caractéristique $d, x \in \mathbb{N}_+$ et $A = \left\{ k_t \times \prod_{i=1}^t k_i, \dots, xk_1 \right\}$. Pour tout $\mu \in A, xp + \mu d \in S_P(x)$.

Démonstration : Pour tout $\mu \in A$, il existe ([5] théorème 11) $s_1, \dots, s_t \in \mathbb{N}$ tels que $\mu = \sum_{i=1}^t s_i k_i$. Comme $\mu \leq x k_1$, $k_1 \times \sum_{i=1}^t s_i \leq \mu \leq x k_1$, ce qui implique $s = \sum_{i=1}^t s_i \leq x$ et $x' = x - s \in \mathbb{N}$. Donc

$$xp + \mu d = x'p + \sum_{i=1}^t s_i(p + k_i d) \in S_p(x).$$

CQFD.

Lemme 3 : Soient $P = (p, p + k_1, \dots, p + k_n)$ une table non déterministe, $x, y, d \in \mathbb{N}_+$ tels que $k_1 \geq 2$, $x \geq (n + 1)d$ et $x \equiv y \pmod{d}$. Alors, pour tout $z \in S_p(y)$, il existe $z' \in S_p(x)$ vérifiant $z' > x$ et $z' \equiv z \pmod{d}$.

Démonstration : Si $d = 1$, $z' = x(p + k_1) \in S_p(x)$, $z' > x$ et $z' \equiv z \pmod{d}$, pour tout $z \in \mathbb{N}$. Nous pouvons donc supposer que $d \geq 2$. Pour $z \in S_p(y)$, il existe $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$ tels que $z = py + \sum_{i=1}^n s_i k_i$ avec $\sum_{i=1}^n s_i \leq y$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $t_i \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$ tel que $t_i \equiv s_i \pmod{d}$. Donc $t = \sum_{i=1}^n t_i \leq (n + 1)d \leq x$ et $z'' = px + \sum_{i=1}^n t_i k_i \in S_p(x)$ avec $z'' \equiv z \pmod{d}$. De plus, $p \geq 2$ ou ($p = 1$ et $t \geq 1$) implique $z'' > x$.

Si $p = 1$ et $t = 0$, posons $z' = x + dk_n > x = z''$ et comme $d < (n + 1)d \leq x$, $z' \in S_p(x)$.

Si $p = 0$, prenons μ tel que $t + \mu d \leq x < t + (\mu + 1)d$.

Nous avons alors :

$$t + (\mu + 1)d > x \geq (n + 1)d \geq 2d \quad \text{donc} \quad t + \mu d \geq d,$$

ce qui implique :

$$z' = \sum_{i=1}^n t_i k_i + \mu d k_n \geq 2(t + \mu d) \geq t + (\mu + 1)d > x.$$

De plus, $z' \equiv z'' \equiv z \pmod{d}$ et $t + \mu d \leq x$ entraîne $z' \in S_p(x)$. CQFD.

Pour $d \in \mathbb{N}_+$ et $r \in \mathbb{N}$, nous noterons $r + \mathbb{N}d = \{r + \lambda d / \lambda \in \mathbb{N}\}$. Considérons $G = \{P_1, \dots, P_m\}$ un P\overline{D}TUL-schéma dont toutes les tables ont une caractéristique supérieure à 1 et posons $n = \sup \{ |P_j| / j \in \{1, \dots, m\} \}$. Prenons $d \geq 2$, $i \in \{1, \dots, m\}$ et $x \geq nd$ et montrons les deux résultats suivants, concernant $L_{i,x} = \bigcup_{\alpha \in G^*} S_{\alpha P_i}(x)$.

Lemme 4 : Le langage $L_{i,x} \cap (r + \mathbb{N}d)$ est infini si et seulement s'il existe une dérivation $\beta \in G^*$ vérifiant $d \leq l(\beta) < 2d$ et $S_{\beta P_i}(x) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$.

Démonstration : Si $L_{i,x} \cap (r + \mathbb{N}d)$ est infini, il existe $\gamma \in G^d G^*$ tel que $S_{\gamma P_i}(x) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$. Si $l(\gamma) < 2d$, il suffit de prendre $\beta = \gamma$. Dans le cas contraire, γ se factorise en $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ avec $0 < l(\gamma_2) \leq d$ et il existe $x_1 \in S_{\gamma_1}(x)$, $x_2 \in S_{\gamma_2}(x_1)$ tels que $x_1 \equiv x_2 \pmod{d}$ et $S_{\gamma_3 P_i}(x_2) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$. Comme $x_1 \geq x \geq nd$, nous obtenons, d'après le lemme 3, $S_{\gamma_3 P_i}(x_1) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$

et $S_{\gamma_1\gamma_3P_i}(x) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$. Nous en déduisons, par induction, l'existence de $\beta \in G^*$, tel que $d \leq l(\beta) < 2d$ et $S_{\beta P_i}(x) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$. Réciproquement, si β vérifie ces deux propriétés, il existe $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in G^*, x_1 \in S_{\beta_1}(x), x_2 \in S_{\beta_2}(x_1)$ tels que $x_2 > x_1 \geq x \geq nd$ et $S_{\beta_3 P_i}(x_2) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$ (cf. lemme 3). Donc pour tout k , il existe $w > k$ tel que $w \in S_{\beta_1\beta_2\beta_3 P_i}(x) \cap (r + \mathbb{N}d)$ et $L_{i,x} \cap (r + \mathbb{N}d)$ est infini. CQFD.

Lemme 5 : Soit d_i la caractéristique de P_i . Le langage $L_{i,x} \cap (r + \mathbb{N}d_i)$ est un langage régulier effectivement constructible.

Démonstration : Posons $A = L_{i,x} \cap (r + \mathbb{N}d_i)$. Si A est fini, d'après le lemme précédent, $A = \bigcup_{\alpha \in B} S_{\alpha P_i}(x)$ avec $B = G^* \setminus G^*G^{d_i}$. Sinon, nous pouvons trouver $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in G^*, x_1 \in S_{\alpha_1}(x), x_2 \in S_{\alpha_2}(x_1), r' \in \{0, \dots, d_i - 1\}$ tels que $d_i \leq l(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) < 2d_i, l(\alpha_2) > 0, x_2 > x_1, x_1 \equiv x_2 \equiv r' \pmod{d_i}$ et $S_{\alpha_3 P_i}(x_2) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset$.

Soient Q_1 et Q_2 les tables construites respectivement à partir de $S_{z_2}(1)$ et $S_{\alpha_3 P_i}(1)$. Q_1 et Q_2 sont des tables dérivées dans G , non déterministes de caractéristiques δ_1 et δ_2 . D'après [1], nous pouvons trouver deux ensembles finis I_1 et F_1 tels que $L(\{Q_1\}, x_1) = F_1 \bigcup_{u \in I_1} (u + \mathbb{N}\delta_1)$. Comme $L(\{Q_1\}, x_1) \cap (r' + \mathbb{N}d_i)$ est infini, $\exists u_0 \in I_1$ et $\lambda_0 \in \{0, \dots, d_i - 1\}$ tels que $z_0 = u_0 + \lambda_0\delta_1 \in (r' + \mathbb{N}d_i) \cap L(\{Q_1\}, x_1)$. Soient

$$Q_2 = (v, v + k_1\delta_2, \dots, v + k_s\delta_2),$$

$b = k_s \times \sum_{i=1}^s k_i$ et μ_0 le plus petit entier vérifiant :

$$W_0 = (z_0 + \mu_0\delta_1\delta_2)(v + k_1\delta_2) \geq (z_0 + (\mu_0 + 1)\delta_1\delta_2)v + b\delta_2.$$

Comme, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}, z_0 + \lambda\delta_1\delta_2 \in L(\{Q_1\}, x_1)$, le lemme 2 entraîne : $W_0 + \mathbb{N}\delta_2 \subseteq L_{i,x}$. De plus, $z_0 \equiv x_2 \pmod{d_i}$ et $S_{\alpha_3 P_i}(x_2) \cap (r + \mathbb{N}d_i) \neq \emptyset$ implique $S_{Q_2}(z_0) \cap (r + \mathbb{N}d_i) \neq \emptyset$. Donc il existe $t_0 \in \{0, \dots, d_i - 1\}$ tel que $W'_0 = W_0 + t_0\delta_2 \in r + \mathbb{N}d_i$. Enfin, par construction de la table Q_2, δ_2 est un diviseur de d_i et $W'_0 + \mathbb{N}d_i \subseteq L_{i,x} \cap (r + \mathbb{N}d_i)$. Donc

$$A = \{z \in r + \mathbb{N}d_i / z < W'_0\} \cup (W'_0 + \mathbb{N}d_i). \text{ CQFD.}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette section :

Théorème 2 : Soit (G, x) un $\overline{\text{DTUL}}$ -système de caractéristique d . On peut, alors, construire deux ensembles finis F_x et I_x tels que

$$L(G, x) = F_x \bigcup_{y \in I_x} (y + \mathbb{N}d).$$

Démonstration : Comme la démonstration du lemme 1 est constructive, nous pourrions supposer que $G = \{P_1, \dots, P_m\}$ est propre. S'il existe $P_i \in G$ de caractéristique 1, $\forall x$ nous pouvons trouver z_x tel que

$$\{z \in \mathbb{N} / z \geq z_x\} \subseteq L(\{P_i\}, x) \subseteq L(G, x).$$

Donc $L(G, x) = \{z \in L(G, x) / z < z_x\} \cup \{z \in \mathbb{N} / z \geq z_x\}$. Il suffit alors de prendre $F_x = \{z \in L(G, x) / z < z_x\}$ et $I_x = \{z_x, \dots, z_x + d - 1\}$. Dans le cas contraire, posons $n = \sup \{|P_j| / j \in \{1, \dots, m\}\}$, $A = \{z \in L(G, x) / z < nd\}$ et $B = \left(\left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, m\}} \bigcup_{z \in A} S_{P_j}(z) \right) \cap \{y \in \mathbb{N} / y \geq nd\} \right) \cup \{z / z = x \text{ et } z \geq nd\}$.

Nous avons alors $L(G, x) = A \bigcup_{y \in B} L(G, y)$,

$$L(G, y) = \{y\} \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} L_{i,y} \text{ et } L_{i,y} = \bigcup_{r \in \{0, \dots, d_i - 1\}} (L_{i,y} \cap (r + \mathbb{N}d_i))$$

(où $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, d_i désigne la caractéristique de la table P_i). Comme $d = \text{ppcm}(d_1, \dots, d_m)$, il est alors facile, en utilisant le lemme précédent de construire les ensembles I_x et F_x de l'énoncé. CQFD.

V. UN CRITERE DE REGULARITE POUR LES TUL-LANGAGES

Pour tout TUL-schéma G , G_N désignera l'ensemble des tables non déterministes de G et G_D l'ensemble des tables déterministes. Montrons d'abord qu'on peut toujours commencer par «appliquer les tables déterministes», c'est-à-dire que si $y \in L(G, x)$, il existe $\alpha \in G_D^* G_N^*$ tel que $y \in S_\alpha(x)$.

Lemme 6 : Soient P et Q deux tables. Si P est déterministe, pour tout $x \in \mathbb{N}_+$, $S_{QP}(x) \subseteq S_{PQ}(x)$.

Démonstration : Posons $P = (u)$ et $Q = (v, v + k_1, \dots, v + k_n)$.

Si $y \in S_{QP}(x)$, $y = \left(xv + \sum_{i=1}^n t_i k_i\right)u$ avec $\sum_{i=1}^n t_i \leq x$ et $t_i \in \mathbb{N}$,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}. xu \in S_P(x) \text{ et comme } \sum_{i=1}^n (ut_i) \leq ux,$$

$$y = (xu)v + \sum_{i=1}^n (ut_i)k_i \in S_Q(xu) = S_{PQ}(x). \text{ CQFD.}$$

Nous en déduisons par induction :

Lemme 7 : Pour tout $x \in \mathbb{N}_+$, $L(G, x) = \bigcup_{\alpha \in G_D^* G_N^*} S_\alpha(x) = \bigcup_{y \in L(G_D, x)} L(G_N, y)$.

Considérons un TUL-système (G, x) de caractéristique d . Nous allons, maintenant, montrer que $L(G, x)$ est régulier si et seulement s'il existe un ensemble fini $A \subseteq L(G_D, x)$ tel que $L(G, x) = \bigcup_{y \in A} L(G_N, y)$. Pour $G' \subseteq G$, $y \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, d - 1\}$, posons $L_r(G', y) = \bigcup_{y \in A} L(G', y) \cap (r + \mathbb{N}d)$ et définissons les deux ensembles finis $Z(G, x)$ et $Y(G, x)$ par :

$$Z(G, x) = \{r \in \{0, \dots, d - 1\} / L_r(G_D, x) \text{ est infini}\}$$

et

$$Y(G, x) = \begin{cases} \{0, \dots, d-1\} & \text{si } G \text{ possède une table de caractéristique } 1, \\ \{r \in \{0, \dots, d-1\} / \exists y \in L(G_D, x) \text{ tel que } L_r(G_N, y) \text{ est infini}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons, alors, le critère de régularité :

Théorème 3 : $L(G, x)$ est régulier si et seulement si $Z(G, x) \subseteq Y(G, x)$.

Démonstration : Supposons $Z(G, x) \subseteq Y(G, x)$. Soit $r \in \{0, \dots, d-1\}$. Si $L_r(G, x)$ est fini, il est régulier. Sinon distinguons deux cas :

a) $r \in Y(G, x)$. Alors, d'après le théorème 2, $\exists x_0 \equiv r \pmod{d}$ tel que $x_0 + \mathbb{N}d \subseteq L_r(G, x)$. Donc $\mathbb{N} \setminus L_r(G, x)$ est fini et $L_r(G, x)$ est régulier.

b) Il existe une infinité de $y \in L(G_D, x)$ tels que $L_r(G_N, y) \neq \emptyset$. Alors $\exists y_0 \in L_r(G_D, x)$ avec $r' \in Z(G, x)$ et $L_{r'}(G_N, y_0) \neq \emptyset$. Par hypothèse, $r' \in Y(G, x)$ ce qui implique, d'après les lemmes 2 et 3, $r \in Y(G, x)$ et d'après a), $L_r(G, x)$ est régulier. Donc $L(G, x) = \bigcup_{\rho \in \{0, \dots, d-1\}} L_\rho(G, x)$ est régulier.

Pour montrer la réciproque, raisonnons par l'absurde. Supposons que $E = Z(G, x) \setminus Y(G, x)$ soit non vide et définissons, sur E la relation \rightarrow par : $r \rightarrow r' \Leftrightarrow$ il existe $y \equiv r \pmod{d}$, $z \equiv r' \pmod{d}$ tels que $z \in L(G_N, y) \setminus \{y\}$.

Par définition de E et d'après le lemme 3, la relation \rightarrow est transitive et anti-réflexive, donc il existe un élément maximal. Soit r_0 un tel élément. Prenons $y \in L_r(G_D, x)$ avec $r \in \{0, \dots, d-1\}$. Distinguons trois cas :

i) $r \in Z(G, x) \setminus Y(G, x)$.

$$\text{Comme } r_0 \text{ est maximal } L_{r_0}(G_N, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r \neq r_0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

ii) $r \in Y(G, x)$. $L_{r_0}(G_N, y) = \emptyset$ sinon $r_0 \in Y(G, x)$.

iii) $r \notin Y(G, x) \cup Z(G, x)$. Alors $L_{r_0}(G_N, y)$ et $L_r(G_D, x)$ sont finis.

Nous obtenons donc $L_{r_0}(G, x) = \bigcup_{y \in L(G_D, x)} L_{r_0}(G_N, y) = F \cup L_{r_0}(G_D, x)$ avec F fini. Comme $L_{r_0}(G_D, x)$ est infini et que $L(G_D, x)$ ne contient aucun langage régulier infini (théorème 1), $L_{r_0}(G, x)$ n'est pas régulier et $L(G, x)$ non plus. CQFD.

EXEMPLES : Prenons $G = \{(4, 10), (3)\}$. La caractéristique de G est 6. Il est facile de voir que $Y(G, 1) = \{0, 4\}$ et $Z(G, 1) = \{3\}$ donc $L(G, 1)$ est non régulier. Par contre $Y(G, 2) = \{0, 2\}$ et $Z(G, 2) = \{0\}$ donc $L(G, 2)$ est régulier.

Nous allons, maintenant, déduire de ce théorème un certain nombre de critères permettant de déterminer plus rapidement la régularité d'un TULL-
langage.

Corollaire 1 : Si $L(G, x)$ est régulier, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $L(G, kx)$ est régulier.

Démonstration : Soit d la caractéristique de G . Si $r \in Z(G, kx)$, il existe $z_1, z_2 \in L(G_D, 1)$ tels que $z_2 > 1$, $z_1 \geq 1$ et $r \equiv kxz_1 \equiv kxz_1z_2 \pmod{d}$. Donc il existe $r', i \in \{0, \dots, d-1\}$ tels que $r' \equiv xz_1z_2^i \pmod{d}$ ce qui implique $r' \in Z(G, x) \subseteq Y(G, x)$ et r , équivalent à kr' modulo d , appartient à $Y(G, kx)$. CQFD.

Les exemples donnés ci-dessus nous ont montré que $L(G, x)$ régulier n'entraîne pas nécessairement $L(G, y)$ régulier pour tout $y \in \mathbb{N}_+$. Nous dirons que le TUL-schéma G est régulier si et seulement si $L(G, x)$ est régulier pour tout $x \in \mathbb{N}_+$.

Du corollaire 1, nous pouvons déduire :

Corollaire 2 : G est régulier si et seulement si $L(G, 1)$ est régulier.

Corollaire 3 : Soient P une table non déterministe de caractéristique $d, u \in P$ et $x \in \mathbb{N}_+$ tels que x divise d et $\text{pgcd}(u, d/x) = 1$. Pour tout TUL-schéma G contenant P , $L(G, x)$ est régulier.

Démonstration : Si $d = 1$, par définition de $Y(G, x)$, $\forall x \in \mathbb{N}_+$, $Z(G, x) \subseteq Y(G, x)$ donc $L(G, x)$ est régulier.

Si $d \geq 2$, il existe $v \in P$ tel que $v \geq 2$ et $\text{pgcd}(v, d/x) = 1$. Donc, on peut trouver $i \geq 1$ tel que $v^i \equiv 1 \pmod{d/x}$ et $r \in \{0, \dots, d-1\}$ vérifiant $xv^i \equiv x \equiv r \pmod{d}$. Si $r' \in Z(G, x)$ avec d' caractéristique de G , il existe $y \in L(G_D, 1)$ tel que $xy \equiv r' \pmod{d'}$. Comme $v \geq 2$, $L_r(\{P\}, xy)$ est infini et comme d' est un multiple de d , $L_r(G_N, xy)$ est infini donc $r' \in Y(G, x)$ et $L(G, x)$ est régulier. CQFD.

Nous dirons qu'une table non déterministe P de caractéristique d est première si, pour tout $u \in P$, $\text{pgcd}(u, d) = 1$. Des corollaires 2 et 3, nous déduisons immédiatement :

Corollaire 4 : Tout TUL-schéma contenant une table première est régulier.

En particulier tout TUL-schéma contenant une table stable est régulier.

Corollaire 5 : Soient G et G' deux TUL-schémas et $x \in \mathbb{N}_+$. Si $L(G, x)$ et $L(G', x)$ sont réguliers, alors $L(G \cup G', x)$ est aussi régulier.

Démonstration : Soit d la caractéristique de $G \cup G'$. Nous pouvons supposer que d est aussi la caractéristique de G et G' . En effet, dans le cas contraire, il suffit d'ajouter à chaque TUL-schéma, une table dérivée de caractéristique d .

Soit $\rho \in Z(G \cup G', x)$. Il existe $y, z \in L(G_D, 1)$, $y', z' \in L(G'_D, 1)$ vérifiant $xyy' \equiv xy'zz' \pmod{d}$ avec $zz' \geq 2$. Supposons $z \geq 2$. Il existe i tel que $xyz^i \equiv r \pmod{d}$ avec $r \in Z(G, x) \subseteq Y(G, x)$. Ainsi, il existe $u \in L(G_D, x)$ tel que $L_r(G_N, u)$ est infini et $uy'z'^i \in L(G_D \cup G'_D, x)$. Il est clair, alors, que $L_\rho(G_N, uy'z'^i)$ est infini, $\rho \in Y(G \cup G', x)$ et $L(G \cup G', x)$ est régulier. CQFD.

D'où le résultat suivant :

Corollaire 6 : Soient $G = G_N \cup G_D$ avec $G_D = \{(t_1), \dots, (t_p)\}$ et $x \in \mathbb{N}_+$. Si, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $L(G_N \cup \{(t_i)\}, x)$ est régulier, alors $L(G, x)$ est régulier.

Montrons, maintenant, la décidabilité de la condition qui apparaît dans l'énoncé du théorème 3. Comme les ensembles $Y(G, x)$ et $Z(G, x)$ sont finis, il suffit de montrer qu'ils sont effectivement constructibles pour obtenir le résultat principal de cet article :

Théorème 4 : Soit (G, x) un TUL-système de caractéristique d . Il est possible de déterminer si $L(G, x)$ est régulier et dans ce cas, de construire deux ensembles finis F et I tels que

$$L(G, x) = F \bigcup_{y \in I} (y + \mathbb{N}d).$$

Démonstration : Supposons, d'abord, que G ne possède pas de table de caractéristique égale à 1. Posons $G = G_N \cup G_D$ avec $G_N = \{P_1, \dots, P_m\}$, $n = \sup \{|P_j|/j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$ et $G_D = \{(t_1), \dots, (t_s)\} = \{D_1, \dots, D_s\}$. Nous pouvons supposer que, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $t_i \geq 2$. Alors, $Z(G, x) = \left. \begin{array}{l} \{r \in \{0, \dots, d-1\} \mid \text{il existe } \alpha \in G_D^* \text{ tel que } d \leq l(\alpha) \leq 2d \\ \text{et } S_\alpha(x) \cap (r + \mathbb{N}d) \neq \emptyset \} \end{array} \right\}$

est effectivement constructible. Pour construire $Y(G, x)$, reprenons les ensembles finis A et B utilisés lors de la démonstration du théorème 2.

$$L(G, x) = A \bigcup_{y \in B} L(G, y) \text{ avec } y \geq nd \text{ pour tout } y \in B.$$

Montrons que $r \in Y(G, x) \Leftrightarrow$ il existe $y \in B$ tel que $r \in Y(G, y)$.

Si $r \in Y(G, y)$, il existe $z \in L(G_D, y)$ tel que $L_r(G_N, z)$ est infini. Comme $y \in L(G, x)$, le lemme 7 implique qu'il existe $z' \in L(G_D, x)$ tel que $z \in L(G_N, z')$ donc $L_r(G_N, z')$ est infini et $r \in Y(G, x)$.

Réciproquement, si $r \in Y(G, x)$, il existe $z \in L(G_D, x)$ tel que $L_r(G_N, z)$ est infini. S'il existe $y \in B$ tel que $z \in L(G_D, y)$ alors $r \in Y(G, y)$. Sinon $l(z) < nd$ et il existe $y \in L(G_N, z) \cap B$ tel que $r \in Y(G, y)$. Prenons, maintenant, $y \in B$. Comme $y \geq nd$ et que, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $t_i \geq 2$, il est clair que $r \in Y(G, x) \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in G_D^*$, $\beta \in G_N^*$, $z \in S_{\alpha\beta}(y) \cap (r + \mathbb{N}d)$ avec $l(\alpha) < d$ et $d \leq l(\beta) < 2d$. Donc $Y(G, x)$ est constructible.

Dans le cas où $L(G, x)$ est régulier ($Y(G, x) \supseteq Z(G, x)$), déterminons les ensembles F et I de l'énoncé. Soit $r \in \{0, \dots, d-1\}$, distinguons deux cas :

1) $r \notin Y(G, x)$. Alors $\forall y \in B, r \notin Y(G, y)$ et $L_r(G, y)$ est fini. Comme $y \geq nd$, $L_r(G, y) = \bigcup_{\alpha \in H} (S_\alpha(y) \cap (r + \mathbb{N}d))$ avec $H = \{\alpha \in G^* \mid l(\alpha) < d\}$. Ainsi $L_r(G, x) = (A \cap (r + \mathbb{N}d)) \bigcup_{y \in B} L_r(G, y)$.

2) $r \in Y(G, x)$. Alors, il existe $z \in \bigcup_{y \in B} \bigcup_{\alpha \in H} S_\alpha(y)$ tel que $L_r(G_N, z)$ est infini.

Donc, d'après le théorème 2, nous pouvons trouver x_0 tel que

$$x_0 + \mathbb{N}d \subseteq L_r(G_N, z) \subseteq L_r(G, x).$$

Donc $L_r(G, x) = \{ t \in L_r(G, x) / t < x_0 \} \cup (x_0 + \mathbb{N}d)$.

Si G possède une table de caractéristique 1, distinguons trois cas :

- $L(G, x)$ fini. Alors, $L(G, x) = \{ 0, \dots, x \}$.
- $L(G, x)$ infini et $L(G_N, x)$ fini. Il est facile de voir que $L(G, x) = \mathbb{N}$.
- $L(G_N, x)$ infini. Alors, on peut trouver x_0 tel que

$$L(G, x) = \{ x \in L(G, x) / x < x_0 \} \cup \{ z \in \mathbb{N} / z \geq x_0 \}.$$

Comme d est un multiple de toutes les caractéristiques des tables de G , il est facile, dans tous les cas, de déterminer F et I . CQFD.

Nous allons montrer, maintenant, qu'en fait, la régularité du langage $L(G, x)$ ne dépend que de G et du reste de x dans la division entière par d , la caractéristique de G . Pour tester la régularité de $L(G, x)$, il suffit, alors, de construire $Y(G, y)$ et $Z(G, y)$ avec y équivalent à x modulo d et suffisamment grand pour que l'on puisse remplacer par y l'ensemble B qui apparaît dans la démonstration du théorème 4.

Lemme 8 : Soit $G = \{ P_1, \dots, P_m \}$ un \bar{D} TUL-schéma où, pour tout $i \in \{ 1, \dots, m \}$, u_i et d_i désignent respectivement le plus petit élément et la caractéristique de P_i . Si $y \in S_\alpha(x)$ avec $\alpha \in G^*$, alors il existe $s_1, \dots, s_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{N}$ et une permutation σ de $\{ 1, \dots, m \}$ tels que

$$y = xu_1^{s_1} \dots u_m^{s_m} + \lambda_1 d_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} \dots u_{\sigma(m)} + \dots + \lambda_{m-1} d_{\sigma(m-1)} u_{\sigma(m)} + \lambda_m d_{\sigma(m)}$$

avec $\sum_{i=1}^m s_i = l(\alpha)$.

Démonstration : Raisonnons par induction. Si $l(\alpha) = 0$, $y = x$. Nous prenons alors, pour tout $j \in \{ 1, \dots, m \}$, $s_j = \lambda_j = 0$ et $\sigma(j) = j$. Prenons $\alpha \in G^*$ et $z \in S_{\alpha P_i}(x)$. Il existe $y \in S_\alpha(x)$ tel que $z \in S_{P_i}(y)$ donc on peut trouver $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $z = yu_i + \mu d_i$. Supposons que y puisse se mettre sous la forme écrite dans l'énoncé. Il existe alors $k \in \{ 1, \dots, m \}$ tel que $i = \sigma(k)$. Posons :

$$\begin{aligned} \gamma(j) &= \sigma(j) & \text{et} & & \mu_j &= \lambda_j u_i, & \text{pour tout} & & j \in \{ 1, \dots, k-1 \}, \\ \gamma(j) &= \sigma(j+1) & \text{et} & & \mu_j &= \lambda_{j+1}, & \text{pour tout} & & j \in \{ k, \dots, m-1 \}, \\ \gamma(m) &= \sigma(k) = i & \text{et} & & \mu_m &= \mu + \lambda_k u_{\sigma(k)} \dots u_{\sigma(m)}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que γ est une permutation de $\{ 1, \dots, m \}$, que

$$z = xu_1^{s_1} \dots u_i^{s_i+1} \dots u_m^{s_m} + \mu_1 d_{\gamma(1)} u_{\gamma(2)} \dots u_{\gamma(m)} + \dots + \mu_m d_{\gamma(m)}$$

avec $\sum_{j=1}^m s_j + 1 = l(\alpha) + 1 = l(\alpha P_i)$. CQFD.

Corollaire 7 : Soient G un TUL-schéma de caractéristique d , $x, y \in \mathbb{N}_+$ tels que $x \equiv y \pmod{d}$. Alors $L(G, x)$ régulier $\Leftrightarrow L(G, y)$ régulier.

Démonstration : Si G possède une table stable, $L(G, z)$ est toujours régulier.

Dans le cas contraire, posons $G = G_N \cup G_D$ avec $G_N = \{P_1, \dots, P_m\}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, u_j et d_j sont respectivement le plus petit élément et la caractéristique de P_j . Prenons $r \in Y(G, x)$, et $\alpha \in L(G_D, 1)$ tels que pour tout s , il existe $y_1 \geq s$, $\alpha \in G_N^*$ avec $y_1 \in S_\alpha(xu) \cap (r + \mathbb{N}d)$. Nous pouvons supposer que, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $l_{P_j}(\alpha) \geq 1$.

S'il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $u_i = 0$, alors $\alpha = \alpha_1 P_i \alpha_2$ et il existe $z \in S_{\alpha_1 P_i}(xu)$ tel que $y_1 \in S_{\alpha_2}(z)$.

Comme z est multiple de d_i , il existe $z' \in L(G_N, yu)$ tel que $z' \equiv z \pmod{d}$ et $z' \geq nd$ où $n = \sup \{ |P_j|/j \in \{1, \dots, m\} \}$. Et, d'après le lemme 3, $r \in Y(G, y)$.

Sinon, toutes les tables de G_N sont propres, et, comme G ne possède aucune table stable, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $u_j \geq 2$. y_1 peut s'écrire

$$xuu_1^{s_1} \dots u_m^{s_m} + \lambda_1 d_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} \dots u_{\sigma(m)} + \dots + \lambda_m d_{\sigma(m)}.$$

Posons $z' = yuu_1^{s_1-1} \dots u_m^{s_m-1}$ et $\beta = P_{\sigma(1)} \dots P_{\sigma(m)}$. Pour s suffisamment grand, il est clair que $z' \geq yu2^{l(\alpha)-m} \geq nd$. Donc, en utilisant le même raisonnement qu'au lemme 3, nous pouvons montrer qu'il existe $y'_1 \in S_\beta(z') \cap (r + \mathbb{N}d)$ et $r \in Y(G, y)$. Nous en déduisons $Y(G, x) = Y(G, y)$ et, comme $Z(G, x) = Z(G, y)$, nous obtenons le résultat énoncé. QCFD.

REFERENCES

- [1] HERMAN G. T., LEE K. P., LEEUWEN J. VAN, ROZENBERG G., *Characterization of Unary Developmental languages*. Discrete Mathematics, 6 (1973), 235-247.
- [2] HERMAN G. T., ROZENBERG G., *Developmental Systems and languages*, North-Holland Publishing Company (1975).
- [3] LATTEUX M., *Langages simultanés*, Publication n° 46 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille I (1974).
- [4] LATTEUX M., *Deux problèmes décidables concernant les TUL-langages*, Publication n° 51 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille I (1975).
- [5] LEE K. P., ROZENBERG G., *Development Systems with Finite Axioms Sets*, Internl. J. Comput. Math., 4, section A (1974), 43-68.
- [6] LINDENMAYER A., *Mathematical Models for Cellular Interactions in Development*, Part. I, J. theoret. Biol., 18 (1968), 280-299.
- [7] LINDENMAYER A., *Mathematical Models for Cellular Interactions in Development*, Part. II, J. theoret. Biol., 18 (1968), 300-315.
- [8] ROZENBERG G., *TOL-Systems and Languages*, Information and Control, 23 (1973), 357-381.
- [9] ROZENBERG G., SALOMA A. (Eds.), *L-Systems*, Lecture Notes in Computer Science, n° 15, Spinger-Verlag, Heidelberg (1974).
- [10] SALOMAA A., *Solution of a Decision Problem Concerning Unary Lindenmayer Systems*, Discrete Mathematics, 9 (1974), 71-77.
- [11] SALOMAA A., *Comparative Decisions Problems between Sequential and Parallel Rewriting*, Computer Science Department, University of Aarhus (1975).
- [12] VITANYI P. M. B., *Digraphs Associated with Iterated Homomorphisms*, Conférence on Formal Languages, Automata and Development, Noordwijkerhout (1975), à paraître.