Groupe d'étude d'algèbre

Dimitri Latsis

Modules tertiaires

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. nº 3, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A3_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
2e année, 1976/77, n° 3, 20 p.

8 mars 1977

MODULES TERTIAIRES

par Dimitri LATSIS

Tous les anneaux considérés sont unitaires, <u>noethériens à gauche</u>. Tous les modules sont unitaires de <u>type fini</u>.

On note, pour un module M et un sous-module N,

$$N \because M = \{a \in A \; ; \; aM \subseteq N\} .$$

C'est un idéal bilatère de A, et si I est un idéal bilatère, on note

$$N \therefore I = \{m \in M \; ; \; Im \subseteq N\} .$$

C'est un sous-module de M.

1. Ass M.

<u>Définitions</u>.

Un A-module P non nul est dit <u>premier</u> si, pour tout sous-module non nul N, on a $0 \because N = 0 \because P$. Il est immédiat que l'idéal bilatère $0 \because P$ est alors premier.

Pour un A-module M, on note
$\mathrm{Ass}\, M$ l'ensemble des annulateurs des sous-modules premiers de M
$\underset{\sim}{P}(M)$ l'ensemble des annulateurs premiers des sous-modules de M

$$M = \{P \text{ premier de } A \; ; \; \exists\, N \subseteq M \, , \; P = 0 \because N\} .$$

On a évidemment

$$\mathrm{Ass}\, M \subseteq \underset{\sim}{P}(M) .$$

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> A <u>un</u> T-<u>anneau à gauche. Alors</u> $\mathrm{Ass}\, M = \underset{\sim}{P}(M)$ <u>pour tout</u> A-module de type fini M. (Pour la définition de T-anneau, voir le § 5 ci-après.)

<u>Preuve</u>. - Soit $P \in \underset{\sim}{P}(M)$, alors il existe un sous-module X de M $0 \neq X$, tel que

$$P = 0 \because X \, , \quad X = M_1 + \dots + M_n \, , \quad M_i \text{ monogènes.}$$

D'où

$$P = 0 \because (M_1 + \dots + M_n) = \cap^r \, 0 \because M_i .$$

Comme P est premier, il existe $i \leq k \leq n$ tel que

$$P = 0 \because M_k = 0 \because A/L ,$$

où $M_k \simeq A/L$, L idéal à gauche de A ; d'où

$$P = L \because A \subseteq L .$$

Puisque $L \because A$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans L, l'idéal L/P de l'anneau A/P n'est pas essentiel dans A/P d'après la condition de Krause, donc il existe $L' \supsetneqq P$ tel que $L \cap L' = P$. On a donc

$$0 \neq L'/P \subseteq A/L = M_k ,$$

d'où

$$\mathrm{Ass}(L'/P) \subseteq \mathrm{Ass}\, M_k \subseteq \mathrm{Ass}\, M \quad \text{(cf. proposition 2).}$$

Mais on peut voir que $\{P\} = \mathrm{Ass}(L'/P)$ et par conséquent $P \in \mathrm{Ass}\, M$.

Remarque. - On ne connaît pas d'anneau noethérien à gauche tel qu'on puisse trouver un A-module à gauche de type fini avec $\mathrm{Ass}\, M \neq P(M)$.
Evidemment dans un anneau noethérien commutatif $P(M) = \mathrm{Ass}\, M$.

PROPOSITION 2 (propriétés de $\mathrm{Ass}\, M$).

(α) $\mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset$.

(β) Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est exacte alors $\mathrm{Ass}\, L \subseteq \mathrm{Ass}\, M \subseteq \mathrm{Ass}\, L \cup \mathrm{Ass}\, N$

(γ) Si $N \triangleleft M$, alors $\mathrm{Ass}\, N = \mathrm{Ass}\, M$.

(δ) $\mathrm{Ass}(\bigoplus_I M_i) = \bigcup_I \mathrm{Ass}\, M_i$.

(ε) Si M uniforme, alors $\mathrm{Ass}\, M = \{P\}$.

(ζ) $\mathrm{Ass}\, M = \mathrm{Ass}\, E(M)$.

(η) $\mathrm{Ass}\, M$ est fini.

Preuve.

(α) Soit $\mathfrak{L} = \{0 \,\dot{\cdot}\, N \ ; \ 0 \neq N \subseteq M\}$. Soit P un élément maximal de $\mathfrak{L}$

$$P = 0 \,\dot{\cdot}\, N_0 \ , \quad 0 \neq N_0 \subseteq M .$$

Si $0 \neq N_1 \subseteq N_0$, alors

$$0 \,\dot{\cdot}\, N_1 \geqslant 0 \,\dot{\cdot}\, N_0 = P \quad \text{et} \quad P = 0 \,\dot{\cdot}\, N_1 .$$

(β) Il est immédiat que $\mathrm{Ass}\, L \subseteq \mathrm{Ass}\, M$. Soit $P \in \mathrm{Ass}\, M$, alors

$$P = 0 \,\dot{\cdot}\, K \ , \quad 0 \neq K \subseteq M .$$

Deux cas se présentent ou bien $K \cap L = 0$, et K est isomorphe à un sous-module de N , donc $P \in \mathrm{Ass}\, N$, ou bien $K \cap L \neq 0$, alors $P = 0 \,\dot{\cdot}\, (K \cap L)$, et $P \in \mathrm{Ass}\, L$.

(δ) On se ramène au cas où I est fini, et il suffit de le prouver pour $I = \{1,2\}$, cas qui résulte de (β).

(ε) P est l'annulateur maximum des sous-modules de M car $M_1 \cap M_2 \neq 0$, $\forall\, M_1 , M_2 \neq 0$, et $P = 0 \,\dot{\cdot}\, M$.

(ζ) En effet, $M \triangleleft E(M)$.

(η) Soit $E(M) = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ somme directe d'injectifs indécomposables (cf. 5), et

$$\mathrm{Ass}\ M = \mathrm{Ass}\ E(M) = \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}\ M_i \ .$$

2. Sous-modules primaires.

Définition 1. – On appelle radical primaire d'un anneau A, noté $R(A)$, l'idéal
$R(A)$ = le plus grand idéal nilpotent,
$= \cap P$, P premiers de A,
$= \cap P'$, P' premiers minimaux de A.

Preuve. – $R(A)$ existe car, si $I^n = 0$ et $\mathfrak{J}^m = 0$, alors $(I + \mathfrak{J})^{n+m} = 0$. Donc $R(A) = \sum I_\alpha$ nilpotents $= \sum_{i=1}^{n} I_i$ car A est noethérien. Posons $I = \cap P$. On va montrer $R(A) = I$.
Puisque $R^n(A) = 0 \subseteq P$, on a $R(A) \subseteq P$, $\forall P$, d'où $R(A) \subseteq I$. D'autre part, il est connu que, étant donné un idéal bilatère I, il existe des idéaux premiers $P_1, \dots, P_n$ tels que $0 = P_1 P_2 \dots P_n$ avec $I \subset P_i$. Donc $I^n \subseteq P_1 P_2 \dots P_n = 0$, et I est nilpotent, d'où $I \subseteq R(A)$.
Pour la dernière égalité, s'il existe un premier P, alors $0 = P_1 P_2 \dots P_n \subseteq P$. Alors il existe i tel que $P_i \subseteq P$. Donc, en choisissant les éléments minimaux de la famille des $\{P_i\}_{i=1,..,n}$, on obtient le résultat.

Définition 2. – On appelle radical primaire d'un idéal bilatère I

$$R(I) \equiv R(A/I) = \text{maximum } \{\mathfrak{J} \ ; \ \exists\, n \ \ \mathfrak{J}^n \subseteq I\}$$
$$= \cap_{P \geq I} P \ \text{ premiers.}$$

PROPOSITION 1. – *Soit un idéal bilatère* I. *Alors*

(a) $I \subseteq R(I)$,

(b) $I \subseteq \mathfrak{J}$, *alors* $R(I) \subseteq R(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{J}$ *idéal bilatère*,

(c) $R(I \cap \mathfrak{J}) = R(I\mathfrak{J}) = R(I) \cap R(\mathfrak{J})$.

Preuve. – La vérification est facile.

Définition 3. – Soit N un sous-module de M. On appelle radical primaire de N, $R(N)$,

$$R(N) = \text{maximum } \{I \ \text{ bilatères} \ ; \ \exists\, n \ \ I^n M \subseteq N\} \ .$$

Avec ces notations, le radical de M est

$$R(M) = \text{maximum } \{I \ ; \ I^n M = 0\} \ .$$

Si Q est un idéal à gauche,

$$R(Q) = \text{maximum } \{I \ ; \ I^n \subseteq Q\} = \cap_{P \geq Q^{\cdot}.A} P \ \text{ premiers.}$$

Définition 4. – Un sous-module N d'un module M est appelé primaire, s'il vérifie les conditions suivantes équivalentes

1° $$aAX \subseteq N \ , \ X \not\subseteq N \Longrightarrow a \in R(N) \ .$$

2° $$IX \subseteq N \ , \ X \not\subseteq N \Longrightarrow I^n \subseteq N \,\dot{.}\, M \ .$$

3° $$N \subsetneqq N \therefore I \Longrightarrow I \subseteq R(N) .$$

4° $$I \nsubseteq R(N) \Longrightarrow N \therefore I = N .$$

Preuve. - La vérification est la même que dans le cas tertiaire.

PROPOSITION 2. - Si N est primaire, alors $R(N)$ est premier.

Preuve. - Soit $I\mathfrak{J} \subseteq R(N)$, $I \nsubseteq R(N)$, $\mathfrak{J} \nsubseteq R(N)$, d'où

$$(I\mathfrak{J})^n \subseteq N \therefore M \quad \text{et} \quad I(\mathfrak{J}I)^{n-1}\mathfrak{J} \subseteq N \therefore M .$$

On a $(\mathfrak{J}I)^{n-1}\mathfrak{J} \subseteq N \therefore M$, car, sinon la relation $(\mathfrak{J}I)^{n-1}\mathfrak{J} \subseteq N \therefore M$ entrainerait $I \subseteq R(N)$, d'après la définition de primaire.
En appliquant le même raisonnement à $\mathfrak{J}(I\mathfrak{J})^{n-1} \subseteq N \therefore M$, on arrive à $(I\mathfrak{J})^{n-1} \subseteq N \therefore M$ et, par récurrence, on obtient $I\mathfrak{J} \subseteq N \therefore M$, qui est impossible.

PROPOSITION 3. - Soient N un sous-module de M , P un idéal bilatère vérifiant

(i) $$IX \subseteq N , \quad X \nsubseteq N \Longrightarrow I \subseteq P ,$$

(ii) $$\exists\, n \quad P^n \subseteq N \therefore M ,$$

alors N est P-primaire.

Preuve. - $IX \subseteq N \therefore M$, $X \nsubseteq N$, d'où $I \subseteq P$, et $I^n \subseteq P^n \subseteq N \therefore M$, donc N est primaire.
D'autre part, (ii) entraine $P \subseteq R(N)$. Soit $R(N)^m \subseteq N \therefore M$ (on peut choisir m minimal). On a $R(N).R(N)^{m-1} \subseteq N \therefore M$ avec $R(N)^{m-1} \nsubseteq N \therefore M$, d'où, d'après (i), $R(N) \subseteq P$, et $R(N) = P$.

PROPOSITION 4. - Tout idéal premier est primaire.

Preuve. - Elle se fait d'après la proposition précédente.

PROPOSITION 5. - Si N_1 , N_2 sont P-primaires, alors $N_1 \cap N_2$ est P-primaire.

Preuve. - On vérifie (i) et (ii) de la proposition 3.

(i) $IX \subseteq (N_1 \cap N_2) \therefore M$, $X \nsubseteq N_1 \cap N_2$ entraine par exemple, que $X \nsubseteq N_1$, d'où $I \subseteq P$, car N_1 est P-primaire.

(ii) $P^m \subseteq N_1 \therefore M$, $P^n \subseteq N_2 \therefore M$, d'où

$$P^{\max(n,m)} \subseteq (N_1 \cap N_2) \therefore M .$$

Remarque. - L'existence d'une décomposition d'un sous-module en éléments primaires n'est pas assurée dans le cas non commutatif à partir de la décomposition irréductible, car un sous-module irréductible n'est pas, en général, primaire.
(cf. contre exemple dans LESIEUR-CROISOT [5]).

Définition 5. - Soit, si, elle existe, une décomposition d'un sous-module N en intersection de sous-modules primaires $N = N_1 \cap \ldots \cap N_n$ avec les N_i P_i-primaires
Cette décomposition est dite réduite si

(i) il n'y a pas d'éléments superflus,

(ii) $P_i \neq P_j$, $i \neq j$.

On peut toujours transformer une décomposition en une décomposition réduite, d'après la proposition 5.

LEMME 6. - Soit $S = N \cap X = N' \cap X'$ avec N P-primaire et N' P'-primaire, $P \neq P'$. Alors $S = X \cap X'$.

Preuve. - En effet, $S \subseteq X \cap X'$.

Soit $z \in X \cap X'$. On peut supposer $P \not\subseteq P'$. On a $P^n \subseteq N \,\dot{.}\, M$. Alors

$$P^n z \in X \cap N = S \subseteq N' ,$$

d'où $P^n Az \subseteq N'$. Si $Az \not\subseteq N'$, on a $P^n \subseteq P'$, et $P \subseteq P'$, ce qui est impossible. Donc $Az \subseteq N'$ et $z \in N'$, d'où $z \in N' \cap X' = S$.

THÉORÈME 7 (unicité). - Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_n = N'_1 \cap \dots \cap N'_{n'}$, deux décompositions primaires de N en éléments primaires avec N_i P_i-primaires et N'_i P'_i-primaires. Alors $n = n'$ et $P_i = P'_{\sigma(i)}$ pour tout i , où σ est une permutation de $\{1 , 2 , \dots , n\}$.

Preuve. - On va montrer $P_1 = P'_{\sigma(1)}$, ce qui finira la démonstration. Supposons au contraire que $P_1 \neq P'_j$, $j = 1 , \dots , n'$.
D'après le lemme 6, on a

$$N = N'_2 \cap \dots \cap N'_{n'} \cap N_2 \cap \dots \cap N_n = N_1 \cap \dots \cap N_n .$$

En appliquant la même méthode à (N'_2 , N_1) , on obtient

$$N = N'_3 \cap \dots \cap N'_{n'} \cap N_2 \cap \dots \cap N_n = N_1 \cap \dots \cap N_n ,$$

et ainsi de suite. D'où $N = N_2 \cap \dots \cap N_n$. Ce qui est impossible, car N_1 serait superflu.

3. Sous-modules tertiaires.

Définition 1. - Un sous-module S d'un module M est dit essentiel dans M , et on note $S \lhd M$, s'il vérifie les conditions suivantes équivalentes

1° $\forall N$ sous-module de M , $S \cap N = 0 \Longrightarrow N = 0$,

2° $\forall\, 0 \neq x \in M$, $\exists\, \lambda \in A \Longrightarrow 0 \neq \lambda x \in S$.

PROPOSITION 1.

(a) $S_1 \lhd M$, $S_2 \lhd M \Longrightarrow S_1 \cap S_2 \lhd M$.

(b) $S_1 \lhd M$, $S \supseteq S_1 \Longrightarrow S \lhd M$.

Preuve. - La démonstration est évidente.

Définition 2. - On appelle radical tertiaire d'un module M l'idéal bilatère noté

$T(M)$ suivant

$$\begin{aligned} T(M) &= \{a \in A \ ; \ \exists\, S \lhd M \ , \ aS = 0\} . \\ &= \{a \in A \ ; \ \forall\, x \neq 0 \ , \ \exists\, \lambda x \neq 0 \ , \ aA\lambda x = 0\} . \\ &= \{a \in A \ ; \ 0 \,\dot{:}_M\, (a) \lhd M\} \ \text{avec} \ 0 \,\dot{:}_M\, (a) = \{x \in M \ ; \ (a)x = 0\} . \\ &= \text{maximum}\ \{I \ \text{bilatère} \ ; \ 0 \,\dot{:}\, I \lhd M\} . \end{aligned}$$

<u>Preuve</u>. – L'idéal $T(M)$ est <u>bilatère</u>. Soient a , $b \in T(M)$, alors $aS_1 = 0$, $bS_2 = 0$, avec $S_1 \lhd M$, $S_2 \lhd M$, d'où $(a - b)(S_1 \cap S_2) = 0$.
Si $a \in T(M)$ et $\lambda \in A$, alors $\lambda aS \subseteq aS = 0$.

<u>Il y a égalité des trois premiers ensembles, notés</u> X , Y , Z .

Si $a \in X$ alors $\forall\, x \neq 0$, $\exists\, 0 \neq \lambda x \in S$, d'où $aA\lambda x \subseteq aS = 0$ et $a \in Y$.

Si $a \in Y$, alors $0 \,\dot{:}\, (a) \lhd M$ et $a \in Z$.

Si $a \in Z$, alors $S = 0 \,\dot{:}\, (a) \lhd M$ et $aS = 0 \Longrightarrow a \in X$.

<u>Dernière égalité</u> : Soit I tel que $0 \,\dot{:}\, I \lhd M$. Soit $a \in I$, alors $0 \,\dot{:} (a) \supseteq 0 \,\dot{:}\, I$, d'où $0 \,\dot{:}\, (a) \lhd M$, et $a \in T(M)$, donc $I \subseteq T(M)$.

D'autre part, $0 \,\dot{:}\, T(M) \lhd M$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 \,\dot{:}\, T(M) &= 0 \,\dot{:} \textstyle\sum^n (a_i) \ , \ \text{car } A \text{ noethérien} \\ &= \textstyle\bigcap^n 0 \,\dot{:}\, (a_i) \ , \ \text{ce qui est facile à vérifier} \end{aligned}$$

donc $0 \,\dot{:}\, T(M) \lhd M$ d'après la proposition 1.

<u>Définition</u> 3. – On appelle <u>idéal singulier</u> (à droite) de A l'idéal bilatère

$$Z(A) = \{a \in A \ ; \ 0 \,\dot{:}\, a \lhd A\} .$$

THÉORÈME 2.

(a) <u>On a</u> $R(A) \subseteq T(A) \subseteq Z(A)$.

(b) <u>Si</u> A <u>est commutatif, on a</u> $R(A) = T(A) = Z(A)$.

<u>Preuve</u>.

(a) $R(A) \subseteq T(A)$: Il suffit de montrer que $0 \,\dot{:}\, R \lhd A$. Soit $(0 \,\dot{:}\, R) \cap X = 0$, alors

$$[(0 \,\dot{:}\, R) \cap X] \,\dot{:}\, R = 0 \,\dot{:}\, R \ ,$$

d'où

$$[(0 \,\dot{:}\, R) \,\dot{:}\, R] \cap (X \,\dot{:}\, R) = 0 \,\dot{:}\, R$$

implique

$$(0 \,\dot{:}\, R^2) \cap (X \,\dot{:}\, R) \cap X = (0 \,\dot{:}\, R) \cap X$$

implique

$$(0 \,\dot{:}\, R^2) \cap X = 0 \ ,$$

et, ainsi de suite on obtient

$$(0 \mathbin{.\!\!:} R^n) \cap X = 0 .$$

Mais $\exists\, n$, $R^n = 0$, d'où $A \cap X = 0$ et $X = 0$. Donc $0 \mathbin{.\!\!:} R \lhd A$.
$T(A) \subseteq Z(A)$: Evident.

(b) Si A est commutatif, on a évidemment $T(A) = Z(A)$. Soit $a \in T(A)$. La condition noethérienne donne,pour un entier n , $0 \mathbin{.\!\!:} a^n = 0 \mathbin{.\!\!:} a^{n+1}$. Alors $a^n = 0$. Soit au contraire $a^n \neq 0$. Alors $\exists\, \lambda$, $\lambda a^n \neq 0$, $aA\lambda a^n = 0$, d'où $\lambda a^{n+1} = 0$ et $\lambda a^n = 0$, ce qui est impossible. Donc $a^n = 0$ et $a \subset R(A)$.

Définition 4. - On appelle radical tertiaire d'un sous-module N de M le radical tertiaire du module M/N , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} T(N) \equiv T(M/N) &= \{a \in A \ ; \ \ \exists\, S \subseteq M ,\ aS \subseteq N ,\ \text{et}\ S \cap X = N \Longrightarrow X = N\} . \\ &= \{a \in A \ ; \ \ \forall\, x \notin N ,\ \exists\, \lambda x \notin N \ \ aA\lambda x \subseteq N\} . \\ &= \text{maximum}\ \{I \ ; \ \ (N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X = N \Longrightarrow X = N\} . \\ &= \text{maximum}\ \{I \ ; \ \ (N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X \subseteq N \Longrightarrow X \subseteq N\} . \end{aligned}$$

Preuve. - La dernière égalité : Soit I un élément de la première famille, et soit $(N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X \subseteq N$. Alors

$$(N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X \subseteq N \cap X \subseteq (N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X ,$$

d'où

$$(N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X = N \cap X , \text{ et } [(N \mathbin{.\!\!:} I) \cap X] + N = (N \cap X) + N ,$$

donc $(N \mathbin{.\!\!:} I) \cap (X + N) = N$. D'où $X + N = N$ et $X \subseteq N$, c'est-à-dire I appartient à la seconde famille. La réciproque est immédiate.

PROPOSITION 3.

(a) $$N \mathbin{\cdot\!\!.} M \subseteq T(N) .$$

(b) $$T(N_1 \cap \dots \cap N_k) \geqslant T(N_1) \cap T(N_2) \cap \dots \cap T(N_k) .$$

Preuve.

(a) Il suffit de montrer que $[N \mathbin{.\!\!:} (N \mathbin{\cdot\!\!.} M)] \cap X = N$ entraine $X = N$. En effet, si $[N \mathbin{.\!\!:} (N \mathbin{\cdot\!\!.} M)] \cap X = N$, comme $N \mathbin{.\!\!:} (N \mathbin{\cdot\!\!.} M) = M$, on a $M \cap X = X = N$.

(b) Il suffit de faire la démonstration pour $k = 2$. Soit $T = T(N_1) \cap T(N_2)$, et soit

$$[(N_1 \cap N_2) \mathbin{.\!\!:} T] \cap X \subseteq N_1 \cap N_2$$

d'où

$$[(N_1 \mathbin{.\!\!:} T) \cap (N_2 \mathbin{.\!\!:} T) \cap X \subseteq N_1 \cap N_2 \subseteq N_1$$

et, comme $T \subseteq T(N_1)$, on a

$$(N_2 \mathbin{.\!\!:} T) \cap X \subseteq N_1 \subseteq N_1 \mathbin{.\!\!:} T .$$

$$(N_2 \mathbin{.\!\!:} T) \cap X = (N_2 \mathbin{.\!\!:} T) \cap (N_1 \mathbin{.\!\!:} T) \cap X \subseteq N_1 \cap N_2 \subseteq N_2$$

et, comme $T \subseteq T(N_2)$, on a $X \subseteq N_2$. De la même façon, on montre $X \subseteq N_1$, et par conséquent $X \subseteq N_1 \cap N_2$.

Remarques. – On n'a pas, en général, $N_1 \subseteq N_2 \Longrightarrow T(N_1) \subseteq T(N_2)$.

Si Q est un idéal à gauche, d'après (a), on a $Q : A \subseteq T(Q)$, mais on n'a pas, en général, $Q \subseteq T(Q)$. Si Q est bilatère, alors $Q = Q : A$ et, dans ce cas, $Q \subseteq T(Q)$.

Définition 5. – Un sous-module N de M est dit tertiaire dans M s'il vérifie les conditions suivantes équivalentes

1° $\quad aAx \subseteq N \quad x \notin N \Longrightarrow a \in T(N)$, $(a \in A\ ,\ x \in M)$

2° $\quad IX \subseteq N \quad X \nsubseteq N \Longrightarrow I \subseteq T(N)$

3° $\quad N \subsetneqq N : I \Longrightarrow I \subseteq T(N)$.

Preuve.

1° ≡ 2° : immédiat.

2° $\Longrightarrow$ 3°. Soit $N \subsetneqq N : I = X$. Alors $IX \subseteq N$, $X \nsubseteq N$, d'où $I \subseteq T(N)$.

3° $\Longrightarrow$ 2°. Soit $IX \subseteq N$ et $X \nsubseteq N$. Alors $N \subsetneqq N : I$, d'où $I \subseteq T(N)$.

PROPOSITION 4. – N tertiaire implique $T(N)$ idéal premier.

Preuve. – Posons $P = T(N)$, et soit $I\mathfrak{J} \subseteq P$ avec $I \nsubseteq P$. Alors $N : I = N$, sinon on aurait $I \subseteq P$.

Soit $(N : \mathfrak{J}) \cap X = N$. Alors

$$N : I\mathfrak{J} = (N : I) : \mathfrak{J} = N : \mathfrak{J} .$$

Donc

$$(N : \mathfrak{J}) \cap X = (N : I\mathfrak{J}) \cap X = N$$

et comme $I\mathfrak{J} \subseteq P$, alors $X = N$. Donc $\mathfrak{J} \subseteq P$.

Définition 6. – On note $P = T(N)$, et N est dit P-tertiaire.

PROPOSITION 5.

(a) $\quad N$-primaire $\Longrightarrow N$-tertiaire.

(b) $\quad P$ idéal premier $\Longrightarrow P$ est P-tertiaire

(c) $\quad Q$ idéal à gauche irréductible $\Longrightarrow Q$ est P-tertiaire.

(c') $\quad N$ sous-module irréductible $\Longrightarrow N$ est P-tertiaire.

Preuve.

(a) Car $R(N) \subseteq T(N)$.

(b) Car il est P-primaire.

(c') Soit N un sous-module irréductible. Soit $N \subsetneqq N : I$ et $(N : I) \cap X = N$. Alors $X = N$. Donc N est tertiaire.

PROPOSITION 6. - Soit $N \neq M$ un sous-module de M, et P un idéal bilatère, tels que

(i) $$IX \subseteq N\ ,\quad X \nsubseteq N \Longrightarrow I \subseteq P\ .$$

(ii) $$P \subseteq T(N)\ .$$

Alors N est P-tertiaire.

Preuve. - Elle est identique à celle du cas primaire.

PROPOSITION 7. - Si N_1, N_2 sont P-tertiaires, alors $N_1 \cap N_2$ est P-tertiaire.

Preuve. - Vérifions (i) et (ii) de la proposition précédente.

(i) $IX \subseteq N_1 \cap N_2$, $X \nsubseteq N_1 \cap N_2$ entraine par exemple, $X \nsubseteq N_1$, d'où $I \subseteq T(N_1) = P$

(ii) $P = T(N_1) \cap T(N_2) \subseteq T(N_1 \cap N_2)$.

THÉORÈME 8 (existence). - Tout A-module (de type fini sur un anneau noethérien bilatère) admet une décomposition réduite finie en sous-modules tertiaires.

Preuve. - Soit $N = N_1 \cap \ldots \cap N_k$ une décomposition de N en éléments irréductibles qui sont tertiaires d'après la proposition 5. On peut regrouper les sous-modules qui ont même radical tertiaire d'après la proposition 7, et on obtient une décomposition réduite.

LEMME 9. - Soit $S = N \cap X = N' \cap X'$ avec N P-tertiaire, N' est P'-tertiaire, et $P \neq P'$. Alors $S = X \cap X'$.

Preuve. - Soit $P \nsubseteq P'$. On a $N' \therefore P = N'$ et $(N \cap X) \therefore P = (N' \cap X') \therefore P$, et en développant

$$(N \therefore P) \cap (X \therefore P) = (N' \therefore P) \cap (X' \therefore P) = N' \cap (X' \therefore P)\ ,$$

d'où

$$(N \therefore P) \cap (X \therefore P) \cap X \cap X' = N' \cap (X' \therefore P) \cap X \cap X'\ .$$

Donc

$$(N \therefore P) \cap X \cap X' = N' \cap X \cap X' \subseteq N'\ ,$$

d'où d'après la définition,

$$X \cap X' \subseteq N \quad \text{et} \quad X \cap X' \subseteq N \cap X = S\ ,$$

mais aussi $X \cap X' \geqslant S$, d'où $S = X \cap X'$.

THÉORÈME 10. - Soient

$N = N_1 \cap \ldots \cap N_n$ (les N_i sont P_i-tertiaires)
et $N = N'_1 \cap \ldots \cap N'_{n'}$ (les N'_i sont P'_i-tertiaires),

deux décompositions réduites de N .

Alors $n = n'$ et $\{P_i\} = \{P'_i\}$.

Preuve. - Elle se fait comme dans le cas primaire.

PROPOSITION 11. - Soit $N = N_1 \cap \ldots \cap N_n$ une décomposition en P_i-tertiaires réduites. Alors $T(N) = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n$.

Preuve. - Il suffit de montrer $T(N) \supseteq P_1 \cap \ldots \cap P_n$. Posons $P = T(N)$. Supposons $P \not\subseteq P_1$. Alors $N_1 \mathbin{.\!\dot{}\,} P = N_1$.
Soit $X = N_2 \cap \ldots \cap N_n$, $X \not\subseteq N_1$ (car la décomposition est réduite). Alors

$$N \mathbin{.\!\dot{}\,} P = (N_1 \cap X) \mathbin{.\!\dot{}\,} P = (N_1 \mathbin{.\!\dot{}\,} P) \cap (X \mathbin{.\!\dot{}\,} P) = N_1 \cap (X \mathbin{.\!\dot{}\,} P),$$

et

$$(N \mathbin{.\!\dot{}\,} P) \cap X = N_1 \cap (X \mathbin{.\!\dot{}\,} P) \cap X = N_1 \cap X = N,$$

d'où $X = N \subseteq N_1$. Ce qui est impossible.
Donc $P \subseteq P_1$, et de même $P \subseteq P_i$, $\forall\, i$; d'où $P \subseteq P_1 \cap \ldots \cap P_n$.

4. Sous-modules isotypiques.

Définition 1. - On dit qu'un sous-module N de M est isotypique dans M si

$$E(M/N) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$$

avec E_i injectifs indécomposables tous isomorphes. La classe π d'isomorphie de E_i s'appelle type de N, et N est dit π-isotypique.

PROPOSITION 1. - Si N est irréductible dans M, alors N est isotypique dans M.

Preuve.

$$N \text{ irréductible} \Longrightarrow M/N \text{ uniforme} \Longrightarrow E(M/N) \text{ indécomposable}$$

PROPOSITION 2. - Si N_1, N_2 sont π-isotypiques dans M, alors $N_1 \cap N_2$ est π-isotypique dans M.

Preuve. - Si $N = N_1 \cap N_2$,

$$0 \longrightarrow M/N \xrightarrow{\Phi} (M/N_1) \oplus (M/N_2) \subseteq E(M/N_1) \oplus E(M/N_2)$$

implique

$$E(M/N) \subseteq E(M/N_1) \oplus E(M/N_2) = \bigoplus^n I_i \bigoplus^m J_j ,$$

où $\Phi(X + N) = (X + N_1, X + N_2)$. D'où $E(M/N) = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ avec F_i isomorphe à certains I_i, I_j qui sont isomorphes entre eux. Donc $F_i \simeq F_j$, et N est π-isotypique.

Définition 2. - Une décomposition de $N = N_1 \cap \ldots \cap N_n$ avec N_i π_i-isotypiques est dite réduite si

(i) il n'y a pas d'éléments superflus $(N \neq \bigcap_{j \neq i} N_j)$

(ii) $M_i \neq M_j$, $i \neq j$.

THÉORÈME 3 (existence). – Si M est noethérien, alors tout sous-module admet une décomposition réduite en éléments π_i-isotypiques.

Preuve. – Comme M est noethérien, si N est sous-module, alors $N = N_1 \cap \ldots \cap N_n$ avec les N_i irréductibles, donc isotypiques. Cette décomposition, on peut la réduire en rassemblant les éléments du même type grâce à la proposition 2.

THÉORÈME 4 (unicité). – Soient $N = N_1 \cap \ldots \cap N_n = N'_1 \cap \ldots \cap N'_{n'}$, deux décompositions de N, réduites en éléments isotypiques. Alors $n = n'$ et $M_i = M'_j$.

Preuve. – On a

$$N = (\cap_\alpha I_{1\alpha}) \cap \ldots \cap (\cap_\lambda I_{n\lambda}) = (\cap_\alpha \mathfrak{I}_{1\alpha}) \cap \ldots \cap (\cap_{\lambda'} \mathfrak{I}_{n'\lambda'})$$

chacune en éléments irréductibles. Alors

$$E(M/N) = \underbrace{E(M/I_{1\alpha})}_{M_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{E(M/I_{n\lambda})}_{M_n} = \underbrace{E(M/\mathfrak{I}_{1\alpha})}_{M'_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{E(M/\mathfrak{I}_{n'\lambda'})}_{M'_{n'}} .$$

5. Anneaux classiques. T-anneaux.

Définition 1. – Un A-module M est dit d'Artin-Rees si, pour tout idéal I bilatère de A, pour tout sous-module N de M, et pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$, il existe $h = h(n)$ tel que

$$I^h M \cap N \subseteq I^n N .$$

LEMME 1. – Soit N un sous-module tertiaire de M. Alors N est primaire si, et seulement si, il existe n tel que $T^n(N) \subseteq N \therefore M$.

Preuve. – Soit N primaire, alors $R(N) = T(N)$, et il existe n tel que $T^n(N) \subseteq N \therefore M$. Réciproquement, si $T^n(N) \subseteq N \therefore M$, alors $T(N) \subseteq R(N)$.

THÉORÈME 2. – Les conditions suivantes sont équivalentes

1° M est un A-module d'Artin-Rees.

2° Tout sous-module tertiaire est primaire.

3° Tout sous-module admet une décomposition primaire.

Preuve.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Il existe h tel que

$$T^h(N)M \cap (N \therefore T(N)) \subseteq T(N)[N \therefore T(N)] \subseteq N ,$$

d'où, si N est tertiaire, $T^h(N)M \subseteq N$ et d'après le lemme 1, N est primaire.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Soit (I , N , n) comme dans la définition 1. Soit une décomposition réduite en tertiaires

$$I^n N = N_1 \cap \ldots \cap N_k \cap N'_1 \cap \ldots \cap N'_{k'} \quad \text{avec} \begin{cases} I^n \subseteq P_i , & i = 1 , \ldots , k . \\ I^n \not\subseteq P'_j , & j = 1 , \ldots , k' . \end{cases}$$

Comme $I^n N \subseteq N'_j$, $J^n \not\subseteq P'_j$, alors $N \subseteq N'_j$, d'où

$$N \subseteq N'_1 \cap \ldots \cap N_k \quad \text{et} \quad I^{nt_i} \subseteq P_i^{t_i} \subseteq N_i \therefore M .$$

Donc

$$\exists\, h = h(nt_i) , \quad I^h M \subseteq N_1 \cap \ldots \cap N_k$$

et

$$I^h M \cap N \subseteq N_1 \cap \ldots \cap N_k \cap N'_1 \cap \ldots \cap N'_{k'} = I^n N$$

2° $\Longrightarrow$ 3° est évident.

3° $\Longrightarrow$ 1° : même principe que pour 2° $\Longrightarrow$ 1°.
Soit (I , N , n) comme dans la définition 1 , et soit $I^n N = N_1 \cap \ldots \cap N_m$ une décomposition primaire. Si $N \subseteq N_i$, pour $i = 1 , \ldots , n$, on a

$$I^n M \cap N \subseteq N \subseteq N_1 \cap \ldots \cap N_m = I^n N .$$

S'il existe un i tel que $N \not\subseteq N_i$, $i = 1 , \ldots , m'$, et $N \subseteq N_i$ pour $i = m' + 1 , \ldots , m$, alors, les N_i étant primaires, il existe $s_i \in \underset{\sim}{N}$, tel que $(I^n)^{s_i} \subseteq N_i \therefore M$ et, en posant $s = \sup (s_1 , \ldots , s_m)$, on a

$$I^{ns} M \cap N \subseteq I^n N .$$

<u>Définition</u> 2. - Un anneau A noethérien à gauche, vérifiant, comme un A-module à gauche, les propriétés du théorème 2, est appelé anneau <u>classique</u>.

<u>Exemples</u>. - Sont des anneaux classiques :

1° Tout anneau commutatif noethérien ;

2° Tout anneau noethérien dont les idéaux à gauche et à droite sont bilatères ;

3° L'anneau des matrices $M[A]$, où A est un anneau commutatif, noethérien ;

4° L'anneau des matrices $M_n[A]$, où A est un anneau classique ;

5° Tout anneau principal, intègre ;

6° Toute A-algèbre centrale Λ , où A est un anneau commutatif noethérien, tel que les idéaux bilatères de Λ sont de la forme ΛI , avec I idéal de Λ ;

7° Toute A-algèbre, séparable, Λ , de type fini en tant que A-module, où A est un anneau commutatif noethérien ;

8° L'anneau des endomorphismes d'un A-module projectif de type fini, où A est commutatif et noethérien ;

9° Un ordre maximal Λ , dans une algèbre simple centrale sur le corps de fractions d'un anneau de Dedekind ;

10° Un anneau artinien, somme directe fini d'anneaux artiniens primaires.
(Pour tous ces exemples, voir M.-C. GERMA [2] ;)

11° L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente finie sur un corps K . Cette propriété caractérise la nilpotence.

(Voir J. C. Mc CONNEL [6].)

LEMME 3. - <u>Si</u> $V = \cap \{X \subseteq M \; ; \; I \subseteq T(\lambda)\}$, <u>où</u> I <u>est un idéal bilatère, alors on a</u> $IV = V$.

<u>Preuve</u>. - Soit $IV = N_1 \cap \dots \cap N_n$ en P_i-tertiaires (réduite) avec

$$\begin{cases} V \nsubseteq N_i \ , & i = 1 \ , \dots , p \\ V \subseteq N_j \ , & j = p+1 \ , \dots , n \ . \end{cases}$$

Alors, pour les N_i tels que $V \nsubseteq N_i$, on a $I \subseteq P_i$, d'où

$$I \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_p = T(N_1 \cap \dots \cap N_p) \ ,$$

car la décomposition est réduite.

Pour les N_j tels que $V \subseteq N_j$, alors

$$V \subseteq N_{p+1} \cap \dots N_n \quad \text{et} \quad IV = IV \cap V = (N_1 \cap \dots \cap N_p) \cap V = V \ .$$

LEMME 4. - <u>On a</u> $\cap_{n=1}^{\infty} I^n M = \cap \{X \subseteq M \; ; \; I \subseteq R(X)\}$.

<u>Preuve</u>. - Si W est la première intersection et W' la seconde, on a :

$$I \subseteq R(X) \Longrightarrow I^k M \subseteq X \Longrightarrow W \subseteq X \quad \text{et} \quad W \subseteq W' \ .$$

On a $I \subseteq R(I^n M)$, car $I^k \subseteq I^k M \therefore M$.

THEOREME 5. - <u>Soit</u> M <u>un</u> <u>A-module d'Artin-Rees, et</u> I <u>un idéal bilatère de</u> A .

(a) <u>Si</u> $V = \cap^{\infty} I^n M$, <u>alors</u> $V = IV$.

(b) <u>Si</u> $I \subseteq \mathfrak{J}(A)$ <u>radical de Jacobson, alors</u> $\cap^{\infty} I^n M = 0$.

<u>Preuve</u>. - Elle est évidente d'après les lemmes 3 et 4.

D'après les propositions 9 et 10 du § 6 ci-après, on peut faire correspondre, à tout module injectif indécomposable E , l'idéal premier $P = \text{Ass } E$. On a donc l'application

$$f : \pi \longrightarrow \text{spec}(A)$$
$$E \longmapsto P = \text{Ass } E$$

entre les classes π d'injectifs indécomposables et les idéaux premiers de A . Cette application est surjective, car

$$E(A/P) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n \ ;$$

avec $E_i \simeq E_j$ et E_i injectifs indécomposables, et $P = \text{Ass } E_i$, car P est P-tertiaire.

<u>Définition</u> 3. - On appelle <u>T-anneau à gauche</u> un anneau noethérien à gauche tel que f est bijective.

THÉORÈME 6. - <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1° A <u>est</u> T-<u>anneau à gauche</u> ;

2° <u>Tout</u> A-<u>module à gauche tertiaire de type fini est isotypique</u>.

<u>Preuve</u>.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soient A un T-anneau, et M un A-module de type fini, tertiaire. Soit $0 = N_1 \cap \dots \cap N_n$, où les N_i sont irréductibles, donc tertiaires, et admettent le même idéal associé P ; il en résulte que

$$E(M) = E(M/N_1) \oplus \dots \oplus E(M/N_n)$$

somme directe d'injectifs indécomposables qui ont le même idéal associé P . Donc, comme A est un T-anneau, les $E(M/N_i)$ sont isomorphes entre eux, et M est isotypique.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Soit A un anneau noethérien à gauche dans lequel tout module tertiaire de type fini est isotypique.
Soient E_1 , E_2 deux injectifs indécomposables tels que

$$\text{Ass } E_1 = \text{Ass } E_2 = P \, .$$

On a $E_1 = E(Ax_1)$ avec $0 \neq x_1 \in E_1$, et $E_2 = E(Ax_2)$ avec $0 \neq x_2 \in E_2$.
Alors le module $M = Ax_1 \oplus Ax_2$ est de type fini et tertiaire car

$$\text{Ass } M = \text{Ass } E(M) = \text{Ass}(Ax_1) \cup \text{Ass}(Ax_2) = P \, .$$

Donc M est isotypique. Par conséquent, $E_1 \simeq E_2$, car

$$E(M) = E(Ax_1) \oplus E(Ax_2) = E_1 \oplus E_2 \, .$$

<u>Remarque</u>. - Une définition équivalente des T-anneaux est la condition de Krause

(i) Pour tout idéal premier P , dans l'anneau A/P , tout idéal essentiel (à gauche) contient un idéal bilatère non nul.

<u>Exemples</u>. - Sont des T-anneaux :

1° Tout anneau commutatif, noethérien ;

2° Les anneaux noethériens à gauche dans lesquels tout idéal à gauche est bilatère ;

3° Les anneaux qui sont de type fini sur leur centre, lequel est noethérien ;

4° Les anneaux noethériens à gauche à identité polynomiale ;

5° Les anneaux artiniens à gauche.

THÉORÈME 7. - <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1° A <u>est un</u> T-<u>anneau, et tout idéal premier est irréductible à gauche</u> ;

2° <u>Pour tout injectif indécomposable</u> E , <u>il existe un idéal premier tel que</u> $E \simeq E(A/P)$;

3° <u>Pour tout idéal premier</u> P <u>et pour tout idéal à gauche</u> L <u>tel que</u> $L \supsetneq P$, <u>il existe un idéal bilatère</u> I <u>tel que</u> $L \supsetneq I \supsetneq P$.

Preuve. - Voir [8], page 166.

6. Injectifs indécomposables.

Définitions. - Un module M est dit indécomposable si

$$M = M_1 \oplus M_2 \Longrightarrow M_1 = 0 \quad \text{ou} \quad M_2 = 0 .$$

Un module M est dit uniforme (ou co-irréductible) si 0 est un sous-module irréductible, i. e.

$$N_1 \cap N_2 = 0 \Longrightarrow N_1 = 0 \quad \text{ou} \quad N_2 = 0 .$$

PROPOSITION 1. - M est injectif indécomposable $\Longleftrightarrow M$ est injectif minimal.

Preuve. - Soit $0 \neq N'$ injectif, et $N' \subset M$, alors $M = N' \oplus N''$, d'où $N'' = 0$ et $M = N'$.
Réciproquement, soit $M = N' \oplus N''$, alors N' et N'' sont injectifs, donc $N' = M$ ou $N'' = M$.

PROPOSITION 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° M est uniforme ;

2° $E(M)$ est injectif indécomposable ;

3° Si $0 \neq M' \subseteq M$, alors $E(M') = E(M)$.

Preuve.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soit $E(M) = E_1 \oplus E_2$, $E_1 \neq 0$, alors $E_1 \cap M \neq 0$, $E_2 \cap M \neq 0$, d'où

$$(E_1 \cap M) \cap (E_2 \cap M) \subseteq E_1 \cap E_2 = 0 ,$$

et M est non uniforme.

2° $\Longrightarrow$ 3° : $E(M') \subseteq E(M)$, mais, $E(M)$ étant minimal, on a $E(M') = E(M)$.

3° $\Longrightarrow$ 1° : Soit $X \neq 0$, $Y \neq 0$, des sous-modules de M, alors $E(M) = E(X) = E(Y)$ d'où $X \triangleleft E(Y)$ et $X \cap Y \neq 0$.

PROPOSITION 3. - Si M est uniforme, et $M \triangleleft E$, alors E est uniforme.

Preuve. - Soient $X \neq 0$, $Y \neq 0$ des sous-modules de E, alors $X \cap M \neq 0$, $Y \cap M \neq 0$, d'où

$$0 \neq (X \cap M) \cap (Y \cap M) \subseteq X \cap Y .$$

PROPOSITION 4. - Soient M_1 et M_2 uniformes. Alors on a

$$E(M_1) = E(M_2) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \exists\, 0 \neq X \subseteq M_1 , \quad 0 \neq Y \subseteq M_2 , \quad X \simeq Y .$$

Preuve. - Soit $E(M_1) \simeq E(M_2)$, d'où $M_2 \simeq M_1' \subseteq E(M_1)$, et $0 \neq M_1' \cap M_1$, sous-module de M_1, est isomorphe à un sous-module de M_2.
Réciproquement, si $X \simeq Y$, alors $E(X) = E(M_1)$, $E(Y) = E(M_2)$, d'où $E(M_1) = E(M_2)$.

PROPOSITION 5. - Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ une décomposition sans élément superflu en sous-modules N_i irréductibles de M, alors

$$E(M/N) \simeq E(M/N_1) \oplus \dots \oplus E(M/N_n)$$

avec les $E(M/N_i)$ injectifs indécomposables.

Preuve. - Les N_i sont irréductibles, donc les M/N_i sont uniformes, et $E(M/N_i)$ indécomposables.

On peut identifier M/N avec le sous-module diagonal de $\bigoplus^n E(M/N_i)$ fermé dans $(m + N_1, \dots, m + N_n)$.
Il suffit de montrer

$$M/N \lhd \bigoplus_{i=1}^n E(M/N_i) .$$

On montre d'abord $(M/N) \cap (M/N_i) \neq 0$, $\forall\, i$. Montrons-le par exemple pour $i = 1$. Comme la décomposition n'a pas d'élément superflu, il existe $m \in M$ tel que $m \in N_2 \cap \dots \cap N_n$ et $m \notin N_1$. Donc

$$(m + N_1, \dots, m + N_n) = (m + N_1, 0, \dots, 0) \in (M/N_i) \cap (M/N) .$$

Comme $(M/N) \cap (M/N_i) \neq 0$, on a $0 \neq (M/N) \cap (M/N_i) \subseteq E(M/N_i)$ et, comme $E(M/N_i)$ est indécomposable, on a

$$E((M/N) \cap (M/N_i)) = E(M/N_i) .$$

Montrons maintenant que si $x \in \bigoplus^n E(M/N_i)$, $\exists\, a \in A$ tel que $ax \in M/N$. Soit $x \in \bigoplus^n E(M/N_i)$, alors $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in E(M/N_i)$.
On peut supposer $x_1 \neq 0$, alors

$$x_1 \in E(M/N_1) = E((M/N) \cap (M/N_1)) \Longrightarrow \exists\, a_1 \in A ,\quad 0 \neq a_1 x_1 \in (M/N) \cap (M/N_1)$$

et ainsi de suite. On a

$$0 \neq a_1 x = a_1 x_1 + \dots + a_1 x_n$$

et

$$0 \neq a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 x \in M/N .$$

THEOREME 6 (existence) [MATLIS]. - Soit A noethérien à gauche, et L un idéal à gauche. Alors $E(A/L) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ avec E_i injectifs indécomposables.

Preuve. - $L = L_1 \cap \dots \cap L_n$ avec L_i irréductibles. Cette décomposition est supposée sans élément superflu, sinon on la réduit (l'existence d'une telle décomposition est toujours vraie dans un anneau noethérien à gauche). En appliquant la proposition 5, on a

$$E(A/L) \simeq E(A/L_1) \oplus \dots \oplus E(A/L_n) .$$

THEOREME 7 (unicité) [AZUMAYA]. - Si $M = E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_{n'}$ en injectifs indécomposables, alors $n = n'$, et $E_i \simeq E'_{\sigma(i)}$, $\forall\, i$.

Preuve. - Voir [5] ou [7].

PROPOSITION 8. - *Soit* M *injectif, et* $M \subseteq E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, E_i *injectifs indécomposables, alors*

$$M = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_m \quad \text{avec} \quad E'_i \simeq E_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad m \leqslant n \ .$$

Preuve. - Comme M est injectif, il existe M' injectif tel qu'on a

$$M \oplus M' = E_1 \oplus \dots \oplus E_n \ ,$$

comme

$$M = F_1 \oplus \dots \oplus F_r \quad \text{et} \quad M' = F'_1 \oplus \dots \oplus F'_s \ ,$$

le théorème 7 donne $n = r + s$ et $E_i \simeq F_i$ ou F'_i .

Soit M un module uniforme (par exemple un module injectif indécomposable). Si on prend la famille $\mathfrak{L} = \{0 \therefore X \ ; \ 0 \neq X \subseteq M\}$, elle admet un élément maximal. Soit $P = 0 \therefore X_0$. Cet élément est maximum. En effet, si $0 \therefore Y \in \mathfrak{L}$, comme $X_0 \cap Y \neq 0$, alors

$$P = 0 \therefore X_0 \subseteq 0 \therefore (X_0 \cap Y) \ ,$$

d'où

$$P = 0 \therefore (X_0 \cap Y) \quad \text{et} \quad 0 \therefore Y \subseteq 0 \therefore (X_0 \cap Y) \subseteq P \ .$$

Cet idéal est premier comme on peut le voir facilement. En plus, $P = T(M)$. En effet, si $a \in T(M)$, alors $\exists \ S \lhd M$ tel que $aS = 0$, d'où $a \in 0 \therefore S \subseteq P$. D'autre part, $0 \therefore P \lhd M$ car tout sous-module non nul est essentiel dans M , puisque M est une forme. Donc $P \subseteq T(M)$. D'où, les propositions suivantes.

PROPOSITION 9. - *A tout module uniforme* M *correspond un idéal premier qui est le radical tertiaire de* M .

PROPOSITION 10. - *Si* M_1 , M_2 *sont uniformes, et* $M_1 \simeq M_2$, *alors* $P_1 = P_2$, *où* P_i *est le radical tertiaire de* M_i .

7. Relations entre tertiaires et Ass M .

Soit N un sous-module d'un A-module M . Alors N admet une décomposition tertiaire (unique) $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ avec les N_i P_i-tertiaires. Notons

$$\mathrm{Ass}'(N) = \{P_1 \ , \ \dots \ , \ P_n\} \ .$$

D'autre part, posons

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \{P'_1 \ , \ P'_2 \ , \ \dots \ , \ P'_{n'}\} \ .$$

$E(M/N)$ se décompose en somme directe finie d'injectifs indécomposables. Soit

$$E(M/N) = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \ .$$

A chaque injectif indécomposable correspond un idéal premier, et posons

$$\mathrm{Ass}'' N = \{P''_1 , P''_2 , \dots , P''_k\} .$$

On va montrer que

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \mathrm{Ass}' N = \mathrm{Ass}'' N .$$

<u>Définition</u>. - Un résiduel $P = X \therefore Y$, $X \subsetneqq Y$, de X est dit <u>essentiel</u> si $X \subsetneqq Z \subseteq Y \Longrightarrow P = X \therefore Z$.

LEMME 1. - <u>Pour un sous-module</u> N <u>de</u> M , <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u>.

1° P <u>est résiduel essentiel de</u> N ;

2° $P \in \mathrm{Ass}(M/N)$;

3° $P = N \therefore Y$, $Y \nsubseteq N$, <u>et</u> $Z \nsubseteq N$, $Z \subseteq Y \Longrightarrow P = N \therefore Z$.

<u>Preuve</u>. - L'équivalence 1° $\Longleftrightarrow$ 2° est évidente.

1° $\Longrightarrow$ 3° : Soit $P = N \therefore Y$, $N \subset Y$, $Z \nsubseteq N$, $Z \subseteq Y$. Alors $N \subsetneqq N + Z \subseteq Y$, d'où

$$P = N \therefore Y = N \therefore (N + Z) = N \therefore Z$$

3° $\Longrightarrow$ 1° : Soit $P = N \therefore Y$, $Y \nsubseteq N$,

$$P = N \therefore (N + Y) .$$

$$N \subsetneqq Z \subseteq N + Y ,$$

d'où

$$Z = (N + Y) \cap Z = N + (Y \cap Z) ,$$

et

$$Y \cap Z \nsubseteq N , \quad Y \cap Z \subseteq Y .$$

D'où

$$P = N \therefore (Y \cap Z) ,$$

et

$$N \therefore Z = N \therefore [N + (Y \cap Z)] = N \therefore (Y \cap Z) = P .$$

THÉORÈME 2. - <u>On a</u> $\mathrm{Ass}(M/N) = \mathrm{Ass}' N = \mathrm{Ass}'' N$.

<u>Preuve</u>. - Soit $P \in \mathrm{Ass}(M/N)$, alors $P = N \therefore X$, $N \subsetneqq X$. Supposons $I \neq P_1 = T(N_1)$

$$N = N \cap X = N_1 \cap \dots \cap N_n \cap X \subseteq N_2 \cap \dots \cap N_n \cap X \equiv Y .$$

Alors $N \subsetneqq Y \subseteq X$, d'où

$$P = N \therefore X = N \therefore Y = N_1 \therefore Y$$

et, si $Z \nsubseteq N_1$, $Z \subseteq Y$, alors $Z \nsubseteq N$ $Z \subseteq Y$, d'où

$$P = N \therefore Y = N \therefore Z = N_1 \therefore Z .$$

D'où $P = P_1$ ce qui est impossible. Donc

$$N = N_2 \cap \dots \cap N_n \cap X .$$

En répétant la même méthode, eu supposant cette fois-ci $P \neq P_2 = T(N_2)$; on obtient $N = N_3 \cap \dots \cap N_n \cap X$, et ainsi de suite ; si $P \neq P_n = T(N_n)$, on a $N = X$, ce qui est impossible. Donc il existe i tel que $P = T(N_i) \in \mathrm{Ass}' N$.

Soit $P \in \mathrm{Ass}' N$, et posons $S = M/N$, $P = 0 \,\therefore\, Y$ résiduel essentiel de S . Alors $P = 0 \,\therefore\, Ay$ avec $y \in Y$.

$$E(Ay) \subseteq E(S) = \bigoplus^n E_i ,$$

d'où

$$E(Ay) = \bigoplus_{i=1}^k E_i'$$

et

$$y = e_1' + \dots + e_k'$$

d'où

$$P = 0 \,\therefore\, Y = 0 \,\therefore\, Ay = \bigcap 0 \,\therefore\, Ae_i'$$

et, comme P est premier, on a

$$P = 0 \,\therefore\, Ae_i' \in \mathrm{Ass}'' N .$$

Si $P = 0 \,\therefore\, Y \in \mathrm{Ass}'' N$, $Y \subseteq E_i$, alors

$$0 \,\therefore\, (Y \cap S) = 0 \,\therefore\, Y = P$$

et si $0 \neq Z \subseteq Y \cap S$, alors

$$P = 0 \,\therefore\, Z \Longrightarrow P \in \mathrm{Ass}(M/N) .$$

Soit $P \in \mathrm{Ass}(M/N)$. On a

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_n = N_1 \cap X' , \quad X' \not\supseteq N_1 .$$

Soit $\mathcal{L} = \{N \,\therefore\, X ; \; N \subsetneq X \subseteq X'\}$. Alors il existe un élément maximal qui est résiduel essentiel, car si $N \subsetneq Y \subseteq X$, alors $N \,\therefore\, Y \supseteq N \,\therefore\, X$, d'où l'égalité. Par conséquent, on a un résiduel $P = N \,\therefore\, X$ tel que $X \subset X'$ et $N = N_1 \cap X'$. Alors, d'après la démonstration de la partie $\mathrm{Ass}(M/N) \subseteq \mathrm{Ass}' N$, on a $N = N_1 \cap X'$, d'où $P = P_1$.

COROLLAIRE 3.

(a) <u>Un sous-module</u> N <u>est tertiaire si, et seulement si,</u> $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$.

(b) <u>Tout sous-module isotypique est tertiaire.</u>

<u>Preuve.</u>

(a) est évident.

(b) Si N est isotypique, alors

$$E(M/N) = \bigoplus^n E_i \quad \text{avec} \quad E_i = E_j ,$$

d'où $T(E_i) = T(E_j) = P$ et

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \mathrm{Ass}\, E(M/N) = \{P\} .$$

BIBLIOGRAPHIE

La théorie tertiaire est traitée dans les livres suivants :

[1] BEHRENS (E. A.). - Ring theory. - New York, Academic Press, 1972 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 44).

[2] GERMA (M.-C.). - Modules tertiaires, modules primaires et lemme d'Artin-Rees, Séminaire d'algèbre non commutative, 1967/68, nº 12, 15 p. (Publications mathématiques d'Orsay).

[3] HERSTEIN (I. N.). - Topics in ring theory. - Chicago, the University of Chicago Press, 1969 (Chicago Lectures in Mathematics).

[4] LARSEN (M. D.) and Mc CARTHY (P. J.). - Multiplicative theory of ideals. - New York, Academic Press, 1971 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 43).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[6] Mc CONNEL (J. C.). - The intersection theorem for a class of non commutative rings, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 17, 1967, p. 487-498.

[7] RENAULT (G.). - Algèbre non commutative. - Paris, Gauthier Villars, 1975 (Varia Mathématica).

[8] STENSTRÖM (P.). - Rings of quotients. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 217).

(Texte reçu le 25 avril 1977)

Dimitri LATSIS
9 rue Maxime Bacquet
94110 ARCUEIL