

D. GOUYOU-BEAUCHAMPS

**Deux propriétés combinatoires du langage
de Lukasiewicz**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle.
Informatique théorique*, tome 9, n° R3 (1975), p. 13-24

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1975__9_3_13_0

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DEUX PROPRIETES COMBINATOIRES DU LANGAGE DE LUKASIEWICZ

par D. GOUYOU-BEAUCHAMPS ⁽¹⁾

Communiqué par R. CORI

Résumé. — *On utilise une propriété combinatoire des langages de Lukasiewicz (ou des expressions arithmétiques en notation préfixée) pour énumérer les arbres dessinés dans le plan ainsi que les chemins minimaux.*

Bien que le domaine de la combinatoire (Berge [1], Hall [12]) s'oriente vers les problèmes d'existence et de structuration des ensembles finis, les questions de dénombrement n'ont pas perdu de leur intérêt. En effet, seule une connaissance approfondie de la structure d'un ensemble permet de donner une formule exacte pour l'énumération de ses éléments. Ainsi l'établissement d'une telle formule clôt naturellement l'étude des propriétés d'un objet combinatoire. D'autre part, une formule agréable ou une fonction génératrice simple reflètent souvent des propriétés remarquables. Le traité de D. Foata et M. P. Schützenberger [9] est une excellente illustration de ce point de vue.

Le nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ est un de ceux qui intriguent depuis fort longtemps de nombreux auteurs car des coefficients de la forme $\frac{1}{p+1} C_n^p$ (dont il est un cas particulier) interviennent dans de très nombreuses formules d'énumération. Citons, entre autres, le nombre de différentes façons de partager un polygone en triangles (Euler [8], Segner [23]), le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs (Rodrigues [21], Catalan [4]), le problème du scrutin (Bertrand [3]) pour ne parler que des plus connues. On retrouve aussi des nombres de type Catalan $\left(\frac{1}{p+1} C_n^p\right)$ dans des problèmes issus de la statistique et de la recherche opérationnelle comme les chemins

(1) Université de Bordeaux I, U.E.R. Mathématiques et Informatique.

sous-diagonaux présentant n virages ou les fréquences de suites de « pile » dans une épreuve de pile ou face (Narayana [18], Kreweras [16]). Plus récemment, le nombre de Catalan a été rencontré par les théoriciens des langages comme comptant les systèmes de parenthèses bien formés (ou mots du langage restreint de Dyck sur une lettre).

Divers travaux (Gross [11], Kuich [17], Raney [20], Klarner [15], Cori [6], [7]) ont montré que certaines de ces formules pouvaient être retrouvées en construisant une bijection entre les objets à énumérer et les mots de divers langages (celui des systèmes de parenthèses ou d'autres s'en déduisant simplement). Certains auteurs obtiennent ces dénombrements par l'étude d'équations vérifiées par les séries génératrices, équations données par le passage à l'image commutative des grammaires des langages en question : il a été noté, en particulier, que l'algèbricité des séries obtenues résultait de l'existence de grammaires algébriques (context-free). Raney utilise, lui, une propriété combinatoire remarquable du langage de Lukasiewicz L (ou des expressions arithmétiques en notation polonaise préfixée), qui lui permet de donner une démonstration purement combinatoire de la formule d'inversion de Lagrange-Burman (cf. Whittaker et Watson [24] et Comtet [5]).

L'intérêt de cette dernière méthode est de pouvoir mettre en bijection chaque élément de l'ensemble à énumérer non pas seulement avec le mot d'un langage qui le code, mais avec la famille des conjugués de ce mot. En effet, il est souvent plus facile de compter dans le langage formé par les conjugués des mots de L que dans L lui-même. Comme les conjugués n'ont pas de rapports immédiats avec les objets codés, les propriétés remarquables qui servent au dénombrement de ces conjugués ne peuvent être perçues sur l'ensemble à énumérer. Cela explique que, dans certains cas, l'énumération directe soit plus complexe que celle qui utilise le langage des conjugués. Mais on ne peut appliquer directement la propriété de Raney au dénombrement des chemins sous-diagonaux car elle ne prend en compte ni les facteurs gauches du langage de Lukasiewicz ni les problèmes de pics dans ce langage.

Aussi, le but de cet article est de compléter cette propriété par deux autres propriétés du langage de Lukasiewicz ; celles-ci permettront de retrouver la plupart des résultats énumératifs de Narayana [18], Goodman et Narayana [10] et Klarner [15] concernant les chemins sous-diagonaux. On présentera aussi un nouveau résultat : le nombre d'arbres pointés dessinés planaires ayant n sommets dont k sont pendants. Tous ces résultats ont la caractéristique commune de faire intervenir des facteurs de la forme $\frac{1}{p+1} C_n^p$.

Dans le premier paragraphe, on présente le langage de Lukasiewicz et on rappelle la propriété de Raney. Comme celle-ci ne peut s'appliquer à des facteurs gauches du langage de Lukasiewicz mais seulement à des puissances de celui-ci, on exhibe, dans le deuxième paragraphe une bijection entre ces deux ensembles (propriété 3). Dans le paragraphe 3, on étudie plus en détail la

propriété de Raney quand on s'intéresse au nombre de pics d'un mot et de ses conjugués et on en déduit la propriété 5, outil essentiel des énumérations du paragraphe suivant. Ce dernier est consacré en effet à la démonstration des propriétés 6, 7 et 8 qui donnent les formules d'énumération annoncées plus haut.

I. PRESENTATION DU LANGAGE DE LUKASIEWICZ

On utilise un alphabet infini X composé des lettres

$X = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \}$. Les éléments du monoïde libre X^* engendré par X sont des mots. On note 1 le mot vide (qui ne comprend aucune lettre). On appelle longueur d'un mot f le nombre de lettres qui le composent et on la note $|f|$.

g est facteur de f si $f = f_1 g f_2$; si f_1 (resp. f_2) est vide, g est dit facteur gauche (resp. facteur droit) de f . Un mot g est dit facteur strict si g est différent de f . Deux mots f et g sont dits conjugués s'il existe f_1 et f_2 tels que $f = f_1 f_2$ et $g = f_2 f_1$.

Soit δ l'application de X dans l'ensemble des entiers relatifs Z donnée par $\delta(x_i) = i - 1$, cette application s'étend en un morphisme de X^* dans Z de la façon suivante : $\delta(1) = 0$ et $\delta(a_1 a_2 \dots a_p) = \sum_{i=1}^p \delta(a_i)$. Ainsi, l'image par δ d'un mot f de X^* est égale à la somme des indices des lettres figurant dans f diminuée de la longueur de f .

Le langage L de Lukasiewicz est défini alors comme suit :

$$f \in L \Leftrightarrow \delta(f) = -1 \quad \text{et} \quad \delta(f') \geq 0$$

pour tout mot f' facteur gauche strict de f .

En interprétant chaque lettre $x_n (n > 0)$ comme représentant un opérateur n -aire et la lettre x_0 comme représentant une variable, on retrouve le langage des expressions arithmétiques en notation polonaise préfixée.

Le langage de Lukasiewicz peut être aussi défini par sa grammaire qui est donnée par la propriété 1 :

Propriété 1. Si f appartient à L : ou bien f est composé de la seule lettre x_0 ou bien f se décompose de manière unique sous la forme

$$f = x_n f_1 f_2 \dots f_n$$

où les f_i appartiennent à L . Ce qui peut s'écrire sous forme condensée :

$$L = x_0 + x_1 L + x_2 L^2 + \dots + x_n L^n + \dots$$

On peut citer enfin la propriété de Raney [20] dont une démonstration est donnée par Schützenberger [22].

Propriété 2. Tout mot f tel que $\delta(f) = -p$ avec $p > 0$ admet p factorisations de la forme : $f = f_1 f_2$ telles que $f_2 f_1$ appartienne à L^p .

CONSEQUENCE : Le nombre d'éléments de L^p ayant m lettres égal à p/m fois le nombre d'éléments f de $X^m \cap \delta^{-1}(-p)$.

II. FACTEURS GAUCHES ET PUISSANCES DE L

Les expressions où n'apparaissent que des opérateurs binaires et des variables constituent un sous-langage de L qu'on note D . Ainsi $D = X_2^* \cap L$, X_2 étant l'alphabet constitué des deux lettres x_0 et x_2 . On appelle X' l'alphabet $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, L' le langage composé des mots de L de longueur plus grande que 1 (ainsi $L = x_0 + L'$), M le langage des facteurs gauches des mots de L et F celui de facteurs gauches des mots de D .

REMARQUE : Un mot f de X^* (resp. X_2^*) appartient à M (resp. F) si et seulement si $\delta(f') \geq 0$ pour tout facteur gauche strict f' de f .

La propriété de Raney permet de compter les mots appartenant aux puissances de L . Le résultat suivant construit une bijection entre ces puissances et le langage M . Il permet ainsi, dans la partie III, de déduire des formules d'énumération pour les mots de ce langage.

Propriété 3. Il existe une bijection λ de X^* dans $X'X^* + x_0$ telle que :

- $\lambda(M \cap \delta^{-1}(q)) = L^q$ pour tout $q \geq 1$
- $\lambda(M \cap \delta^{-1}(0)) = L$.

Pour construire λ , on introduit les applications suivantes :

- α est le morphisme de X^* dans X_2^* donné par $\alpha(x_i) = x_2^i x_0$.
- β est l'application qui, à un mot f de X_2^* , associe le mot $\tilde{f} x_0$ de $X_2 x_0$ (où f est le mot obtenu en prenant l'image miroir de \tilde{f} et en échangeant les lettres x_2 et x_0 dans ce mot).

Dans la partie V, on vérifiera que l'application $\lambda = \alpha^{-1} \beta \alpha$ satisfait bien les conditions de la propriété 3.

EXEMPLE : Soit $f = x_4 x_2 x_0 x_1 x_2 x_0 x_0$

$$g = \alpha(f) = x_2 x_2 x_2 x_2 x_0 x_2 x_2 x_0 x_0 x_2 x_0 x_2 x_2 x_0 x_0 x_0$$

$$\tilde{g} = x_2 x_2 x_2 x_0 x_0 x_2 x_0 x_2 x_2 x_0 x_0 x_2 x_0 x_0 x_0 x_0$$

$$h = \beta(g) = (x_2 x_2 x_2 x_0)(x_0)(x_2 x_0)(x_2 x_2 x_0)(x_0)(x_2 x_0)(x_0)(x_0)(x_0)(x_0)$$

$$\lambda(f = \alpha^{-1}(h)) = x_3 x_0 x_1 x_2 x_0 x_1 x_0 x_0 x_0 x_0$$

III. CONJUGUES DE RANEY ET NOMBRE DE PICS

Définitions. Soit f un mot de X^* , tel que $\delta(f) = -p$ avec $p > 0$; un mot g de X^* , conjugué de f , est dit *conjugué de Raney* de f si et seulement si g appartient à L^p .

– De même, on appelle *correspondance de Raney* l'application de X^* dans (X^*) qui, à un mot f de X^* , fait correspondre l'ensemble de ses conjugués de Raney.

– Soit f un mot de X^* , on appelle *pic* tout facteur $x_n x_0$ avec $n > 0$.

On voit facilement que le nombre de pics d'un conjugué d'un mot f peut différer d'une unité par rapport au nombre de pics de f ; par contre :

Propriété 4. La correspondance de Raney pour X^*x_0 conserve le nombre de pics.

En effet, les conjugués de Raney d'un mot f de $X^*x_0 \cap \delta^{-1}(-p)$ sont tous dans L^p et par conséquent se terminent par x_0 . Ainsi, tout pic de f est conservé.

On va déduire de la propriété 4 le résultat suivant, qui est un outil essentiel pour les applications énumératives :

Propriété 5. Pour tous les entiers p, q, n avec $p > q \geq n \geq 1$, le nombre n pics de $D^{p-q} \cap X_2^{p+q}$ est égal à $\frac{p-q}{p-n}$ fois le nombre d'éléments à n pics de $X^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$.

La démonstration de cette propriété s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 4. Tout mot f à n pics appartenant à $X^*x_0^2$, de degré p en x_0 , possède exactement $p - n$ factorisations de la forme $f = f_1 f_2$ telles que $f_2 f_1$ appartiennent à $X^*x_0^2$. Ces conjugués ont aussi n pics.

Preuve du lemme : Pour obtenir une telle factorisation, « on coupe » f après deux occurrences consécutives de x_0 ; le nombre de telles occurrences est égal au nombre p d'occurrences de x_0 diminué du nombre de celles précédées d'un x_i ($i > 0$). Ce dernier n'est autre que le nombre n de pics de f . Pour de telles factorisations, il est clair que le nombre de pics du mot $f_1 f_1$ est aussi n .

Preuve de la propriété : On appelle $E_{p,q}^n$ l'ensemble des éléments (f_1, f_2) de $X_2^* \times X_2 X_2^*$ tels que $f_2 f_1$ et $f_1 f_2$ soient des mots à n pics appartenant à $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$.

Soit ρ la relation d'équivalence définie dans $X_2^* \times X_2 X_2^*$ par :

$$(f_1, f_2)\rho(g_1, g_2) \Leftrightarrow f_1 f_2 = g_1 g_2$$

De même, on appelle $B_{p,q}^n$ l'ensemble des éléments (f_1, f_2) de $X_2^* \times X_2 X_2^*$ tels que $f_2 f_1$ soit un mot à n pics appartenant à $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap D^{p-q}$ et $f_1 f_2$ un mot à n pics appartenant à $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$.

D'après la propriété 4, le nombre d'éléments de $B_{p,q}^n/\rho$ est égal au nombre de mots à n pics de $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap D^{p-q}$ divisé par $p - q$. De même, d'après le

lemme 4, le nombre d'éléments de $E_{p,q}^n/\rho$ est égal au nombre de mots à n pics de $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$ divisé par $p-n$.

Soit γ l'application de $B_{p,q}^n/\rho$ dans $E_{p,q}^n/\rho$ qui, à la classe de $B_{p,q}^n$ qui contient (f_1, f_2) , fait correspondre la classe $E_{p,q}^n$ qui contient (g_1, g_2) tq $f_1 f_2 = g_1 g_2$.

γ est bien une application car $D^{p-q} \cap X_2^{p+q-2}x_0^2$ est inclus dans $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$.

De plus, il est clair que γ est biunivoque, car pour un mot f de

$$X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$$

l'ensemble des factorisations de Raney est inclus dans l'ensemble des factorisations de $f = f_1 f_2$ telles que $f_2 f_1$ appartienne à $X_2^{p+q-2}x_0^2 \cap \delta^{-1}(q-p)$.

On peut donc affirmer que les cardinaux de $B_{p,q}^n/\rho$ et $E_{p,q}^n/\rho$ sont égaux, et la propriété 5 découle de cette égalité.

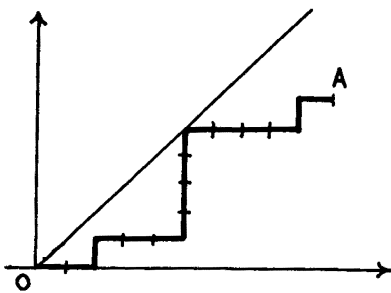
IV. APPLICATIONS A L'ENUMERATION

1) Enumération des chemins sous-diagonaux

Étant donnés deux axes de coordonnées, on appelle chemin minimal toute ligne polygonale, joignant l'origine $O(o, o)$ à un point A de coordonnées (p, q) , constituée par une suite de points $0, A_1, A_2, \dots, A_n, A$ tels que les coordonnées de A_{i+1} vérifient l'une des deux conditions :

- (1) $p_{i+1} = p_i + 1$ et $q_{i+1} = q_i$
- (2) $p_{i+1} = p_i$ et $q_{i+1} = q_i + 1$

Un tel chemin est dit *sous-diagonal* dans le cas où, pour tout $i, p_i \geq q_i$ et où $p \geq q$.



La figure 1 présente un exemple de chemin sous-diagonal joignant l'origine au point A de coordonnées $(10, 6)$:

Figure 1

La notion de chemin minimal est classique en combinatoire. On représente, souvent, une partie P de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ par un chemin minimal, où les pas horizontaux correspondent aux points de \bar{P} et les verticaux aux points de P (cf. Comtet [5]). Les chemins minimaux interviennent aussi dans la démonstration de D. André concernant le problème du scrutin [3], dans d'autres problèmes liés à ce dernier ou aux probabilités dans le jeu de

pile ou face (cf. Kreweras [16], Narayana [18], Narayana, Chorneyko et Sathe [19], Jackson et Entringer [14]).

Il est clair que l'on peut coder un chemin minimal par une suite de lettres x_2 et x_0 , chaque pas horizontal étant codé par x_2 et chaque pas vertical par x_0 . Ainsi le chemin minimal représenté par la figure 1 est codé :

$$x_2x_2x_0x_2x_2x_2x_0x_0x_0x_0x_2x_2x_2x_2x_0x_2$$

Un chemin est sous-diagonal si et seulement si le mot f qui le code est tel que : $f x_0$ appartienne à F .

Propriété 6. Le cardinal $N_{p,q}$ de l'ensemble des chemins sous-diagonaux joignant l'origine au point de coordonnées (p, q) avec $p \geq q$ est égal à :

$$N_{p,q} = (p - q + 1) \frac{(p + q)!}{q! (p + 1)!}$$

Preuve de la propriété 6 :

Le cardinal $N_{p,q}$ de l'ensemble des chemins sous-diagonaux est donné par :

$$N_{p,q} = \text{Card} (F \cap X_2^{p+q} \cap \delta^{-1}(p - q)).$$

D'après le lemme 3 :

$$N_{p,q} = \text{Card} (D^{p-q+1} \cap X_2^{p+q+1}).$$

En appliquant la conséquence de la propriété 2, on obtient :

$$N_{p,q} = \frac{p - q + 1}{p + q + 1} \text{Card} (X_2^{p+q+1} \cap \delta^{-1}(q - p - 1)).$$

L'ensemble figurant au second membre de l'égalité n'est autre que celui des mots formés de q lettres x_2 et $p + 1$ lettres x_0 .

$$N_{p,q} = (p - q + 1) \frac{(p + q)!}{q! (p + 1)!}$$

2) Enumération suivant le nombre de virages

On appelle virage à gauche d'un chemin minimal une suite de 3 points A_i, A_{i+1}, A_{i+2} appartenant à ce chemin dont les coordonnées vérifient les deux conditions suivantes :

- (1) $p_i = p_{i+1} - 1 = p_{i+2} - 1$
- (2) $q_i = q_{i+1} = q_{i+2} - 1$

Ainsi, le chemin minimal représenté par la figure 1 possède 3 virages à gauche.

Il est clair que le nombre de virages à gauche d'un chemin minimal codé par le mot f est le nombre de pics de f .

Propriété 7. Le cardinal $\alpha_{p,q}^n$ de l'ensemble des chemins sous-diagonaux à n virages à gauche joignant l'origine au point A de coordonnées (p, q) avec $p \geq q \geq n \geq 1$ est égal à :

$$\alpha_{p,q}^n = \frac{p - q + 1}{p - n + 1} C_p^n C_{q-1}^{n-1}.$$

Cette énumération utilise le lemme suivant :

Lemme 5. Il y a $C_p^n C_{q-1}^{n-1}$ mots à n pics de $X_2^* x_0$ formés de p lettres x_0 et q lettres x_2 .

Preuve du lemme : Pour former de tels mots, on écrit d'abord les n facteurs $x_2 x_0$. Puis, on intercale les $(p - n)$ lettres x_0 restantes soit à la suite des x_0 déjà écrits soit devant le premier x_2 , c'est-à-dire en $n + 1$ places. Il y a donc C_p^n façons de procéder. Enfin, on ajoute les $(q - n)$ lettres x_2 restantes de façon à ne pas ajouter de pics et à terminer le mot par un x_0 . Il est clair que l'on ne peut les placer que devant des lettres x_2 déjà écrites, c'est-à-dire en n places. Il y a donc C_{q-1}^{n-1} façons de procéder.

Preuve de la propriété 7 : A l'aide du codage des chemins sous-diagonaux défini plus haut, $\alpha_{p,q}^n$ peut être considéré comme le nombre de facteur gauche à n pics de D possédant p lettres x_2 et q lettres x_0 . Comme tout facteur gauche f d'un mot de D , possédant au moins un x_2 , commence par un x_2 , $\beta(f)$ a le même nombre de pics que f . Et ainsi, d'après le lemme 3, $\alpha_{p,q}^n$ est encore le nombre de mots de longueur $p + q + 1$ de D^{p-q+1} possédant n pics. Mais selon la propriété 4, $\alpha_{p,q}^n$ est aussi $\frac{p - q + 1}{p - n + 1}$ fois le nombre de mots à n pics de X_2^{p+q+1} vérifiant $\delta(f) = q - p - 1$ et se terminant par x_0^2 .

Enfin, le lemme 5 implique :

$$\alpha_{p,q}^n = \frac{p - q + 1}{p - n + 1} C_p^n C_{q-1}^{n-1}$$

3) Arbres dessinés

Un arbre peut être défini comme un graphe sans cycle possédant n sommets et $n - 1$ arêtes ($n > 1$). Un sommet x est dit pendant s'il n'existe qu'une seule arête incidente à x . (Berge [2]). Un arbre pointé est un arbre dont on a distingué une arête et une orientation pour cette arête. On obtient un codage pour le dessin d'un tel arbre (ou pour une carte qui le représente au sens de [15] et de [7]) en parcourant l'unique face à partir de l'arête orientée distinguée et en codant les arêtes, dans l'ordre où elles interviennent, par x_2 si elles sont rencontrées pour la première fois et par x_0 sinon.

L'ensemble des mots obtenus constitue le langage des systèmes de parenthèses (cf. Cori [7] et Klarner [15]), soit les mots f appartenant à F tels que $\delta(f) = 0$.

On peut enfin remarquer que les pics d'un mot qui code un arbre correspondent à des sommets pendants de celui-ci. En effet, au cours du codage,

c'est seulement dans le cas d'un sommet pendant que l'on rencontre successivement deux fois la même arête et donc un facteur x_2x_0 . Cependant, dans le cas où le sommet origine de l'arête distinguée est un sommet pendant, le nombre de sommets pendant est supérieur d'une unité au nombre de pics du mot f qui code un tel arbre. f est alors de la forme $f = x_2gx_0$, g étant un mot de F tel que $\delta(g) = 0$.

Les mots de F qui codent un arbre dessiné pointé à p arêtes et n sommets pendants sont donc :

- les mots f de $F \cap \delta^{-1}(0)$ qui ont $2p$ lettres et n pics sauf ceux qui sont de la forme $f = x_2gx_0$, g étant un mot de $F \cap \delta^{-1}(0)$ à $2p - 2$ lettres et n pics (ces mots correspondant à des arbres à $p + 1$ sommets pendants);

- les mots f de $F \cap \delta^{-1}(0)$ de la forme $f = x_2gx_0$, g étant un mot de $F \cap \delta^{-1}(0)$ à $2p - 2$ lettres et $n - 1$ pics.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Propriété 8. Le nombre β_p^n d'arbres dessinés plantés ayant p arêtes et n sommets pendants ($p \geq n > 1$) est égal à :

$$\beta_p^n = \alpha_{p,p}^n - \alpha_{p-1,p-1}^n + \alpha_{p-1,p-1}^{n-1} = \frac{2}{(p-1)} C_p^n C_{p-1}^{n-2}$$

V. DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3

Pour établir la propriété 3, on démontre d'abord 2 lemmes relatifs au morphisme α .

Lemme 1. La restriction de α à l'ensemble M est une bijection de M sur $(F \cap X_2^*x_0) \cup \{1\}$.

D'abord α est une bijection de X^* sur $1 + X_2^*x_0$. En effet, soit g un mot de $X_0^*x_0$; g s'écrit : $g = x_0^{i_1}x_2^{j_1}x_0^{i_2}x_2^{j_2}x_0^{i_3}, \dots, x_0^{i_n}x_2^{j_n}x_0^{i_{n+1}}x_0$

où les i_k et les j_k sont strictement positifs (sauf i_1 et i_{n+1} qui peuvent être nuls).

$\alpha^{-2}(g)$ est donné par :

$$\alpha^{-1}(g) = x_0^{i_1}x_{j_1}x_0^{i_2-1}x_{j_2}x_0^{i_3-1} \dots x_0^{i_n-1}x_{j_n}x_0^{i_{n+1}}.$$

On observe que les occurrences de x_0 dans g jouent un rôle de « séparateurs » et permettent de construire l'image inverse de g . Soit donc f un mot de M et soit $g = \alpha(f)$, g se termine par x_0 ; montrons que tout facteur gauche strict g' de g vérifie $\delta(g') \geq 0$. Soit g' un tel facteur, alors g s'écrit $g = g'g''$ avec $g'' \neq 1$, et g' s'écrit de manière unique sous la forme : $g'_1x_2^i$ ($i \geq 0$) où g'_1 est, ou bien vide, ou bien élément de $X_2^*x_0$.

- Dans le premier cas, $\delta(g') = \delta(x_2^i) = i$ est positif ou nul.

- Dans le second cas, on peut écrire $f = \alpha^{-1}(g'_1)f''$, avec $f'' \neq 1$ car $f'' = \alpha^{-1}(x_2^i g'')$.

$\alpha^{-1}(g'_1)$, alors facteur gauche strict de f , vérifie $\delta(\alpha^{-1}(g'_1)) \geq 0$ et donc $\delta(g') \geq \delta(g'_1)$ est positif ou nul.

Et ainsi, $\alpha(f)$ appartient à $(F \cap X_2^*x_0) \cup \{1\}$.

Réciproquement, soit g un mot de F se terminant par x_0 , α étant une surjection, il existe un mot f de X^* tel que $\alpha(f) = g$. Tout facteur gauche strict f' de f est tel que $\alpha(f')$ est facteur gauche strict de g ; ainsi $\delta(f') \geq \delta(\alpha(f')) \geq 0$ et f appartient à M .

On a donc démontré l'égalité :

$$\alpha(M) = (F \cap X_2^*x_0) \cup \{1\}.$$

Lemme 2. *L'image par α de L^q est D^q ($q > 0$).*

En effet, d'après le lemme 1, $\alpha(L)$ est inclus dans F ; mais pour tout mot f de L :

$$\delta(\alpha(f)) = \alpha(f) = -1.$$

Ainsi $\alpha(L) = D$. Le lemme découle alors du fait que α est un morphisme : $\alpha(L^q) = (\alpha(L))^q$.

Soit, à présent, \tilde{f} l'image miroir d'un mot f de X_2^* et \bar{f} son image par échange des lettres x_0 et x_2 . β a été définie comme l'application de X_2^* dans $X_2^*x_0$ donné par $\beta(f) = \tilde{f}x_0$. Bien évidemment β est une bijection.

Lemme 3. *La restriction de β à $F \cap \delta^{-1}(q)$ est une bijection de ce langage sur D^{q+1} ($q \geq 0$).*

Soit f un mot de $F \cap \delta^{-1}(q)$, il est clair que :

$$\delta(\beta(f)) = -\delta(f) - 1 = -q - 1$$

car on échange les x_0 en x_2 et on ajoute x_0 .

Soit f_1 un facteur gauche strict de $\beta(f)$. Ainsi : $\beta(f) = f_1f_2x_0$; $f = \tilde{f}_2f_1$. \tilde{f}_2 facteur gauche de f vérifie $\delta(\tilde{f}_2) \geq 0$. Ce qui entraîne, puisque $\delta(f) = q$, que :

$$\delta(\tilde{f}_1) = -\delta(f_1) = -\delta(f) + \delta(\tilde{f}_2) \geq -q.$$

Ainsi $\beta(f)$ appartient à D^{q+1} .

Un raisonnement analogue établit que, si g est élément de D^{q+1} , alors $\beta^{-1}(g)$ appartient à $F \cap \delta^{-1}(q)$, et l'égalité est démontrée.

Preuve de la propriété 3 :

Posons $\lambda = \alpha^{-1}\beta\alpha$, on vérifie que $\lambda(M)$ est bien défini, car d'après le lemme 1, $\alpha(M) = (f \cap X_2^*x_0) \cup \{1\}$ qui est inclus dans $X_2^*x_0 + 1$; β applique cet ensemble sur $x_0 + x_2X_2^*x_0$ et α^{-1} est alors bien défini.

Supposons $q > 1$. Calculons $\lambda(M \cap \delta^{-1}(q))$ d'après les lemmes 1, 3 et 2.

$$\begin{aligned} \alpha(M \cap \delta^{-1}(q)) &= F \cap \delta^{-1}(q) \cap X_2^*x_0 \\ \beta\alpha(M \cap \delta^{-1}(q)) &= D^{q+1} \cap x_2X_2^* = D'D^q \\ \alpha^{-1}\beta\alpha(M \cap \delta^{-1}(q)) &= L'L^q. \end{aligned}$$

Dans le cas où $q = 0$, la première des 3 égalités reste vraie, la seconde devient :

$$\beta\alpha(M \cap \delta^{-1}(0)) = (D \cap x_2 X_2^*) + \{x_0\} = D$$

d'où finalement :

$$\alpha^{-1}\beta\alpha(M \cap \delta^{-1}(0)) = L.$$

ce qui achève la preuve de la proposition 3.

REMARQUE 1 : On a, pour tout $f \in X^*$:

$$|\lambda(f)| = |f| + \delta(f) + 1.$$

Introduisons le morphisme I de X^* dans Z défini par $I(x_i) = i$ ($\forall i \geq 0$). D'après la définition de δ , I et δ sont liés par la relation :

$$(1) \quad I(f) = \delta(f) + |f|.$$

Examinons l'effet de α , β et λ sur les morphismes δ et I . On a vu précédemment que δ est invariant par α , d'autre part, pour toute lettre x_i ,

$$I(\alpha x_i) = I(x_2^i x_0) = 2i.$$

Ainsi :

$$(2) \quad I(\alpha f) = 2I(f).$$

Quant à β , on remarque qu'il augmente d'une unité la longueur d'un mot et que :

$$(3) \quad \delta(\beta f) = -\delta(f) - 1.$$

A l'aide de ces propriétés, on peut vérifier la relation annoncée pour $|\lambda(f)|$. En effet, posons :

$$f_1 = \alpha f \quad , \quad f_2 = \beta f_1.$$

D'après (1) : $|\lambda f| = I(f) - \delta(\lambda f)$, en utilisant (2) et en appliquant l'invariance de δ par α on obtient :

$$|\lambda f| = \frac{|f_2| - \delta(f_2)}{2}.$$

La relation (3) permet alors d'écrire :

$$|\lambda f| = \frac{I(f_1) + 2}{2}.$$

Enfin, une dernière application de la relation (2) donne $|\lambda f| = I(f) + 1$ et la relation annoncée découle de (1).

REMARQUE 2. Si $f = x_0^{j_0} x_{i_1} x_0^{j_1} x_{i_2} x_0^{j_2} \dots x_{i_n} x_0^{j_n}$ avec les i_k supérieurs ou égaux à 1 et les j_k positifs ou nuls, λf est donnée par :

$$\lambda f = x_{j_n+1} x_0^{i_n-1} x_{j_{n-1}+1} x_0^{i_{n-1}-1} \dots x_{j_1+1} x_0^{i_1-1} x_{j_0}.$$

REFERENCES

- [1] BERGE (C.), *Principes de combinatoire*. Dunod, Paris, 1968.
- [2] BERGE (C.), *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.
- [3] BERTRAND, *Solution d'un problème*. C. R. Acad. Sci. Paris, 105 (1887), 369.
- [4] CATALAN (E.), *Note sur une équation aux différences finies*. J. Math. Pures Appl., 3 (1838), 508-516.
- [5] COMTET, *Analyse combinatoire*. P.U.F. Paris (1970).
- [6] CORI (R.), *Some applications of formal languages to enumerations problems*. Tagung über Formale Sprachen. Oberwolfach 1970. Mitteilungen der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 8 (1970), 10-12.
- [7] CORI (R.), *Un code pour les graphes planaires et ses applications*. Thèse de Doctorat d'État, Paris 1973.
- [8] EULER (L.), *Novi Comentarum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 7 (1758-1759), 13-14.
- [9] FOATA (D.), SCHUTZENBERGER (M. P.), *Théorie géométrique des polynômes eulériens*. Lectures Notes in Mathematics n° 138. Springer-Verlag Berlin 1970.
- [10] GOODMAN-NARAYANA, *Lattice paths with diagonal steps*. Publication University Alberta, 39 (1967).
- [11] GROSS (M.), *Applications géométriques des langages formels*. I. C. C. Bull., 5 (1966), 141-168.
- [12] HALL (M.), *Combinatorial Theory*. Blaisdell Publishing Company, Toronto, 1967.
- [13] HARARY (F.), PRINS (G.), TUTTE (W. T.), *The number of plane trees*. Indag Math., 26 (1964), 319-329.
- [14] JACKSON (E.), ENTRINGER (R. C.), *Enumeration of certain binary matrices*. J. Comb. Theory, 8 (1970), 291-298.
- [15] KLARNER, *Correspondance between plane trees and binary sequences*. J. Comb. Theory, 9 (1970), 401-411.
- [16] KREWERAS, *Dénombrement des chemins minimaux à sauts imposés*. C. R. Acad. Sci. Paris, 263 (1966), 1-3.
- [17] KUICH (W.), *Enumeration problems and context free languages*. Combinatorial Theory and its applications. Balaton-Füred (Erdős, Renyi, T. Sós ed.), North Holland Amsterdam-Londres, 1970, 729-735.
- [18] NARAYANA (T. V.), *A partial order and its applications to probability Theory*. Sankhya, 21 (1959), 91-98.
- [19] NARAYANA (T. V.), SATHE (Y. S.) and CHORNEYKO (I.), *Sufficient partition for a class of coin-tossing problems*. Biometrische Zeitschrift, 4 (1960), 269-275.
- [20] RANEY (G.), *Functional composition patterns and power series reversion*. Trans. Amer. Math. Soc., 94 (1960), 441-451.
- [21] RODRIGUES (O.), *Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs*. J. Math. Pures et Appl., 3 (1838), 549.
- [22] SCHUTZENBERGER (M. P.), *Le théorème de Lagrange selon Raney*. In Séminaires I.R.I.A., Logique et automates, Rocquencourt (1971), 270-275.
- [23] SEGNER (J. A.), *Enumeralis modorum, quibus figurae planae rectilinae per diagonales dividantur in triangula*. Novi Comentarum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 7 (1758-1759), 203-209.
- [24] WHITTAKER (E. T.), WATSON (G. N.), *A cours of modern analysis*. Cambridge University Press, Cambridge 1940.