GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

THIERRY LEVASSEUR

Algèbres localement polynomiales

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. nº 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A4_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
2e année, 1976/77, n° 4, 16 p.
22 et 29 mars, et 19 avril 1977

ALGÈBRES LOCALEMENT POLYNOMIALES

par Thierry LEVASSEUR

(d'après H. BASS, E. H. CONNELL et D. L. WRIGHT)

0. Introduction.

On envisage ici le problème suivant.

Soient K un anneau commutatif, et A une algèbre sur K. Supposons que $A_{\mathfrak{M}}$ soit isomorphe à une $K_{\mathfrak{M}}$-algèbre de polynômes en un nombre fini d'indéterminées pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de K ; dans quel cas peut-on dire que A est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un K-module de type fini, projectif ?

Dans toute la suite K sera un anneau commutatif, unitaire.

1. Notations et résultats préliminaires. Axiome Q .

A moins qu'on ne le signale, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

Soient K un anneau, et S une partie multiplicativement stable de K. On notera K_S l'anneau de fractions construit à partir de S et K_s, si

$$S = \{1 , s , s^2 , \dots , s^n , \dots\} \quad \text{avec} \quad s \in K .$$

Nous noterons K-alg (res. groupes) la catégorie des K-algèbres (resp. des groupes).

Soit G un foncteur

$$\begin{aligned} K\text{-alg} &\Longrightarrow \text{groupes} \\ L &\longrightarrow G(L) \end{aligned}$$

(a) Si S est une partie de L multiplicativement stable, il existe un homomorphisme $f : L \longrightarrow L_S$, d'où un homomorphisme $G(f) : G(L) \longrightarrow G(L_S)$. On notera $G(L)_S$ l'image de $G(L)$ par $G(f)$, et u_S l'image d'un élément u de $G(L)$.

(b) Si T est une indéterminée sur la K-algèbre L, et si L' est une L-algèbre, soit $t \in L'$, il existe un homomorphisme :

$$h : \begin{cases} L[T] \longrightarrow L' \\ p(T) \longrightarrow p(t) \end{cases}$$

On en déduit donc $G(h) : G(L[T]) \longrightarrow G(L')$, et nous noterons $u(t)$ l'image par $G(h)$ de $u(T) \in G(L[T])$.

Si $L' = L[T]$ et $s \in L$, en prenant $t = sT$, nous pourrons considérer, avec les notations précédentes, $u(ST)$ si $u(T) \in L[T]$.

Si $L' = L$ et $t = 0$, nous avons

$$h : \begin{cases} L[T] \longrightarrow L \\ p(T) \longrightarrow p(0) . \end{cases}$$

Le noyau de $G(h)$ sera noté

$$G(TL[T]) = \{u(T) \in G(L[T]) \ , \ u(0) = 1\}$$

Exemple. - Si G est le foncteur qui attache à une K-algèbre L le groupe des unités de L, $G(TL[T])$ est le sous-groupe des unités de $G(L[T])$ dont le terme constant est 1.

1.1. Définition. - Soit G un foncteur : K-alg $\Longrightarrow$ groupes, nous dirons que G satisfait à l'axiome Q si, pour toute K-algèbre L et $s \in L$, $u(T) \in G(TL_S[T])$, il existe $r \geqslant 0$, $V(T)$ dans $G(TL[T])$ tels que :

$$u(s^r T) = v(T)_s .$$

1.2. Remarque. - Soient $K' \in$ K-alg, et $L \in$ K-alg, posons $L' = K' \otimes_K L$. Si G est un foncteur de K-alg dans groupes, et si $s \in L$, nous noterons

$$L'_S = K' \otimes_K L_S \simeq L'_{S'}, \quad \text{où} \quad s' = 1 \otimes s .$$

Si T est une indeterminée

$$L[T]' \simeq L'[T] .$$

Nous pouvons définir un foncteur

$$\begin{aligned} G' : \ & \text{K-alg} \Longrightarrow \text{groupes} \\ & L \longrightarrow G'(L) = G(L') . \end{aligned}$$

Alors si G satisfait à l'axiome Q, G' aussi.
En effet, soient $s \in L$,

$$u(T) \in G'(TL_s[T]) = G(TL'_{s'}[T]) .$$

Il existe $r \geqslant 0$ et $V(T) \in G(TL'[T]) = G'(TL[T])$ tels que $V(T)_s = u(s^r T)$ en identifiant comme précedemment L'_s avec $L'_{s'}$.

1.3. Définition. - Pour tout anneau E non nécessairement commutatif, nous noterons son groupe des unités par E^X. Si J est un idéal bilatère de E, nous noterons

$$(1 + J)^X = \ker(E^X \longrightarrow (E/J)^X)$$

(c'est-à-dire l'ensemble des unités de E telles que $[u + J] = [1]$).

1.4. LEMME. - *Soient E un anneau non nécessairement commutatif, s un élément central de E, et T une indéterminée qui commute sur E.*
Soit $u(T) \in (1 + TE_s[T])^X$, alors il existe $r \geqslant 0$ et $V(T)$ dans $(1 + TE[T])^X$, tels que

$$u(s^r T) = v(T)_s .$$

Preuve. - Posons $u(T) = 1 + Tu_1(T)$ et $u(T)^{-1} = 1 + Tu'_1(T)$, avec u_1 et u'_1

dans $E_s[T]$.
On peut trouver r_1 assez grand pour que $s^{r_1} u_1(s^{r_1} T)$ et $s^{r_1} u'_1(s^{r_1} T)$ soient de la forme

$$W_1(T)_s \quad \text{et} \quad W'_1(T)_s \quad \text{avec } W_1 \text{ et } W'_1 \text{ dans } E[T] .$$

Posons alors $W(T) = 1 + TW_1(T)$ et $W'(T) = 1 + TW'_1(T)$, nous aurons

$$W(T)_s = 1 + TW_1(T)_s = 1 + s^{r_1} Tu_1(s^{r_1} T) = u(s^{r_1} T) \quad \text{et} \quad W'(T)_s = u(s^{r_1} T)^{-1} .$$

Nous pouvons écrire $W(T)W'(T) = 1 + Tx(T)$ et $W'(T)W(T) = 1 + Ty(T)$, avec $x(T)_s = y(T)_s = 0$, car $W(T)_s\, W'(T)_s = u(s^{r_1} T)u(s^{r_1} T)^{-1} = 1$. Par conséquent, il existe $r_2 \geqslant 0$ tel que $s^{r_2} x(T) = 0$ et $s^{r_2} y(T) = 0$, donc aussi

$$s^{r_2} x(s^{r_2} T) = s^{r_2} y(s^{r_2} T) = 0 .$$

Posons $V(T) = W(s^{r_2} T)$ et $V'(T) = W'(s^{r_2} T)$. Il faut montrer que $V(0) = V'(0) = 1$ et que $V(T)$ est inversible d'inverse $V'(T)$.

$$V(0) = W(0) = 1$$

$$V(T)V'(T) = W(s^{r_2} T)W'(s^{r_2} T) = 1 + s^{r_2} Tx(s^{r_2} T) = 1 .$$

Montrons que $V(T)_s = u(s^r T)$ pour un $r \geqslant 0$, et $V(T)$ conviendra.

$$V(T)_s = W(s^{r_2} T)_s = 1 + s^{r_2} TW_1(s^{r_2} T)_s = 1 + s^{r_2} Ts^{r_1} u_1(s^{r_1+r_2} T)$$

$$= u(s^{r_1+r_2} T) , \text{ donc } r = r_1 + r_2 \text{ convient.}$$

1.5. PROPOSITION. - Soit E une K-algèbre non nécessairement commutative, soit G le foncteur attachant à chaque K-algèbre L, le groupe $G(L)$ des unités de $L \otimes_K E$, alors G satisfait à l'axiome Q.

Preuve. - Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $L \otimes E$ et $s \otimes 1$, et de traduire les définitions.

1.6. COROLLAIRE. - Soit A une algèbre non nécessairement commutative, et soit M un A-module à gauche de présentation finie. Si GL_M est le foncteur qui attache, à chaque K-algèbre L, le groupe $GL_M(L)$ des automorphismes du $(L \otimes_K A)$-module, $L \otimes_K M$, alors G satisfait à l'axiome Q.

Preuve. - Soit $E = \mathrm{Hom}_A(M , M) = \mathrm{End}_A(M)$.
On peut définir un L-homomorphisme d'algèbres de $L \otimes_K E$ dans $\mathrm{End}_{L\otimes_K A}(L \otimes_K M)$ qui est un isomorphisme quand L est plat sur K puisque M est de présentation finie.
Nous pouvons identifier GL_M avec le foncteur G de la proposition 1.5. sur la catégorie des K-algèbres plates. En particulier, l'axiome Q est vrai pour $L = K$. Si L est une K-algèbre arbitraire, on peut remplacer M par $L \otimes_K M$, et A par $L \otimes_K A$, puisque L est plat sur L. $GL_{L\otimes_K M}$ vérifie l'axiome Q, mais $G_{L\otimes_K M}(L) \simeq GL_M(L)$, ce qui prouve le résultat.

1.6. Rappels sur les algèbres de présentation finie. - Soit A une algèbre de présentation finie (non nécessairement commutative), si $x = (x_1, \dots, x_p) \in A^p$ est une suite d'éléments engendrant A en tant que K-algèbre, A est isomorphe à $(K\{X_1, \dots, X_p\})/(f_1, \dots, f_q)$, où $(f_1, \dots, f_q)$ est un idéal de type fini de $K\{X_1, \dots, X_p\}$, $X_1, \dots, X_p$ étant des indéterminées qui ne commutent pas nécessairement.

Soit B une K-algèbre non nécessairement commutative, et soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de K-algèbres, u est déterminé par $u(x) = (u(x_1), \dots, u(x_p)) \in B^p$. De plus

$$f_j(u(x_1), \dots, u(x_p)) = uf_j(x_1, \dots, x_p) = 0 \quad \text{pour tout} \quad j \in \{1, \dots, q\}.$$

On a donc une bijection entre $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(A, B)$ et $H(A, B)$, où

$$H(A, B) = \{y \in B^p ; \ f_j(y) = 0 ; \ j = 1, \dots, q\},$$

définie par u, donne $u(x)$.

1.7. LEMME. - Soient A et B des K-algèbres (non nécessairement commutatives) avec A de présentation finie.

Soit $S \subset K$ multiplicativement stable. L'application canonique

$$(*) \quad \lim \mathrm{inj}_{s\in S} \mathrm{Hom}_{K_s\text{-alg}}(A_s, B_s) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K_S\text{-alg}}(A_S, B_S)$$

est bijective.

Si B est aussi de présentation finie, alors $(*)$ est bijective avec Isom à la place de Hom.

Preuve. - $\{\mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s), \ s \in S\}$ est un système inductif, et l'application naturelle $(*)$ est définie de la manière suivante : si $u \in \lim \mathrm{inj}_{s\in S} \mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$, u est la classe d'un élément u_s de $\mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$ pour la relation d'équivalence qui définit la limite inductive. En localisant u_s par rapport à S, on obtient ainsi un élément de $S^{-1}\mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s) = \mathrm{Hom}_{K_S}(A_S, B_S)$.

Nous pouvons identifier $\mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$ avec $\mathrm{Hom}_K(A, B_s)$, et donc l'identifier avec $H(A, B_s)$, avec les notations précédentes

$$H(A, B_s) = \{y \in B_s^p ; \ f_j(y) = 0, \ j \in \{1, \dots, q\}\}$$

Injectivité de $(*)$. - Si y et y' sont dans $\lim \mathrm{inj}_{s\in S} \mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$, on peut prendre y et y' dans $\mathrm{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$ pour le même s.

On est donc ramené à prendre y, y' dans $H(A, B_s)$ pour $s \in S$ tels que y_S et y'_S soient égaux dans B_S^p.

Pour montrer que y et y' sont égaux, il suffit de voir qu'il existe $t' = st > S$ (S est ordonné par divisibilité) tel que dans $H(A, B_{st})$ $y_t = y'_t$.

Nous pouvons écrire

$$y = (a_1 s^{-n_1}, \dots, a_p s^{-n_p}) \quad \text{et} \quad y' = (a'_1 s^{-n'_1}, \dots, a'_p s^{-n'_p})$$

puisque $y_S = y'_S$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ $a_i s^{-n_i} = a'_i s^{-n'_i}$ donc, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe t_i dans S tel que $t_i(s^{n'_i} a_i - s^{n_i} a'_i) = 0$.
En prenant $t = t_1 \dots t_p$, $y_t = y'_t$ dans B^p_{St}, par suite $y = y'$ dans $H(A, B_{st})$ et $y = y'$ dans $\lim\operatorname{inj}_{s\in S} H(A, B_s)$.

Surjectivité de (*). - Avec les identifications précédentes, soit $y \in H(A, B_S)$, nous devons trouver $s \in S$ et z dans $H(A, B_s)$ tel que $z_S = y$.
En réduisant toutes les composantes de y au même dénominateur, il existe t dans S et W dans B^p_t tels que $W_S = y$ dans B^p_S. D'autre part, $f_j(W)_S = f_j(W_S) = 0$, donc il existe t' dans S tel que $t'.f_j(W) = 0$.
Donc si $s = t.t'$ et $z = W_{t'}$, nous aurons $z \in H(A, B_s)$ et $z_S = y$.

Pour prouver la dernière assertion, il suffit de montrer que si u est un isomorphisme de A_S sur B_S, il peut être remonté en un isomorphisme V de A_s sur B_s pour un $s \in S$.
Par ce qui précède, il existe t dans S, $W \in \operatorname{Hom}_{K_t}(A_t, B_t)$, $W' \in \operatorname{Hom}_{K_t}(B_t, A_t)$ tels que $W_S = u$ et $W'_S = u^{-1}$.
Donc $(W.W')_S = id_{A_S}$, et l'injectivité de (*) dans le cas précédent, appliqué à $\lim\operatorname{inj}_{s\in S} \operatorname{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$ permet de trouver un t' dans S tel que

$$W_{t'}.W'_{t'} = id_{A_{tt'}} .$$

On pose alors $V = W_{t'}$, qui convient.
Enonçons sans démonstration le résultat suivant.

1.8. PROPOSITION. - Soit A une algèbre sur K non nécessairement commutative et de présentation finie. Soit G le foncteur qui associe à une K-algèbre L le groupe des L-automorphismes d'algèbre de $L \otimes_K A$. Alors G satisfait à l'axiome Q.

1.9. Rappels sur les algèbres filtrées. - Soit A une K-algèbre non nécessairement équipée d'une filtration descendante $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq \dots$; $A_p A_q \subseteq A_{p+q}$.
Pour tout a dans A, nous poserons $\varphi(a) = \sup\{n ; a \in A_n\}$.
La filtration sera dite séparée si $\bigcap_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n = 0$ ce qui équivaut à : pour tout $a \in A$, $\varphi(a) < \infty$.
Elle sera dite absolument séparée si, pour tout $L \in K\text{-}\underset{\sim}{alg}$, la filtration de la L-algèbre $L \otimes_K A_n$, donnée par les $L \otimes_K A_n$, est séparée.
Pour tout n, nous noterons

$$A'_n = \sum_{p_1+\dots+p_2\geq n,\, p_i<n} A_{p_1} \dots A_{p_r} \subseteq A_n .$$

Nous dirons que la filtration est de type fini, s'il existe un sous-ensemble fini X de A tel que

$$A_n = A'_n + \sum_{x\in X\cap A_n} AxA \quad \text{pour tout } n > 0 .$$

On peut remarquer qu'alors, pour tout $L \in K\text{-}\underset{\sim}{alg}$, la filtration induite sur $L \otimes_K A$ est encore de type fini.

$$L \otimes_K A_n = L \otimes_K A'_n + \sum_{x \in X \cap A_n} L \otimes A(1 \otimes x) L \otimes A$$

1.9. Exemple. - Si $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots$ est une K-algèbre graduée, elle possède la filtration $A_{(n)} = A_n \oplus A_{n+1} \oplus \ldots$, $n \geqslant 0$. Cette filtration est absolument séparée si, en plus, A est detype fini sur K, elle est de type fini au sens précédent.

1.10. LEMME. - Soit A une K-algèbre non nécessairement commutative, munie d'une filtration de type fini, avec X comme dans 1.9.
Soit B une K-algèbre filtrée non nécessairement commutative, et soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de K-algèbres.

(a) Pour que u préserve les filtrations, i. e. $u(A_n) \subset B_n$ pour tout n, il faut et il suffit que $u(x) \in B_{\varphi(x)}$, pour tout $x \in X$ (φ comme dans 1.9.).

(b) Supposons que la filtration de A soit séparée, et soit S un ensemble multiplicativement stable dans K. Supposons que $u_S : A_S \longrightarrow B_S$ préserve les filtrations. Alors il existe $s \in S$ tel que $u_s : A_s \longrightarrow B_s$ préserve les filtrations.

(c) Gardons les hypothèses de (b) et supposons que A soit une K-algèbre de présentation finie.
L'application canonique :

$$(*) \quad \lim\operatorname{inj}_{s \in S} \operatorname{Hom}^f_{K_s\text{-alg}}(A_s , B_s) \longrightarrow \operatorname{Hom}^f_{K_S\text{-alg}}(A_S , B_S)$$

est bijective. (Le Hom^f désigne les homomorphismes préservant les filtrations).
Si l'on suppose de plus que B satisfait à toutes les hypothèses faites sur A, alors $(*)$ est bijective avec Isom^f à la place de Hom^f.

Preuve.

(a) Il est clair que la condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Si $n = 0$, $u(A) \subset B$, procédons par récurrence,

$$u(A_n) \subset u(A'_n) + \sum_{x \in X \cap A_n} Bu(x)B \text{ , si } x \in X \cap A_n \text{ , } u(x) \in B_n$$

par hypothèse, et

$$u(A'_n) = \sum_{p_1+\ldots+p_r \geqslant n,\, p_i < n} u(A_{p_1})\ldots u(A_{p_r}) \subset \sum B_{p_1}\ldots B_{p_r} \subset B_n$$

par récurrence.

(b) Soit $x \neq 0$ dans X, et $\varphi(x) = n < \infty$. Alors $u(x)$ est dans $(B_S)_n = (B_n)_S$, donc il existe $s \in S$ avec $s.u(x) \in B_n$, puisque X est fini nous pouvons choisir un s qui marche pour tous les x de X. Par conséquent, $u' : A \xrightarrow{u} B \longrightarrow B_s$ préserve les filtrations par (a) et, par localisation, $u_s : A_s \longrightarrow B_s$ aussi. Grâce à (b), l'assertion (c) résulte du lemme 1.7.

Enonçons sans démonstration le résultat suivant.

1.11. PROPOSITION. - Soit A une K-algèbre de présentation finie non nécessairement commutative, munie d'une filtration absolument séparée de type fini. Soit G le foncteur attachant à chaque K-algèbre L le groupe $G(L)$ des automorphismes préservant la filtration de la L-algèbre filtrée $L \otimes_K A$. Alors G satisfait l'axiome Q.

2. Opérations scalaires sur les foncteurs de groupes.

2.1. Définition. - Soit G un foncteur : $K\text{-alg} \Longrightarrow$ groupes, une opération scalaire sur G est la donnée d'une opération $L \times G(L) \longrightarrow G(L)$ pour toute K-algèbre L (donc ${}^s 1 = 1$, ${}^1 u = u$, ${}^s({}^t u) = {}^{st} u$, ${}^s(uv) = {}^s u \, {}^s v$ pour tout s, t dans L, u, v dans $G(L)$). Cette opération étant naturelle c'est-à-dire :
Si $f : L \longrightarrow L'$ est un K-homomorphisme de K-alg, et si

$$G(f) : \begin{cases} G(L) \longrightarrow G(L') \\ u \longmapsto u' = G(f)(u) , \end{cases}$$

on demande $({}^s u)' = {}^{f(s)}(u')$ pour tout s dans L et u dans $G(L)$.

En particulier, si dans 2.1. $f : L \longrightarrow L_t$, nous aurons $({}^s u)_t = {}^{s/1}(u_t)$ que nous noterons ${}^s u_t$.

Donc, si G est comme dans 2.1., à tout s dans L on peut faire correspondre un endomorphisme de $G(L)$ qui envoie $u \in G(L)$ sur ${}^s u$. En particulier, pour $S = 0$, $u \longmapsto {}^0 u$ est un endomorphisme idempotent de $G(L)$ dont l'image sera notée ${}^0 G(L)$, et le noyau $G_0(L)$. Nous aurons ainsi un produit semi-direct :

$$G(L) = G_0(L) \rtimes {}^0 G(L) .$$

2.2. Exemple. - Soient A et B deux K-algèbres graduées non nécessairement commutatives, $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B = \coprod_{n \in \mathbb{N}} B_n$, et

$$\begin{cases} A_{(n)} = A_n \oplus A_{n+1} \oplus \cdots \\ B_{(n)} = B_n \oplus B_{n+1} \oplus \cdots \end{cases}$$

les $A_{(n)}$ (resp. $B_{(n)}$) munissent A (B) d'une filtration descendante.

Soit $u : A \longrightarrow B$ un K-homomorphisme d'algèbres préservant ces filtrations. Alors u peut être décomposé en $u = u_0 + u_1 + \cdots$, où u_n est une application K-linéaire de $A \longrightarrow B$ avec :

(i) $u_n(A_p) \subset B_{p+n}$ pour tout $p \geqslant 0$, en particulier, u_0 est homogène de degré 0.

(ii) Si $a \in A$, $u_n(a) = 0$ pour presque tout n.

(Rappel : u_n se définit de la manière suivante : si $a \in A_p$, alors $u(a) \in B_{(p)}$, donc $u(a) = (u(a))_p + (u(a))_{p+1} + \cdots + (u(a))_{p+n} + \cdots$, on pose $u_n(a) = (u(a))_{p+n}$. Si $a \in A$, $a = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ avec les a_i presque tous nuls, $a_i \in A_i$, et on pose $u_n(a) = \sum (u(a_i))_{i+n}$).

Le fait que u soit un K-homomorphisme d'algèbres, préservant les filtrations, est alors équivalent à $u = \sum u_i$, u_i K-linéaire pour tout i,

$$u(1) = u_0(1) = 1 \quad \text{et} \quad u_n(ab) = \sum_{p+q=n} u_p(a) u_q(b) .$$

Définissons, si $s \in K$, ${}^s u$ par $({}^s u)_n = s^n u_n$, donc :

$${}^s u = u_0 + s u_1 + s^2 u_2 + \cdots$$

On vérifie alors que

$$^s u(1) = 1$$

et

$$(^s u)_n(ab) = s^n\, u_n(ab) = s^n \textstyle\sum_{p+q=n} u_p(a) u_q(b) = \sum_{p+q=n} (^s u)_p(a) (^s u)_q(b) \;.$$

Par suite, $^s u$ est encore un K-homomorphisme préservant les filtrations de A vers B, et il est facile de voir que $^1 u = u$ et $^t(^s u) = {}^{ts}u$. De plus, $^0 u = u_0$ qui n'est autre que l'homomorphisme d'algèbres graduées associées aux filtrations.
Supposons que $V : B \longrightarrow C$ soit un second isomorphisme préservant les filtrations d'algèbres graduées, on peut vérifier que :

$$(Vu)_n = \textstyle\sum_{p+q=n} V_p\, u_q$$

ce qui implique :

$$^s(vu)_n = s^n (vu)_n = \textstyle\sum_{p+q=n} (^s v_p)(^s u_q)$$

d'où $^s(vu) = {}^s v\, {}^s u$.
Si u est un isomorphisme et si u^{-1} préserve les filtrations, alors les mêmes propriétés sont vraies pour $^s u$.
D'autre part, si L est une K-algèbre, $L \otimes_K B$ sont aussi des L-algèbres graduées donc les scalaires de L opèrent comme ci-dessus sur les L-homomorphismes préservant les filtrations.
Si $u : L \otimes_K A \longrightarrow L \otimes_K B$ est un de ces homomorphismes, et si $f : L \longrightarrow L'$ est un K-homomorphisme d'algèbres, on a le diagramme commutatif suivant pour tout s dans L :

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_K A \arrow[r, "^s u"] \arrow[d, "f \otimes_K 1_A"'] & L \otimes_K B \arrow[d, "f \otimes_K 1_B"] \\
L' \otimes_K A \arrow[r, "f(s)(1_{L'} \otimes_L u)"] & L' \otimes_K B
\end{tikzcd}$$

Maintenant, pour une K-algèbre graduée fixée A, soit G le foncteur attachant à chaque K-algèbre L, le groupe $G(L)$ des automorphismes de L-algèbre de $L \otimes_K A$ préservant la filtration. La discussion précédente montre alors que les applications $u \longmapsto {}^s u$ pour $s \in L$, $u \in G(L)$, définissent une opération scalaire sur le foncteur G. Par suite, $G(L) = G_0(L) \rtimes {}^0G(L)$, où $^0G(L)$ est le groupe des $u \in G(L)$ tels que $u = {}^0V = V_0$ pour un V dans $G(L)$, donc u est un automorphisme d'algèbre graduée. D'autre part, $G_0(L)$ est le sous-groupe de $G(L)$ composé des automorphismes dont l'homomorphisme gradué associé est l'identité.

2.3. LEMME. - Soit G : K-alg $\Longrightarrow$ groupes un foncteur satisfaisant à l'axiome Q et qui possède une opération scalaire. Soit L une K-algèbre, $s \in L$ et $u \in G(L_s)$, il existe un entier $r \geq 0$ tel que, si a et b sont dans L vérifiant $a \equiv b \;(Ls^r)$, on peut trouver V dans $G_0(L)$ tel que $V_s = (^a u)(^b u)^{-1}$.

Preuve. - Puisque nous avons la suite : $0 \longrightarrow L_s \xrightarrow{i} L_s[Y , T] \xrightarrow{p} 0$, où Y et

T sont des indéterminées, nous pouvons identifier, grâce à $G(i)$, $G(L_s)$ avec un sous-groupe de $G(L_s[Y , T])$. Posons alors

$$W = W(Y , T) = ({}^{(Y+T)}u)({}^{Y}u)^{-1} \in G(L_s[Y , T]) .$$

Nous avons :

(i) ${}^{0}W = ({}^{0}u)({}^{0}u)^{-1} = 1$,

(ii) $W(Y , 0) = ({}^{Y}u)({}^{Y}u)^{-1} = 1$.

Le (ii) implique que $W(Y , T) \in G(TL_s[Y][T])$ comme $s \in L[Y]$, et que G satisfait l'axiome Q , il existe $r \geqslant 0$ et $V(Y , T) \in G(TL[Y , T])$ tel que

$$V_s = V(Y , T)_s = W(Y , s^r T) .$$

Comme nous avons $(V({}^{0}V)^{-1})_s = V_s$, $({}^{0}V)^{-1}_s = V_s$, en remplaçant V par $V({}^{0}V)^{-1}$ on peut s'arranger pour que ${}^{0}V = 1$.

Par suite, si $a = b + s^r t$ pour un t dans L , nous aurons $V(b , t) \in G_0(L)$ et

$$V(b , t)_s = W(b , s^r t) = ({}^{(b+s^r t)}u)({}^{b}u)^{-1} = ({}^{a}u)({}^{b}u)^{-1} .$$

2.4. LEMME. - <u>Soient</u> GA K-<u>alg</u> $\Longrightarrow$ <u>groupes</u> <u>un foncteur qui satisfait l'axiome</u> Q <u>et</u> G <u>un foncteur sous-groupe de</u> GA <u>qui possède des opérations scalaires. Soit</u> L <u>une</u> K-<u>algèbre et</u> $s \in L$. <u>Si</u> $W \in GA(L_s)$ <u>et</u> $u \in G_0(L_s)$, <u>alors il existe</u> $r \geqslant 0$ <u>tel que, si</u> $a \in Ls^r$, <u>on peut trouver</u> V <u>dans</u> $GA(L)$ <u>tel que</u> $W^{-1}\,{}^{a}uW = V_s$.

<u>Preuve</u>. - On identifie, comme dans la preuve du lemme précédent, $G(L_s)$ à un sous-groupe de $G(L_s[T])$ si T est une indéterminée. Posons

$$u'(T) = W^{-1}\,{}^{T}uW \in GA(L_s[T]) .$$

Puisque ${}^{0}u = 1$, $u'(T) \in GA(TL_s[T])$ par l'axiome Q , il existe $r \geqslant 0$ et $V'(T)$ dans $GA(TL[T])$ tel que $V'(T)_s = u'(s^r T)$.

Supposons $a = s^r t$, $t \in L$ si $V = V'(t) \in GA(L)$, nous aurons

$$V_s = V'(t)_s = u'(s^r t) = u'(a) = W^{-1}\,{}^{a}uW .$$

2.5. THÉORÈME. - <u>Soit</u> GA : K-<u>alg</u> $\Longrightarrow$ <u>groupes</u> <u>un foncteur satisfaisant à l'axiome</u> Q , <u>soient</u> G <u>et</u> H <u>des foncteurs sous-groupes de</u> GA <u>tels que</u> G <u>satisfasse l'axiome</u> Q <u>et possède des opérations scalaires avec, de plus</u>,

$$GA(L) = G_0(L)H(L) \quad \underline{\text{pour tout}} \quad L \in K\text{-}\underline{\text{alg}}.$$

<u>Si</u> s_0 <u>et</u> s_1 <u>sont dans</u> L <u>avec</u> $Ls_0 + Ls_1 = L$, <u>alors</u>

$$GA(L_{s_0 s_1}) = G_0(L_{s_0})_{s_1} H(L_{s_0 s_1}) GA(L_{s_1})_{s_0}$$

<u>Preuve</u>. - Tout élément de $GA(L_{s_0 s_1})$ s'écrit, par hypothèse, $u.w$ avec $u \in G_0(L_{s_0 s_1})$ et $w \in H(L_{s_0 s_1})$.

Si $a \in L$, écrivons $u.w = {}^{1}u({}^{a}u)^{-1}\, w.w^{-1}\,{}^{a}uw$.

Le lemme 2.3. et le lemme 2.4. fournissent un r (on peut prendre le même pour les deux), de manière que

- si on applique le lemme 2.4. à la localisation $L_{s_1} \longrightarrow L_{s_0 s_1}$, et si $a \in Ls_0^r$ (donc a L_{s_1} s_0^r ,

$$W^{-1}\ {}^{a}uW = V_{1s_0} \quad \text{pour} \quad V_1 \in GA(L_{s_1}) \ .$$

- si on applique le lemme 2.3. à G et à la localisation $L_{s_0} \longrightarrow L_{s_0 s_1}$ et si $a \equiv 1$ $(L_{s_0}\ S_1^r)$ (il suffit d'avoir $a \equiv 1\ (Ls_1^r)$), alors

$$V_{0s_1} = {}^{1}u({}^{a}u^{-1} \quad \text{pour un} \quad V_0 \in G_0(L_{s_0}) \ .$$

Puisque $Ls_0 + Ls_1 = L$ il est clair que l'on peut trouver a tel que

$$a \in Ls_0^r \quad \text{et} \quad 1 - a \in Ls_1^r \ .$$

Ceci termine la preuve du théorème puisque

$$uW = {}^{1}u({}^{a}u)^{-1}.W.W^{-1}\ {}^{a}uW = V_{0s_1}\ WV_{1s_0} \ .$$

2.6. Exemple d'application. - Soit A l'algèbre symétrique ou tensorielle d'un K-module M de présentation finie.

Nous écrirons $A = \coprod_{n \in \underset{\sim}{N}} A_n$.

La filtration descendante $A_{(n)} = A_n \oplus A_{n+1} \oplus \dots$ est absolument séparée de type fini (cf. 1.9. exemple).

On peut aussi considérer une filtration ascendante : $A^{(n)} = A_0 \oplus \dots \oplus A_n$.

Nous noterons $GA(L)$ le groupe des automorphismes de L-algèbre de $L \otimes_K A$, si $L \in K\text{-}\underset{\sim}{alg}$. GA satisfait à l'axiome Q (prop. 1.8.). Notons $G(L)$ le sous-groupe de $GA(L)$, formé des automorphismes qui préservent la filtration descendante, on définit ainsi un foncteur G qui satisfait l'axiome Q (prop. 1.11.) et possède des opérations scalaires (exemple 2.2.).

Soit enfin $H(L)$ sous-groupe de $GA(L)$ composé des automorphismes qui conservent la filtration ascendante.

Donc le théorème s'appliquera si

$$(**) \qquad GA(L) = G_0(L)H(L) \ .$$

Montrons (**) dans le cas où $L = K$, ce qui ne change rien à la généralité.

Remarquons que $G(K) = G_0(K) \rtimes {}^{0}G(K)$, où ${}^{0}G(K)$ est le groupe des automorphismes d'algèbre graduée de A , qui peut s'identifier, puisque $A = S(M)$, ou $T(M)$ avec $GL_M(K)$ groupe des automorphismes linéaires de M .

Posons $M^* = \mathrm{Hom}(M , K)$, il existe un plongement $M^* \longrightarrow H(K)$ car si $t \in M^*$ on peut lui associer

$$\bar{t} : \ x \longmapsto t(x) + x \in A_0 \oplus A_1$$

que l'on prolonge à $S(M)$ ou $T(M)$.

Montrons que $H(K) = GL_M(K) \rtimes M^*$, pour cela construisons une projection $H(K) \longrightarrow M^*$ de noyau $GL_M(K)$.

Si $u \in H(K)$, u préserve la filtration ascendante, donc $u(M) \subset A_0 \oplus M$ et, si $x \in M$, $u(x) = t(x) + x'$ avec $t(x) \in K$.

Si l'on pose $x' = u_M(x)$, on définit ainsi $t : M \longrightarrow K$ et $u_M \in GL_M(K)$, de plus $u = u_M \circ \bar{t}$.

Nous noterons $H(K)$ par $Af_M(K)$ par analogie avec le groupe affine de M.

Maintenant, si $u \in GA(K)$, pour tout $x \in M$, nous avons :

$$u(x) = t(x) + u_1(x) \quad \text{avec} \quad t(x) \in K\,, \quad u_1(x) \in A_{(1)}\,,$$

nous définissons ainsi $t \in M^*$, et si $V = u_0\overline{(-t)}$, pour tout x dans M,

$$V(x) = u(-t(x) + x) = -t(x) + u(x) = u_1(x)\ .$$

Donc V définit un élément de $G(K)$ et $u = V \circ \bar{t} \in G(K)M^*$.

Mais

$$G(K)M^* = G_0(K)GL_M(K)M^* = G_0(K)Af_M(K)\ .$$

Ceci prouve (**)pour $L = K$, pour toute K-algèbre L, la L-algèbre $L \otimes_K A$ hérite toutes les hypothèses faites sur A.

2.7. Codification des notations. - Soient M un K-module de présentation finie, et $A = S(M)$ ou $T(M)$, graduée de manière usuelle. Nous noterons :

$GA_M(L) = \{L$ automorphismes de $L \otimes_K A\}$,

$GA^0_M(L)$: son sous-groupe des automorphismes qui préservent la filtration descendante de $L \otimes_K A$.

$GA^!_M(L)$: les éléments de $GA^0_M(L)$, dont le morphisme gradué associé est l'identité.

$Af_M(L)$: sous-groupe de $GA_M(L)$ des automorphismes conservant la filtration ascendante.

COROLLAIRE. - Soit M un K-module de présentation finie, et soit $A = S(M)$ ou $T(M)$. Pour toute K-algèbre L, on a :

(i) $GA_M(L) = GA^!_M(L)Af_M(L)$

(ii) Si $Ls_0 + Ls_1 = L$,

$$GA_M(L_{s_0 s_1}) = GA^!_M(L_{s_0})_{s_1}\ Af_M(L_{s_0 s_1})GA_M(L_{s_1})_{s_0}\ .$$

3. Méthode de récurrence de Quillen.

Soit Loc K l'ensemble des K-algèbres de la forme K_S, où S est un ensemble multiplicatif dans K.

PROPOSITION. Si $P(L)$ est une propriété définie pour les K-algèbres L de Loc K pour que $P(L)$ soit vraie pour tout L dans Loc (K), en particulier pour $L = K$, il suffit que :

1° Spécialisation : $P(L')$ est vraie si $P(L)$ est vraie lorsqu'il existe un K-homomorphisme de L vers L'.

2° Finitude : Si $S \subset K$ est une partie multiplicative, alors si $\overline{P(K_S)}$ est vraie, $P(K_s)$ est vraie pour un $s \in S$.

3° Validité locale : $P(K_{\mathfrak{M}})$ est vraie pour tout $\mathfrak{M}$ idéal maximal de K.

4° Condition de recollement : Si $L \in \operatorname{Loc}(K)$ et si $Ls_0 + Ls_1 = L$, alors si $P(L_{s_0})$ et $P(L_{s_1})$ sont vraies, $P(L)$ est vraie.

Preuve. - Considérons $T = \{s \in K$ tel que $P(K_s)$ soit vraie$\}$. Si $1 \in S$, nous aurons terminé car, pour tout $L \in \operatorname{Loc} K$, il existe un K-homomorphisme $K \longrightarrow L$, donc $P(L)$ sera vraie par spécialisation.

Remarquons que T n'est contenue dans aucun idéal maximal de K, car $P(K_{\mathfrak{M}})$ étant vraie pour tout idéal maximal de K, il existe $s \notin \mathfrak{M}$ tel que $s \in T$, par finitude Il suffit de montrer que T est un idéal, c'est-à-dire que si s_0, s_1 sont dans T avec $s \in Ks_0 + Ks_1$, alors $s \in T$. Posons $L = K_s$ et t_i l'image de s_i $(i=0,1)$ dans L. Nous avons $L = Lt_0 + Lt_1$ et $L_{t_i} = K_{ss_i}$ $(i = 0, 1)$, $P(L_{t_i})$ est donc vraie par spécialisation et, par recollement, $P(L)$ est vraie, donc $s \in T$.

4. Théorème de localisation.

THÉORÈME. - Soit A une K-algèbre de présentation finie. Supposons que, pour tout $\mathfrak{M}$ idéal maximal de K, la $K_{\mathfrak{M}}$-algèbre A soit isomorphe à l'algèbre symétrique d'un $K_{\mathfrak{M}}$ module de présentation finie. Alors A est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(M)$ d'un K-module de présentation finie.

4.1. Lemme. - Soient M et N deux K-modules, et $U = S$ ou T, si $U(M)$ et $U(N)$ sont des K-algèbres isomorphes, alors M et N sont des K-modules isomorphes.

Preuve. - Soit $u : U(M) \longrightarrow U(N)$ un isomorphisme de K-algèbres. (U désignant l'algèbre symétrique ou l'algèbre tensorielle).
Si $x \in M$, $u(x) = v(x) - t(x)$, avec $t(x) \in K$, et $v(x)$ dans l'idéal d'augmentation $U_+(N)$. Définissons un automorphisme de $U(M)$ en posant

$$\bar{t}(x) = x + t(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans } M .$$

Alors si $w = u\bar{t}$,

$$w(x) = u(x + t(x)) = u(x) + t(x) = v(x) , \text{ pour tout } x \text{ dans } M .$$

Donc w est un isomorphisme d'algèbres augmentées. Nous aurons ainsi un isomorphisme

$$U_+(M)/U_+(M)^2 \longrightarrow V_+(N)/V_+(N)^2$$

où $U_+(M)$ est l'idéal d'augmentation de $U(M)$.

ce qui donne, puisque $(U_+(M))/(U_+(M)^2) \simeq M$ et $(V_+(N))/(V_+(N)^2) \simeq N$, $M \simeq N$.

Preuve du théorème. - Nous allons appliquer la méthode de récurrence de Quillen à Loc K et à la proposition si $L \in \operatorname{Loc} K$:

$P(L)$: La L-algèbre $L \otimes_K A$ est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un L-module de présentation finie.

1° <u>Spécialisation</u> : Si L et L' sont dans Loc (K) , $L = K_S$ et $L' = K_{S'}$. Supposons que $P(L)$ soit vraie, et qu'il existe un K-homomorphisme $K_S \longrightarrow K_{S'}$. Alors, il existe un K_S-module de présentation finie tel que

$$K_S \otimes_K A \simeq S(M)$$

d'où

$$K_{S'} \otimes_{K_S} K_S \otimes_K A \simeq S(M) \otimes_{K_S} K_{S'} \simeq S(M \otimes_{K_S} K_{S'})$$

ce qui donne le résultat : $P(L)$ est vraie.

2° <u>Finitude</u> : Supposons que $P(K_S)$ soit vraie, $K_S \in$ Loc (K) . Il existe un K_S-module $M(S)$, de présentation finie, tel que

$$K_S \otimes_K A \simeq S(M(S)) \ .$$

Remarquons que tout K_S-module de présentation finie est la localisation d'un K_s-module de présentation finie pour un $s \in S$.
En effet, $M(S) \simeq K_S^n/(g_1 , \dots , g_p)$, où $(g_1 , \dots , g_p)$ désigne un K_S-module de type fini, avec $g_i \in K_S$ pour tout $i \in \{1 , \dots , p\}$.
En réduisant tous les g_i au même dénominateur, on peut trouver un $s \in S$ tel que $g_i = (h_i)_S$ avec $h_i \in K_s$, $i \in \{1 , \dots , p\}$; et nous aurons :

$$M(S) \simeq M_s \otimes_K K_S \ ,$$

où M_s est le K_s-module de présentation finie $K_s^n/(h_1 , \dots , h_p)$.
Le lemme 1.7. nous permet alors de relever l'isomorphisme
$K_S \otimes_K A \simeq S(M(s))$ en un isomorphisme pour $t \in S$,
$K_t \otimes_K A \simeq S(M_t)$ pour un M_t , qui soit un K_t-module de présentation finie.

3° <u>La validité locale</u> est dans l'hypothèse du théorème.

4° <u>Condition de recollement</u> : Soit $L \in$ Loc (K) et s_0 , s_1 dans L tels que $Ls_0 + Ls_1 = L$. Il faut montrer que, si $P(L_{s_0})$ et $P(L_{s_1})$ sont vraies, alors $P(L)$ est vraie.
Remarquons qu'il suffit de le montrer pour $L = K$, car $L \otimes_K A$ possède les mêmes propriétés que A en tant que L-algèbre.
Supposons donc $Ks_0 + Ks_1 = K$, et que nous ayons des K_{s_i}-modules M_i de présentation finie, avec des isomorphismes de K_{s_i}-algèbres $A_{s_i} \longrightarrow S(M_i)$ pour $i = 0 , 1$.
Remarquons que

$$A_{s_0 s_1} \simeq S(M_i) \otimes_{K_{s_i}} K_{s_0 s_1} \simeq S(M_{1-i}) \otimes_{K_{s_{1-i}}} K_{s_0 s_1} \ ,$$

donc $S(M_{1s_0}) \simeq S(M_{0s_1})$, et le lemme 4.1. implique $M_{0s_1} \simeq M_{1s_0}$ en tant que $K_{s_0 s_1}$-modules. Nous aurons alors le diagramme de produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_0 & \longrightarrow & M_{0s_1} \simeq M_{1s_0} \end{array}$$

avec

$$M = M_0 \times_{M_{0s_1} = M_{1s_0}} M_1 \quad \text{et} \quad M_{s_i} \simeq M_i \quad \text{pour} \quad i = 0 , 1 .$$

Puisque les M_i sont des K_{s_i}-modules de présentation finie et que $K_{s_0} + K_{s_1} = K$, M sera un K-module de présentation finie. (cf. BOURBAKI, Algèbre, chap. II).
Soit $B = S(M)$; pour toute K-algèbre L, nous noterons $GA_M(L)$ le groupe des L-automorphismes d'algèbre de $L \otimes_K B \simeq S(L \otimes_K M)$. Rappelons que, d'après le corollaire 2.7., et avec ses notations,

$$GA_M(L) = GA'_M(L) Af_M(L)$$

Puisque $P(K_{s_i})$ est vraie, $i = 0 , 1$, il existe des K_{s_i}-isomorphismes

$$u_i : B_{s_i} \longrightarrow A_{s_i} , \quad i = 0 , 1 .$$

Considérons $u = u_{0s_1}^{-1} u_{1s_0}$ qui est un élément de $GA_M(K_{s_0 s_1})$.
Le corollaire 2.7. permet d'écrire $u = v_{0s_1} w v_{1s_0}^{-1}$ avec $v_0 \in GA'_M(K_{s_0})$, $w \in Af_M(K_{s_0 s_1})$, $v_1 \in GA_M(K_{s_1})$.
Soit $w_i = u_i v_i : B_{s_i} \xrightarrow{r} A_{s_i}$, $i = 0 , 1$.
Alors $w_{0s_1}^{-1} w_{1s_0} = v_{0s_1}^{-1} u_{0s_1}^{-1} u_{1s_0} v_{1s_0} = v_{0s_1}^{-1} u v_{1s_0} = w \in Af_M(K_{s_0 s_1})$ (rappelons que $Af_M(K_{s_0 s_1})$ est le groupe des automorphismes de $B_{s_0 s_1}$ qui conservent la filtration ascendante de $B_{s_0 s_1} \simeq S(M_{s_0 s_1})$).

Soit $B^{(p)}$ la filtration ascendante sur $B = S(M)$, on peut filtrer les B_{s_i} par les $B_{s_i}^{(p)}$ pour $i = 0 , 1$, et $B_{s_0 s_1}$ pour les $B_{s_0 s_1}^{(p)}$. Nous aurons ainsi une filtration sur A_{s_i}, donnée par $w_i(B_{s_i}^{(p)})$, et sur $A_{s_0 s_1}$, une filtration donnée par les $w_{0s_1}(B_{s_0 s_1}^{(p)})$ et une autre par les $w_{1s_0}(B_{s_0 s_1}^{(p)})$.
Remarquons que puisque

$$w_{0s_1}^{-1} w_{1s_0}(B_{s_0 s_1}^{(p)}) = w(B_{s_0 s_1}^{(p)})$$

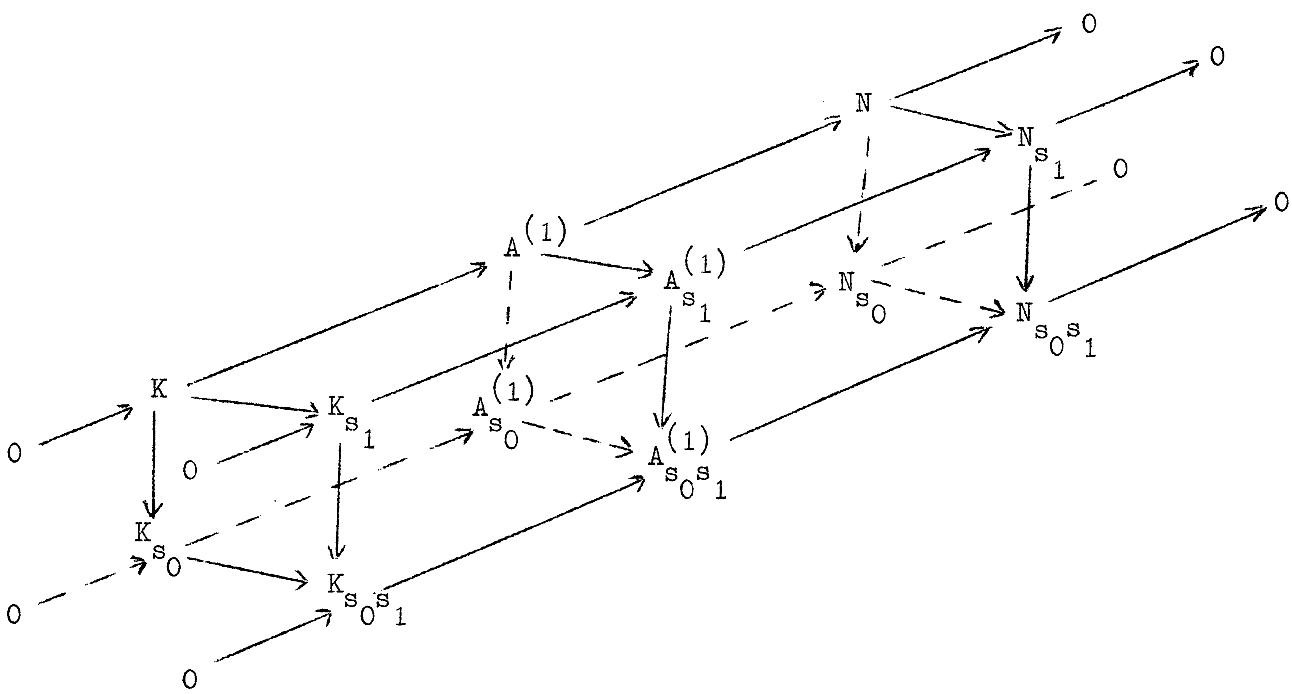
et que w conserve la filtration ascendante de $B_{s_0 s_1}$, nous aurons :

$$w_{1s_0}(B_{s_0 s_1}^{(p)}) = w_{0s_1}(B_{s_0 s_1}^{(p)}) .$$

Donc si, sur A, on met la filtration induite par celle de $B_{s_0 s_1}^{(p)}$, comme la filtration sur A_{s_i} est induite par celle des $w_{is_{1-i}}(B_{s_0 s_1}^{(p)})$ (pour $i = 0 , 1$), la filtration de A est induite par celle des A_{s_i}, pour $i = 0 , 1$.
Donc si $K = A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset \ldots$ est cette filtration, les w_i sont des isomorphismes d'algèbres filtrées de B_{s_i} sur A_{s_i} (ils préservent les filtrations ascendantes).
Posons

$$N = \frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} = \frac{A^{(1)}}{K} .$$

On a une suite $0 \longrightarrow K \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow N \longrightarrow 0$ qui se scinde au-dessus de K_{s_i} , $i = 0 , 1$, car $A_{s_i} \simeq S(M_{s_i})$, donc $A^{(1)}_{s_i} = N_{s_i} \oplus K_{s_i}$, d'après ce qui précède. D'où le diagramme :



Avec

$$0 \longrightarrow K_{s_i} \longrightarrow A^{(1)}_{s_i} \longrightarrow N_{s_i} \longrightarrow 0 \quad \text{scindée pour} \quad i = 0 , 1$$

$$0 \longrightarrow K_{s_0 s_1} \longrightarrow A^{(1)}_{s_0 s_1} \longrightarrow N_{s_0 s_1} \longrightarrow 0 .$$

Il est alors facile de construire une rétraction $A^{(1)} \longrightarrow K$ qui montre que la suite

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

est scindée.

Nous pouvons identifier ainsi $A^{(1)}$ avec $K \oplus N$, ce qui donne une injection $N \longrightarrow A$; soit t l'homomorphisme induit par cette injection, de $S(N)$ vers A . Puisque

$$w_i^{-1} \circ t_{s_i} : S(N_{s_i}) \longrightarrow A_{s_i} \longrightarrow B_{s_i} \quad (i = 0 , 1)$$

est un isomorphisme

$$\left(N_{s_i} \simeq \frac{A^{(1)}_{s_i}}{K_{s_i}} \simeq \frac{B^{(1)}_{s_i}}{K_{s_i}} \simeq M_{s_i}\right) ,$$

t_{s_i} est un isomorphisme pour $i = 0 , 1$. Il est alors facile de voir que t est un isomorphisme.

Ceci donne le résultat cherché, car N est un K-module de présentation finie puisque $W_{s_i} \simeq M_{s_i}$, $i = 0$, 1 , et que les M_{s_i} sont des K_{s_i}-modules de présentation finie.

4.2. Remarques.

(i) Le théorème montre que si une K-algèbre A est telle que la $K_{\mathfrak{M}}$-algèbre $A_{\mathfrak{M}}$ soit un anneau de polynômes sur $K_{\mathfrak{M}}$, en un nombre fini d'indéterminées, pour tout $\mathfrak{M}$ idéal maximal de K , alors A est l'algèbre symétrique d'un module projectif de type fini. Ceci répond au problème posé au § 0.

(ii) On pourrait démontrer un théorème analogue avec l'algèbre tensorielle à la place de l'algèbre symétrique.

(iii) Le module que l'on trouve dans le théorème est déterminé à un isomorphisme près d'après le lemme 4.1.

(texte reçu le 7 mai 1977)

Thierry LEVASSEUR
20 rue du Ruisseau
75018 PARIS