Groupe d'étude d'algèbre

Catherine Heimendinger

La dimension de Gel'fand-Kirillov

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. n° 2, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A2_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
2e année, 1976/77, n° 2, 19 p.
22 février et 1er mars 1977

LA DIMENSION DE GEL'FAND-KIRILLOV

par Catherine HEIMENDINGER

I. Définitions.

Soient k un corps, et A une k-algèbre (associative, unitaire). Si U et V sont des sous-k-espaces vectoriels de A , on note U.V l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{uv \; ; \; u \in U \text{ et } v \in V\}$.

Définition 1. - Si la dimension de V est finie, on peut definir l'application d_V de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}^*$ par

$$d_V(n) = \dim (V^0 + V^1 + \ldots + V^n) ,$$

si $V^0 = k$ et $V^n = V.V^{n-1}$, cette fonction est croissante.

Remarque. - Si 1 appartient à V , alors on a $d_V(n) = \dim V^n$. On pourra, en général, se ramener à ce cas.

Définition 2. - La dimension de Gel'fand-Kirillov de A , notée Dim A , est donnée par

$$\text{Dim } A = \sup_V \overline{\lim}_{n\to+\infty} (\log d_V(n))/\log n ,$$

Notation. - Si A est une k-algèbre, Dim A désigne la dimension de Gel'fand-Kirillov de A , et dim A désigne la dimension de A en tant que k-espace vectoriel.

Définition 3. - Soit $\mathfrak{M}$, l'ensemble des fonctions croissantes de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{R}^+$. On définit sur $\mathfrak{M}$ une relation réflexive et transitive, notée $\leqslant^\bullet$, par $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{M}$.

$$f \leqslant^\bullet g \Longleftrightarrow \exists\, m \in \underset{\sim}{N} , \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} ; \quad f(n) \leqslant g(mn) .$$

On peut associer à $\leqslant^\bullet$ la relation d'équivalence $=^\bullet$ définie par

$$f =^\bullet g \Longleftrightarrow f \leqslant^\bullet g \quad \text{et} \quad g \leqslant^\bullet f .$$

On note $\omega(f)$ la classe de f pour cette relation, et $\leqslant$ la relation d'ordre induite par $\leqslant^\bullet$ sur $\mathfrak{M}/=^\bullet$.

Exemples 1.

1° Soient f et g des fonctions polynomiales à valeurs dans $\underset{\sim}{R}^+$, alors f et g sont équivalentes si, et seulement si, leurs degrés sont égaux.

Démonstration.

(a) Si f et g ont même degré, on va montrer qu'ils sont équivalents. Pour cela il suffit de prouver que $f(n) = a_p\, n^p + a_{p-1}\, n^{p-1} + \ldots + a_0$, $a_p > 0$ et

$g(n) = n^p$ sont équivalents. On choisit $m \in N$ tel que $m \geq a_p + a_{p-1} + \dots + a_0$, on a alors : $f(n) \leq g(mn)$.
On choisit $m' \in \underset{\sim}{N}$ tel que $m' > \sqrt[p]{\frac{1}{a_p}}$ on a $g(n) \leq f(m'n)$.

(b) Montrons maintenant la réciproque.
On a donc par hypothèse $f \stackrel{\cdot}{=} g$. On pose

$$f(x) = a_p\, x^p + a_{p-1}\, x^{p-1} + \dots + a_0 \,,$$

$$g(x) = b_q\, x^q + b_{q-1}\, x^{q-1} + \dots + b_0 \,.$$

Puisque $f \stackrel{\cdot}{\leq} g$, il existe un m dans $\underset{\sim}{N}$, tel que, pour tout n de $\underset{\sim}{N}$, on a $f(n) \leq g(mn)$, c'est-à-dire $f(n)/g(mn) \leq 1$, puisque f et g sont positives. Or lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (f(n)/g(mn)) &= +\infty && \text{si} \quad p > q \\ &= a_p/(b_p\, m^p) && \text{si} \quad p = q \\ &= 0 && \text{si} \quad p < q \,. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $p \leq q$.
Comme on a aussi $g \stackrel{\cdot}{\leq} f$, il en résulte $q \leq p$. On trouve donc $f \stackrel{\cdot}{=} g \Longrightarrow p = q$.

2° Pour tout γ dans $\underset{\sim}{R}^+$, on définit p_γ comme étant la classe d'équivalence de l'application $n \longmapsto n^\gamma$, et on a

$$p_\gamma = p_\delta \Longleftrightarrow \gamma = \delta \,.$$

3° On définit, pour ε dans R^{+*}, la classe e_ε de l'application $n \longmapsto e^{n^\varepsilon}$, et on a $e_\varepsilon = e_\rho \Longleftrightarrow \varepsilon = \rho$.

LEMME 1. - Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de A, si V engendre l'algèbre A, il existe m dans $\underset{\sim}{N}$, tel que pour tout n de $\underset{\sim}{N}^*$ on ait

$$d_W(n) \leq d_V(mn) \,.$$

Donc

$$\omega(d_W) \leq \omega(d_V) \,.$$

Démonstration. - On peut supposer que 1 appartient à V, et à W. V engendre A signifie $A = \bigcup_{n\in N} V^n$; comme de plus W est de dimension finie, il existe un m dans $\underset{\sim}{N}$ tel que $W \subseteq V^m$. On a alors, pour tout n de $\underset{\sim}{N}$, $W^n \subset V^{mn}$, et par suite $d_W(n) \leq d_V(mn)$.

LEMME 2. - Soit f dans $\mathfrak{M}$. On a

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n\to\infty} (\log f(n))/\log n &= \inf \{\gamma \in \underset{\sim}{R} \,;\; f(n) \leq n^\gamma \text{, pour presque tout } n\} \\ &= \inf \{\gamma \in \underset{\sim}{R} \,;\; \omega(f) \leq p_\gamma \} \,. \end{aligned}$$

Cette limite ne dépend donc que de la classe de f.

Démonstration.

(a) On va d'abord démontrer que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(\log f(n))/\log n \leq \inf \{\gamma \in \underset{\sim}{R} \ ; \ f(n) \leq n^{\gamma} \text{ , pour presque tout } n\} .$$

Soient

$$\ell = \overline{\lim} \ (\log f(n))/\log n \ ,$$

et

$$\ell' = \inf \{\gamma \in \underset{\sim}{R} \ ; \ f(n) \leq n^{\gamma} \text{ pour presque tout } n\}$$

et soit γ dans $\underset{\sim}{R}$ tel que $f(n) \leq n^{\gamma}$.
On a alors

$$(\log f(n))/\log n \leq \log n^{\gamma}/\log n = \gamma \ ,$$

d'où

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(\log f(n))/\log n \leq \gamma$$

et on obtient bien le résultat $\ell \leq \ell'$.

(b) Démontrons l'inégalité inverse, pour cela supposons $\ell > \ell'$.
Il existe alors γ dans $\underset{\sim}{R}$, supérieur à ℓ et tel que, pour une infinité de n dans $\underset{\sim}{N}$, on ait $f(n) > n^{\gamma}$.
D'où $\ell = (\log f(n))/\log n > \gamma > \ell$; ce qui est impossible.
On a donc $\ell = \ell'$.

On peut alors donner les définitions suivantes.

<u>Définition</u> 4. - Pour ρ dans $\mathfrak{M}$, $\operatorname{Dim} \rho = \overline{\lim}_{n\to\infty}(\log f(n))/\log n$, et pour a dans $\mathfrak{M}/\overset{\bullet}{=}$, $\operatorname{Dim} a = \operatorname{Dim} \rho$ si $f \in a$.

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> V <u>et</u> W <u>des sous-espaces vectoriels de dimension finie de</u> A , <u>qui engendrent, l'un et l'autre,</u> A . <u>Alors</u> $\omega(d_V) = \omega(d_W)$.

<u>Démonstration</u>. - Elle résulte directement du lemme 1.

<u>Définition</u> 5. - Si A est une algèbre de type fini, on appelle <u>croissance de</u> A $\omega(A) = \omega(d_V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie qui endendre A , et l'algèbre A est dite à <u>croissance polynomiale</u> si $\omega(A) = p_m$, où m est dans $\underset{\sim}{N}$, et à <u>croissance exponentielle</u> si $\omega(A) = e_1$.

<u>Définition</u> 6. - On a une seconde définition de la <u>dimension de Gel'fand-Kirillov,</u> donnée par

$\operatorname{Dim} A = \operatorname{Dim} \omega(A)$ si A est de type fini,

$\operatorname{Dim} A = \sup \{\operatorname{Dim} B \ , \ B \subset A \ , \ B$ sous-algèbre de type fini$\}$ si A est quelconque.

<u>Exemple</u> 2.

1° Soit A <u>une algèbre commutative et intègre</u> dont le corps des fractions K a pour degré de transcendance d sur K . Alors on a $\operatorname{Dim} A = d$.

<u>Démonstration</u>. - Il résultera du théorème II.1 (c) que $\operatorname{Dim} A = \operatorname{Dim} K$. Soit

$x_1, x_2, \ldots, x_d$ une base de transcendance de K sur k. Il résultera du théorème II.1 (c) que $\mathrm{Dim}\, k(x_1, \ldots, x_d) \leqslant \mathrm{Dim}\, K$. Il résultera du théorème II.1 (e) que $\mathrm{Dim}\, k(x_1, \ldots, x_d) = \mathrm{Dim}\, k[x_1, \ldots, x_d]$ et du théorème II.1 (a) que $\mathrm{Dim}\, k[x_1, \ldots, x_d] = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{Dim}\, k[x_i]$. Il suffit de prouver que $\mathrm{Dim}\, k[X] = 1$ pour en conclure que $d \leqslant \mathrm{Dim}\, K$, mais ceci résulte du fait que $V = k + kX$ engendre $K[X]$ (cf. lemme 1 et prop. 1). Montrons que $\mathrm{Dim}\, K \leqslant d$. Pour cela il suffit de prouver que si $k \subset L \subset H$ sont des corps et si H est une extension algébrique finie de L alors $\mathrm{Dim}\, H = \mathrm{Dim}\, L$. Mais ceci résulte immédiatement du fait que H est un L-espace vectoriel de dimension finie.

2° Soit A une <u>algèbre de type fini</u>, mais non de dimension finie, on a alors $p_1 \leqslant \omega(A) \leqslant e_1$.

<u>Démonstration</u>.

(a) On va d'abord montrer que $\omega(A) \leqslant e_1$. Soit V un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A, et qui contient 1, alors

$$d_V(n) = \dim V^n \leqslant \dim(V \otimes \ldots \otimes V) = (\dim V)^n .$$

Donc $\omega(d_V) \leqslant e_1$.

(b) On considère la suite d'inclusions $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \ldots$. Ces inclusions sont strictes, sinon A serait un espace vectoriel de dimension finie. Puisque ces inclusions sont strictes, on a $d_V(n) \geqslant n$ d'où $\omega(A) \geqslant p_1$.

II. Propriétés élémentaires de la dimension de Gel'fand-Kirillov.

THEOREME 1. - <u>Soient deux algèbres</u> A <u>et</u> B <u>données, on a alors les résultats</u>

(a) $\mathrm{Dim}\,(A \otimes_k B) = \mathrm{Dim}\, A + \mathrm{Dim}\, B$,

(b) $\mathrm{Dim}\,(A \times B) = \max\,(\mathrm{Dim}\, A, \mathrm{Dim}\, B)$,

(c) $\mathrm{Dim}\, C \leqslant \mathrm{Dim}\, A$ <u>où</u> C <u>est soit une sous-algèbre de</u> A, <u>soit une algèbre quotient de</u> A,

(d) $\mathrm{Dim}\, A/(I_1 \cap \ldots \cap I_r) = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \mathrm{Dim}\,(A/I)$ <u>si les</u> I_i <u>sont des idéaux bilatères</u>.

(e) $\mathrm{Dim}\, S^{-1} A = \mathrm{Dim}\, A$ <u>pour toute partie</u> S, <u>multiplicative, incluse dans le centre de</u> A, <u>composée de non-diviseurs de</u> 0.

<u>Démonstration</u>. - On peut supposer A et B de type fini. Il suffira ensuite de prendre les bornes supérieures des expressions trouvées.

Soit, alors, U un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A, et qui contient 1. De même V un espace vectoriel de dimension finie, qui contient 1, et qui engendre. B.

Démontrons maintenant les divers points suivants.

(a) L'algèbre $A \otimes B$ est engendré par l'espace vectoriel de dimension finie $W = U \otimes 1 + 1 \otimes V$.

Or on a

$$U^n \otimes V^n \subset W^{2n} \subset U^{2n} \otimes V^{2n}$$

d'où

$$d_U(n) d_V(n) \leqslant d_W(n) \leqslant d_U(2n) d_V(2n) ,$$

et

$$\mathrm{Dim}\ d_W = \mathrm{Dim}\ d_U + \mathrm{Dim}\ d_V .$$

Donc, on obtient bien

$$\mathrm{Dim}\ A \otimes B = \mathrm{Dim}\ A + \mathrm{Dim}\ B .$$

(b) L'algèbre $A \times B$ est engendré par l'espace vectoriel $U \times V$. On peut supposer que la dimension de Gel'fand-Kirillov de A est supérieure à celle de B. Ce qui signifie qu'il existe un n_0 dans $\mathbb{N}$, tel que pour tout n supérieur à n_0, on a $d_U(n) \geqslant d_V(n)$. Or on a

$$U^n \times \{0\} \subset W^n \subset U^n \times V^n .$$

D'où

$$d_U(n) \leqslant d_W(n) \leqslant d_U(n) + d_V(n) ,$$

et donc

$$\text{si} \quad n \geqslant n_0 , \quad d_U(n) \leqslant d_W(n) \leqslant 2d_U(n) ,$$

et

$$\mathrm{Dim}\ A = \mathrm{Dim}\ (A \times B) .$$

On a, donc, bien le résultat voulu.

(c) On considère d'abord le cas où C est inclus dans A. L'espace vectoriel $C \cap U$ engendre C.
Si $W = C \cap U$, on a $d_W(n) \leqslant d_U(n)$. D'où

$$\mathrm{Dim}\ C \leqslant \mathrm{Dim}\ A .$$

Soit maintenant le cas où C est une algèbre quotient de A. $C = A/I$, où I est un idéal de A. L'espace $W = U/I$ engendre C.
D'où $d_W(n) \leqslant d_U(n)$, et

$$\mathrm{Dim}\ C \leqslant \mathrm{Dim}\ A .$$

(d) Il suffit de le démontrer pour r valant 2, on aura le résultat général par récurrence.

L'application $A/I_1 \cap I_2 \longrightarrow A/I_1 \times A/I_2$ est injective. Donc, d'après (c) on a

$$\mathrm{Dim}\ A/I_1 \cap I_2 \leqslant \mathrm{Dim}\ (A/I_1 \times A/I_2) .$$

D'autre part, l'application $A/I_1 \cap I_2 \longrightarrow A/I_1$ est surjective.
Donc

$$\mathrm{Dim}\ (A/I_1 \cap I_2) \geqslant \mathrm{Dim}\ A/I_1 \text{ , d'après (c),}$$

et de même

$$\mathrm{Dim}\ (A/I_1 \cap I_2) \geqslant \mathrm{Dim}\ A/I_2 \ .$$

Ce qui donne le résultat.

(c) Pour toute partie S de A, contenue dans le centre de A et sans diviseur de zéro dans A, on a $A \subset S^{-1} A$ d'où

$$\mathrm{Dim}\ A \leqslant \mathrm{Dim}\ S^{-1} A \ .$$

Démontrons maintenant l'inégalité inverse. Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie de $S^{-1} A$, qui engendre $S^{-1} A$. Comme W est un sous-espace de dimension finie, il existe s dans S tel que $sW \subset A$. Définissons, alors, V sous-espace vectoriel de A, $V = sW + ks + k$.
On a alors, $W^n \subset s^{-n} V^n$, donc $d_W(n) \leqslant d_V(n)$, et

$$\mathrm{Dim}\ S^{-1} A \leqslant \mathrm{Dim}\ A \ .$$

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> A <u>est une algèbre commutative, alors</u>

1° $\mathrm{Dim}\ A$ <u>est un entier ou est infinie</u>,

2° <u>si</u> A <u>est de type fini, alors</u> $\mathrm{Dim}\ A$ <u>coïncide avec la dimension de Krull de</u> A,

3° $\mathrm{Dim}\ (A/I) = \mathrm{Dim}\ A$, <u>si</u> I <u>est constitué d'éléments nilpotents</u>.

<u>Démonstration</u>. - Supposons que A soit de type fini. Alors A est un anneau noethérien et de plus, d'après le théorème II.1 (d), on peut supposer que A est une algèbre primaire.
Notons alors par I le nilradical de A, et par S le supplémentaire de I dans A. Comme A est primaire, S est composé de non-diviseurs de séro.
Soit B tel que $B = S^{-1} A$, B est un anneau local et artinien. On a donc la décomposition suivante : $B = K + \mathfrak{M}$, avec $\mathfrak{M}$ idéal maximal de B, d'où $\mathfrak{M} = S^{-1} I$, K isomorphe au corps résiduel de B. B est de dimension finie, en tant que K-algèbre, d'où $\mathrm{Dim}\ B = \mathrm{Dim}\ K$.
Or K est un corps commutatif, d'où, d'après l'exemple 2.1., $\mathrm{Dim}\ K$ est égal au degré de transcendance de K sur k, et à la dimension de Krull de A.
Or, d'après II.1 (e), $\mathrm{Dim}\ B = \mathrm{Dim}\ A$. On a donc le résultat.

Si A n'est pas de type fini, on peut passer à la borne supérieure sur l'ensemble des sous-k-algèbres de type fini et obtenir les 1° et 3°.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> I <u>un idéal de l'algèbre</u> A, <u>qui contient un non-diviseur de</u> 0, <u>soit à droite, soit à gauche. On a alors l'inégalité suivante</u>

$$\mathrm{Dim}\ (A/I) \leqslant (\mathrm{Dim}\ A) - 1 \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit φ l'homomorphisme canonique de A dans A/I, et x un élément de I, non diviseur de zéro à droite. V désigne un sous-espace vectoriel de A, de dimension finie contenant 1 et x. D_n est un supplémentaire de

$I \cap V^n$ dans V^n, pour tout n de $\underset{\sim}{N}$.
Alors φ induit un isomorphisme de D_n sur $\bar{D}_n$ (image de D_n par φ), et de plus $\bar{D}_n = \bar{V}^n$.

On va montrer que $D_n + D_n x + \dots + D_n x^m$ est une somme directe, pour tout m de $\underset{\sim}{N}$.
Soit

$$d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^m = 0 \text{ , avec } d_i \in D_n \text{ ,}$$

alors

$$\varphi(d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^m) = 0 \text{ ,}$$

et $\bar{d}_0 = 0$, d'où $d_0 \in D_n \cap I = \{0\}$, $d_0 = 0$.
Or x n'est pas diviseur de zéro, donc on obtient

$$d_1 + d_1 x + \dots + d_n x^{m-1} = 0$$

et par reïtération du procédé on a

$$\forall i \in \{0 , \dots , n\} \text{ , } d_i = 0 \text{ .}$$

D'où on a bien une somme directe.

Il en résulte, puisque

$$D_n + D_n x + \dots + D_n x^n \subset V^{2n} \text{ ,}$$

que

$$n \dim D^n \leqslant \dim V^{2n} \text{ ,}$$

d'où,

$$n \operatorname{Dim} \bar{V}^n \leqslant \dim V^{2n} \text{ ,}$$

et

$$n\, d_{\bar{V}}(n) \leqslant d_V(2n) \text{ ,}$$

et donc

$$\operatorname{Dim} d_{\bar{V}} + 1 \leqslant \operatorname{Dim} d_V \text{ .}$$

D'où en prenant la borne supérieure pour tous les sous-espaces vectoriels V, de dimension finie de A, on a le résultat.

COROLLAIRE 1. - Soit A une algèbre, anneau premier et noethérien à droite. Alors pour tout idéal I de A, non nul, on a $\operatorname{Dim}(A/I) \leqslant (\operatorname{Dim} A) - 1$.

Démonstration. - Soit S l'ensemble des non-diviseurs de zéro, bilatères. L'anneau fraction de A, $S^{-1} A$, est simple, d'après le théorème de Goldie, puisque A est un anneau premier et noethérien à droite.

D'où $I \cap S$ n'est pas réduit à zéro, sinon $S^{-1} I$ serait un idéal de $S^{-1} A$, il est différent de A puisqu'il ne contient pas 1. D'où I contient un non-diviseur de 0, et on applique la proposition.

COROLLAIRE 2. - Soit A une algèbre noethérienne à droite, de dimension de Gel'fand-Kirillov finie. Alors si I, J sont des idéaux de A, I idéal premier, tels que J contienne I, alors si $\mathrm{Dim}(A/I) = \mathrm{Dim}(A/J)$ on a $I = J$.

Démonstration. - Puisque I est un idéal premier, l'anneau $A/I = B$ est premier, noethérien à droite.
Soit J', l'idéal de B induit par J. D'après le corollaire 1 on a

$$\mathrm{Dim}\,(B/J') \leqslant (\mathrm{Dim}\,B) - 1\,, \text{ si } J' \neq 0\,,$$

d'où $\mathrm{Dim}\,(A/J) \leqslant (\mathrm{Dim}\,(A/I)) - 1$.
Or $\mathrm{Dim}\,A$ est finie, donc $\mathrm{Dim}\,(A/I)$ est finie, on a donc une contradiction, d'où $J' = 0$, et $J = I$.

COROLLAIRE 3. - Soit $I_0, I_1, \dots, I_r$ une suite d'idéaux premiers de l'algèbre noethérienne à droite A, tels que $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_r$, alors $\mathrm{Dim}\,A \geqslant r$.

Cela provient directement du corollaire précédent.

III. Dimension de Gel'fand-Kirillov des algèbres filtrées et des algèbres graduées.

Soit B une k-algèbre munie d'une $\underset{\sim}{Z}$-graduation $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in \underset{\sim}{Z}}$, où les k-espaces vectoriels B_i sont de dimension finie.
On a $B = \bigoplus_{i\in Z} B_i$ avec $B_i\,B_j \subset B_{i+j}$. On notera $B(n) = \bigoplus_{i=-n}^{n} B_i$, et $d_{\mathcal{B}}(n) = \dim B(n)$ si $n \in \underset{\sim}{N}$.
En gardant ces notations, nous avons le lemme suivant.

LEMME 3.

(a) $\mathrm{Dim}\,B \leqslant \mathrm{Dim}\,d_{\mathcal{B}}$

(b) si B est de type fini, alors $\omega(B) = \omega(d_{\mathcal{B}})$, et donc $\mathrm{Dim}\,B = \mathrm{Dim}\,d_{\mathcal{B}}$.

Démonstration.

(a) Soit V un sous-espace vectoriel de B, de dimension finie, alors il existe $m \in \underset{\sim}{N}$ tel que $V \subset B(m)$, et

$$(V + k)^n \subset B(m)^n \subset B(mn)\,,$$

d'où

$$d_V(n) \leqslant d_{\mathcal{B}}(mn)\,,$$

$$\omega(d_V) \leqslant \omega(d_{\mathcal{B}})\,.$$

(b) Si B est de type fini, il existe $m \in \underset{\sim}{N}$, tel que $B(m)$ engendre B.
Posons $V = B(m)$. Nous allons démontrer que pour tout n de $\underset{\sim}{N}$, on a

$$B(m)^n \supset B(n)\,.$$

Si on a ce résultat, alors $\omega(d_V) \geqslant \omega(d_{\mathcal{B}})$.
Or, d'après (a), on a $\omega(d_{\mathcal{B}}) \geqslant \omega(d_V)$, d'où

$$\omega(d_V) = \omega(B) = \omega(d_{\mathcal{B}}) .$$

Il reste donc à démontrer (1).

Pour cela, il suffit de montrer que $B_n \subset V^n$. Alors par symétrie, on a $B_{-n} \subset V^n$, et donc

$$B(N) = \bigoplus_{n=-N}^{N} B_n \subset \bigoplus_{n=0}^{N} V^n \subset V^N .$$

Comme V engendre B, et que B_n est de dimension finie, il existe un entier $r \in \underset{\sim}{N}$ tel que $B_n \subset V^r$. Tout b de B_n est donc somme de monômes de la forme

$$v = v_1 v_2 \dots v_s \begin{cases} v_i \text{ dans } V \text{ homogène ,} \\ s \leqslant r , \\ \text{le degré de } v \text{ vaut } n . \end{cases}$$

On peut supposer que $v_i v_{i+1}$ n'appartient pas à V, d'où si on note $d^\circ v$ le degré de v

$$d^\circ v = \sum(d^\circ v_i) = n > 0 ,$$

d'où il existe un entier i entre 1 et s, tel que le degré de v_i soit strictement positif. Ceci entraine que le degré de v_i est positif pour tout j entre 1 et s. En effet, soit $d^\circ v_j \leqslant 0$, et $d^\circ v_{j+1} > 0$, on a alors

$$|d^\circ (v_j v_{j+1})| \leqslant \max (|d^\circ v_j| |d^\circ v_{j+1}|) \leqslant m ,$$

car v_j et v_{j+1} sont dans $B(m)$. Ce qui implique que $v_j v_{j+1}$ est dans $B(m)$, or on avait supposer le contraire. D'où, pour tout j entre 1 et s $d^\circ v_j > 0$, et donc

$$n = d^\circ v = d^\circ v_1 + \dots + d^\circ v_s \geqslant s ,$$

et $V^s \subset V^n$; d'où $v \in V^n$, $b \in V^n$, on a donc bien le résultat

$$B_n \subset V^n .$$

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> B <u>une algèbre commutative de type fini graduée par des espaces de dimension finie. Soit</u> C <u>une sous-algèbre homogène, intègre, munie de la graduation induite</u> $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} = (C \cap B_i)_{i \in \underset{\sim}{Z}}$. <u>Alors</u> $\operatorname{Dim} C = \operatorname{Dim} d_{\mathcal{C}}$.

<u>Démonstration</u>. - Comme C n'a pas de diviseurs de zéro, elle ne peut pas rencontrer tous les idéaux premiers minimaux de B. Sinon, pour tout i entre 1 et m, $C \cap P_i$ contient un élément a_i non nul, d'où

$$a_1 \dots a_m \subset C \cap (\cap P_i) = C \cap \operatorname{Rad} B = \{0\} .$$

Or C étant intègre, le produit des a_i est non nul, ce qui est impossible. D'où il existe i tel que C ne rencontre pas P_i.

Comme les P_i sont homogènes (cf. [3], § 3, proposition 1), on peut remplacer B par B/P_i et donc, dans la suite supposer B intègre. L'algèbre graduée B se met alors sous l'une des formes suivantes :

(a) $B = B_0[X , X^{-1}]$,

(b) $B_i = 0$, pour tout i positif,

(c) $B_i = 0$, pour tout i négatif.

Supposons qu'on n'est ni dans le cas (b), ni dans le cas (c) et démontrons alors que $B = B_0[X , X^{-1}]$.

Soit i , le plus petit entier positif tel que B_i soit non nul, et j tel que B_{-j} soit non nul.

1° Montrons que $i = j$.

Considérons la division euclidienne de j par i

$$j = (\alpha - 1)i + (i - j') = \alpha i - j' \text{ , avec } \alpha \in \underset{\sim}{N} , \quad j' \in \underset{\sim}{N} , \quad j' < i .$$

On a alors,

$$B_{-j} B_{\alpha i} \subset B_{-j+\alpha i} = B_{j'} .$$

Or $B_{\alpha i}$ est non nul. En effet, si $B_{\alpha i}$ était nul, on aurait $B_i B_{(\alpha-1)i} \subset B_{\alpha i}$, d'où $B_{(\alpha-1)i} = \{0\}$, car B_i est non nul, et B est intègre. On obtient ainsi par récurrence $B_i B_i = \{0\}$, ce qui est faux, d'où $B_{\alpha i}$ est non nul, donc $B_{-j} B_{\alpha i}$ n'est pas nul, $B_{+j'}$ n'est pas nul. Ce qui signifie, puisque j' est inférieur à i , que j' est nul. $j = \alpha i$, $\alpha \in \underset{\sim}{N}^*$, on trouve de même $i = \beta j$, $\beta \in \underset{\sim}{N}^*$, d'où $i = j$.

<u>Remarque</u>. - B_k est non nul si, et seulement si, k est multiple de i ou de $-i$.

2° Montrons maintenant qu'il existe un X dans B_i tel que

$$B = \oplus_{\alpha \in \underset{\sim}{Z}} B_0 X^\alpha .$$

Soit a dans B_i , et a' dans B_{-i} non nuls, et notons $b = aa'$. b appartient à B_0 , et b est inversible. En effet, la dimension N de B_0 est finie, donc il existe $(\lambda_0 , \lambda_1 , \ldots , \lambda_N)$ dans k , non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{N} \lambda_i b^i = 0$, et donc, $\lambda_0 = -\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1} b^i$. On peut supposer λ_0 non nul, sinon on recommence au rang $N - 1$ puisque B est intègre et que b est non nul.
On pose $b' = -(1/\lambda_0)\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1} b^i$.
On a $bb' = 1$, donc b est inversible dans B_0 , d'où $a(a'b') = 1$. a est donc inversible, et son inverse $a'b'$ est dans B_{-1} .
Posons alors $X = a$, et montrons le résultat.
Soit a_k , dans B_k , tel que :

si $k \neq \alpha_i$, $\forall \alpha \in \underset{\sim}{Z}$, alors $B_k = \{0\}$,

si $k = \alpha_i$, $a_k X^{-\alpha} \in B_0$, d'où $a_k \in B_0 X^\alpha$, et $B_k = B_0 X^\alpha$.

On a donc

$$B = \oplus_{k \in \underset{\sim}{Z}} B_k = \oplus_{a \in \underset{\sim}{Z}} B_0 X^\alpha = B_0[X , X^{-1}] .$$

Revenons maintenant au problème initial.

(a) $B = B_0[X, X^{-1}]$, alors $B_i = B_0 X^i$, et la dimension de B_i est constante, d'où le théorème (b) et (c) : les deux démonstrations sont similaires, je suppose donc que B_i est nul pour i négatif. Les algèbres B et C sont commutatives, donc $d = \text{Dim } B - \text{Dim } C \in \underset{\sim}{Z}$, et, d'après le lemme (3)

$$\text{Dim } C \leqslant \text{Dim } d_{\mathcal{C}} \leqslant \text{Dim } d_{\mathcal{B}} = \text{Dim } B ,$$

d'où d est positif ou nul.

On va faire une démonstration par récurrence sur d.

$d = 0$, la proposition est vraie.

$d > 0$. Alors, il existe un p dans $\underset{\sim}{N}$, tel que B_p possède un élément x transcendant sur C. Soit $C' = C[x]$. C' est gradué par $\mathcal{C}'$, graduation induite par B, i. e. $\mathcal{C}' = (C \cap B_i)_{i \in \underset{\sim}{Z}}$.

Si on montre $\text{Dim } d_{\mathcal{C}'} = (\text{Dim } d_{\mathcal{C}}) + 1$, on aura le résultat voulu par récurrence, car alors $\text{Dim } C = (\text{Dim } C') - 1 = (\text{Dim } d_{\mathcal{C}'}) - 1 = \text{Dim } d_{\mathcal{C}}$. Montrons donc ce résultat.

$$d_{\mathcal{C}'}(n) = \dim C'(n) = \dim \left(\bigoplus_{i=-n}^{n} C'_i\right) .$$

Or

$$C'_i = C' \cap B_i = \bigoplus_{r+ps=i;\, r,s \in \underset{\sim}{N}} C_r\, x^s ,$$

d'où

$$\bigoplus_{0 \leqslant s < n} C(n) x^s \subseteq C'(pn) \subseteq \bigoplus_{0 \leqslant s \leqslant pn} C(pn) x^s ,$$

et

$$n\, d_{\mathcal{C}}(n) \leqslant d_{\mathcal{C}'}(pn) \leqslant (pn + 1) d_{\mathcal{C}}(pn) .$$

Donc $\text{Dim } d_{\mathcal{C}'} = 1 + \text{Dim } d_{\mathcal{C}}$. On a bien le résultat.

Soit maintenant A, une algèbre munie d'une filtration croissante $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = (A_i)_{i \in \underset{\sim}{Z}}$. On désigne par $\text{gr } A$, l'algèbre graduée associée et par $\text{gr } \mathfrak{a}$ sa graduation, $\text{gr } \mathfrak{a} = (A_i / A_{i-1})_{i \in \underset{\sim}{Z}}$. Avec ces notations on a :

PROPOSITION 5. - $\text{Dim gr } A \leqslant \text{Dim } A$ <u>et</u> $\omega(\text{gr } A) \leqslant \omega(A)$, <u>si</u> A <u>est de type fini</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit V un sous-espace vectoriel de A. Soit

$$\text{gr } V = \bigoplus_{i \in \underset{\sim}{Z}} \text{gr}_i (V \cap A_i)$$

où gr_i est l'homomorphisme canonique de A_i dans A_{i-1}. $\text{gr } V$ engendre A si V engendre A, or $(\text{gr } V)^n \subseteq \text{gr } (V^n)$, d'où

$$\omega(\text{gr } A) \leqslant \omega(A) , \text{ si } A \text{ est de type fini} ,$$

et

$$\text{Dim gr } A \leqslant \text{Dim } A , \text{ dans le cas général} .$$

LEMME 4. <u>Soit</u> $\mathfrak{a} = (A_i)_{i \in \underset{\sim}{Z}}$, <u>une filtration telle que</u>

$$\begin{cases} A_i \text{ soit un espace vectoriel de dimension finie,} \\ \bigcup A_i = A \ , \\ \bigcap A_i = \{0\} \ . \end{cases}$$

<u>Alors les</u> A_i <u>sont presque tous nuls pour</u> i <u>négatif, et si on pose</u> $d_{\mathfrak{A}}(n) = \dim A_n$, <u>on a, pour</u> n <u>assez grand</u>, $d_{\mathfrak{A}}(n) = d_{gr\,\mathfrak{A}}(n)$.

<u>Démonstration</u>. - Par défintion, on a $gr\,\mathfrak{A} = (A_i/A_{i-1})_{i\in \mathbb{Z}}$, d'où

$$d_{gr\,\mathfrak{A}}(n) = \dim\left(\bigoplus_{i=-n}^{n} (A_i/A_{i-1})\right)$$
$$= \sum_{i=-n}^{n} (\dim A_i - \dim A_{i-1}) = \dim A_n - \dim A_{-n-1} \ .$$

Or les A_i sont presque tous nuls, car les A_i sont de dimension finie et décroissants.

Donc il existe un entier p , tel que pour tout n supérieur à p , on ait $A_{-n} = \{0\}$, et donc

$$d_{gr\,\mathfrak{A}}(n) = \dim A_n = d_{\mathfrak{A}}(n) \ .$$

<u>Exemple</u> 3. - Soit A une <u>algèbre de type fini</u>, et V un sous-espace vectoriel de dimension finie qui engendre A . On considère alors la filtration $\mathfrak{A}$ de A telle que

$$\mathfrak{A} = (A_i)_{i\in \mathbb{Z}} \quad \text{avec} \begin{cases} A_i = V^i \ , \text{ si } i > 0 \ , \\ A_i = \{0\} \ , \text{ si } i < 0 \ . \end{cases}$$

$\mathfrak{A}$ est appelée V-filtration. Alors

$$\mathrm{Dim}\ A = \mathrm{Dim}\ (gr\ A) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Si V engendre A , alors $(gr\ V)$ engendre $(gr\ A)$, d'où

$$\omega(gr\ A) = \omega(d_{grV}) \ ,$$

et

$$\omega(A) = \omega(d_V) \ .$$

Il faut donc montrer $\omega(d_{grV}) = \omega(d_V)$. Or

$$d_{\mathfrak{A}}(n) = \dim A_n = \dim V^n = d_V(n) \ , \text{ si } n \geqslant 0 \ ,$$
$$= 0 \ , \text{ si } n < 0 \ ,$$

et

$$d_{gr\mathfrak{A}}(n) = \dim((gr\ V)^n) \ , \text{ si } n > 0 \ ,$$
$$= 0 \ , \text{ si } n < 0 \ .$$

Le problème revient donc à montrer

$$\omega(d_{\mathfrak{A}}) = \omega(d_{gr\mathfrak{A}}) \ .$$

Or, on est ici dans les hypothèses de lemme, d'où le résultat.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie de dimension finie, et</u> I <u>un idéal de</u>

<u>l'algèbre enveloppante</u> $U(\mathfrak{g})$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$, <u>alors</u> :

$$\mathrm{Dim}\,(U(\mathfrak{g})/I) = \mathrm{Dim}\,(S(\mathfrak{g})/\mathrm{gr}\, I) ,$$

<u>où</u> $S(\mathfrak{g})$ <u>est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel</u> $\mathfrak{g}$, <u>et ces dimensions sont entières</u>.

<u>Démonstration</u>. - Posons $A = U(\mathfrak{g})/I$.
Soit $\overline{\mathfrak{g}}$ l'image de $\mathfrak{g}$ dans A . On considère $U(\mathfrak{g})$ muni de la $\mathfrak{g}$-filtration, et A muni de la $\overline{\mathfrak{g}}$-filtration. Alors

$$\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) ,$$

et $\mathrm{Dim}\, A = \mathrm{Dim}\, \mathrm{gr}\, A$ d'après l'exemple 3. Donc

$$\mathrm{Dim}\,(U(\mathfrak{g})/I) = \mathrm{Dim}\,(S(\mathfrak{g})/\mathrm{gr}\, I) ,$$

et ces dimensions sont entières, car $\mathrm{gr}\, A$ est commutative.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie de dimension finie, alors</u>

$$\mathrm{Dim}\, U(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} .$$

<u>Démonstration</u>. - On applique le corollaire 1 avec $I = \{0\}$. Et

$$\mathrm{Dim}\, S(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} .$$

PROPOSITION 6. - <u>Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 4, et si</u> $\mathrm{gr}\, A$ <u>est de type fini, alors</u>

$$\omega(\mathrm{gr}\, A) = \omega(A) = \omega(d_{\mathfrak{a}}) ,$$

$$\mathrm{Dim}\, \mathrm{gr}\, A = \mathrm{Dim}\, A = \mathrm{Dim}\, d_{\mathfrak{a}} .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit V un espace vectoriel de dimension finie, inclus dans A . Alors, il existe un entier p tel que $V \subset A_p$ et $A_i = 0$ pour $i < -p$.
On a alors $V^n \subset A_{pn}$, d'où

$$d_V(n) \leqslant d_{\mathfrak{a}}(pn)$$

et

$$\omega(A) \leqslant \omega(d_{\mathfrak{a}}) .$$

Or, on a vu dans la proposition 5 que $\omega(\mathrm{gr}\, A) \leqslant \omega(A)$, d'où,

$$\omega(\mathrm{gr}\, A) \leqslant \omega(A) \leqslant \omega(d_{\mathfrak{a}}) ,$$

et, d'après le lemme 3,

$$\omega(\mathrm{gr}\, A) = \omega(d_{\mathrm{gr}\mathfrak{a}})$$

car $\mathrm{gr}\, A$ est de type fini et, d'après le lemme 4,

$$\omega(d_{\mathrm{gr}\mathfrak{a}}) = \omega(d_{\mathfrak{a}}) .$$

D'où on a

$$\omega(\mathrm{gr}\, A) = \omega(A) = \omega(d_{\mathfrak{a}})$$

et

$$\text{Dim gr } A = \text{Dim } A = \text{Dim } d_{\mathfrak{a}} \;.$$

PROPOSITION 7. - Soit une algèbre A vérifiant toujours les hypothèses du lemme 4, et, de plus, telle que $\text{gr } A$ soit de type fini et commutative. Si A' est une sous-algèbre de A, telle que $\text{gr } A'$ soit intègre, on désigne par $\mathfrak{a}' = (A' \cap A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la filtration induite sur A', et on a alors

$$\text{Dim gr } A' = \text{Dim } A' = \text{Dim } d_{\mathfrak{a}'} \;.$$

Démonstration. - Pour les mêmes raisons que dans la proposition 6, on a

$$\text{Dim gr } A' \leqslant \text{Dim } A' \leqslant \text{Dim } d_{\mathfrak{a}'} \;.$$

Mais ici, d'après le lemme 4,

$$d_{\mathfrak{a}'} = d_{\text{gr}\mathfrak{a}'} \;,$$

et, d'après la proposition 4,

$$\text{Dim } d_{\text{gr}\mathfrak{a}'} = \text{Dim gr } A' \;.$$

D'où on a le résultat.

IV Dimension de Gel'fand-Kirillov d'anneaux de fractions.

PROPOSITION 8. - Soient A une algèbre, et S une partie multiplicative, commutative, de non-diviseurs de zéro de A. On suppose de plus que S est engendré par des éléments x tel que ∂_x $(a \longmapsto ax - xa)$ soit une dérivation localement nilpotente, alors :

(a) S est un domaine de Ore à droite et à gauche,

(b) $\text{Dim } S^{-1} A = \text{Dim } A$.

Démonstration.

(a) Ce résultat provient directement des deux théorèmes suivants [2].

THÉORÈME 1. - Les parties multiplicatives engendrées par une réunion de parties de Ore est une partie de Ore.

THÉORÈME 2. - Si ∂_x est localement nilpotente, alors $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ est une partie de Ore.

(b) Il suffit de montrer $\text{Dim } S^{-1} A \leqslant \text{Dim } A$, l'inégalité inverse étant évidente. Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie de $S^{-1} A$, contenant 1. Alors, il existe un s dans S tel que $sW \subset A$, et s est dans S, donc de la forme

$$s = x_1 \dots x_r \;, \text{ avec } \begin{cases} x_i \in S \;, \\ \partial_{x_i} \text{ localement nilpotente.} \end{cases}$$

Soit T la partie multiplicative engendrée par $\{x_2 , \ldots , x_r\}$. T est pour les mêmes raisons que S, un domaine de Ore. Et on pose

$$B = T^{-1} A \quad \text{et} \quad x = x_1 .$$

Comme S est commutatif, x définit une dérivation localement nilpotente sur B, car

$$\partial_x^i(t^{-1} a) = t^{-1} \partial_x^i(a) .$$

Et alors, si on montre que $\operatorname{Dim} P^{-1} B = \operatorname{Dim} B$ avec $P = \{1 , x , x^2 , \ldots\}$ on aura le résultat par récurrence sur r.

Supposons donc maintenant

$$\begin{cases} r = 1 , \\ x = x_1 = s , \end{cases}$$

et posons $V = xW \subset A$.

On obtient par récurrence, pour tout n dans $\underset{\sim}{N}$ et tout v dans V,

$$x^{-1} v = \textstyle\sum_{i=0}^{m} (\partial_x^i v)x^{-i-1} + x^{-1}(\partial_x^{m+1} v)x^{-m-1} , \tag{2}$$

et comme ∂_x est nilpotent, il existe un entier m tel que $\partial_x^{m+1} v = 0$

$$x^{-1} v = \textstyle\sum_{i=0}^{m} (\partial_x^i v)x^{-i-1} .$$

D'où

$$x^{-1} V \subset Vx^{-1} + Vx^{-2} + \ldots + Vx^{-m} ,$$

et de même

$$x^{-s} V \subset Vx^{-s} + \ldots + Vx^{-s-m+s} .$$

On obtient ce résultat par récurrence sur s dans la formule 2, et donc

$$x^{-s_1} Vx^{-s_2} V\ldots x^{-s_r} V \subset V^r x^{-s} + V^r x^{-s-1} + \ldots + V^r x^{-s-rm+r}$$

si $s = s_1 + \ldots + s_r$. On a donc

$$W^n = (x^{-1} V)^n \subset V^n x^{-n} + \ldots + V^n x^{-nm}$$

et

$$\begin{aligned} W^n &\subset (V^n x^{nm-n} + \ldots + V^n)x^{-nm} \\ &\subset V^{nm} x^{-nm} . \end{aligned}$$

D'où on a bien $d_W(n) \leqslant d_V(nm)$, donc $\omega(d_W) \leqslant \omega(d_V)$, d'où

$$\operatorname{Dim} S^{-1} A \leqslant \operatorname{Dim} A .$$

<u>Définition</u> 7.- Le degré de transcendance, $T \deg A$, d'une algèbre A, est défini par

$$T \deg A = \sup_V(\inf_b \operatorname{Dim} k[bV]) ,$$

avec b parcourant l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A, et V l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de A .

PROPOSITION 9. - Soit $\mathfrak{g}$, une algèbre de Lie, de dimension finie, et A une sous-algèbre d'une algèbre quotient de $U(\mathfrak{g})$, la $\mathfrak{g}$-filtration naturelle de $U(\mathfrak{g})$ induit une filtration sur A . Alors, si $\operatorname{gr} A$ n'a pas de diviseurs de zéros

(a) A possède un corps de fractions $Q(A)$ à gauche et à droite,

(b) $T \deg Q(A) = T \deg A = \operatorname{Dim} A$,

(c) $T \deg S^{-1} A = T \deg A$ pour tout domaine de Ore S de A .

Démonstration. - Si $\operatorname{gr} A$ n'a pas de diviseurs de zéro, alors A n'en a pas non plus.

(a) L'existence de $Q(A)$ sera démontré dans la proposition 10 car

$$\operatorname{Dim} A \leqslant \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} < \infty .$$

(b) et (c) On va d'abord montrer que si $Q(A)$ est le corps des fractions de A : on a

$$T \deg Q(A) \leqslant T \deg A .$$

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $Q(A)$. Alors, il existe un x de A , tel que $W = xV \subset A$. Alors

$$\inf_{b \in A-\{0\}} \operatorname{Dim} k[bV] = \inf_{b \in A-\{0\}} \operatorname{Dim} k[(b/x)W] \leqslant \inf_{c \in A-\{0\}} \operatorname{Dim} k[cW] ,$$

d'où

$$T \deg Q(A) \leqslant T \deg A .$$

De plus on a l'inégalité suivante

$$T \deg A \leqslant \operatorname{Dim} A .$$

Or $Q(A)$ est aussi le corps des fractions de $S^{-1} A$, on a donc

$$T \deg Q(A) \leqslant T \deg S^{-1} A \leqslant \operatorname{Dim} A .$$

Pour montrer (b) et (c), il reste donc à montrer

$$T \deg Q(A) \geqslant \operatorname{Dim} A .$$

Or l'algèbre intègre $\operatorname{gr} A$ est commutative en tant qu'image par un homomorphisme d'une sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$, l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, et $Q(A)$ possède une filtration $(Q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, définie par, [4], si $\xi \in Q(A)$, $\xi = a^{-1} b$ avec $a \in A$, $b \in A$.

Le degré de ξ est $d^{o} \xi = d^{o} b - d^{o} a$.

Q_i est égal au sous-espace engendré par les ξ dans $Q(A)$, qui sont de degré inférieur ou égal à i .

Cette filtration vérifie $\begin{cases} Q_i \cap A = A_i , \\ \operatorname{gr}(Q(A)) \subseteq Q(\operatorname{gr} A) . \end{cases}$

Soit, alors, V un sous-espace vectoriel de dimension finie, de $Q(A)$, et b un élément de $Q(A)$, de degré exactement i.

On a alors

$$\bar{b}\ gr\ (V) \subset gr\ (bV)\ ,\ \text{si}\ \ \bar{b} = gr_i(b) \in gr\ (Q(A)) = Q\ (gr\ A)\ .$$

D'où

$$gr\ ((bV)^n) \supset (gr\ (bV))^n \supset (\bar{b}\ gr\ V)^n = \bar{b}^n\ (gr\ V)^n\ ,$$

et donc

$$\begin{aligned} d_{bV}(n) &= \dim\ (k + bV)^n \\ &\geqslant \dim\ (bV)^n \\ &\geqslant \dim\ (gr\ (bV)^n) \\ &\geqslant \dim\ (\bar{b}^n\ (gr\ V)^n) = \dim\ (gr\ V)^n\ , \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie car $\bar{b}$ n'est pas diviseur de zéro.

Soit donc W un sous-espace vectoriel de dimension finie de $gr\ A$. Il existe un sous-espace vectoriel V de A, tel que $gr\ V = W$ et $\inf_b(\mathrm{Dim}\ k[bV] \geqslant \mathrm{Dim}\ k[W]$, ceci d'après les inégalités précédentes.

D'où

$$T\ \deg\ Q(A) \geqslant \mathrm{Dim}\ gr\ A\ .$$

Or, d'après la proposition 7,

$$\mathrm{Dim}\ gr\ A = \mathrm{Dim}\ A\ .$$

D'où le résultat.

PROPOSITION 10. - Soit A une algèbre intègre, telle que $\omega(A) < e_1$. Alors A possède un corps des fractions à droite et à gauche.

Démonstration. - Si la condition de Ore n'était pas vérifiée, il existerait x et y, non nuls, dans A, tels que, $Ax \cap Ay = \{0\}$. Alors $k[x\ ,\ y]$ serait une algèbre libre, incluse dans A.

En effet, soit φ l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} k[X\ ,\ Y] &\longrightarrow k[x\ ,\ y] \\ p &\longrightarrow p(x\ ,\ y) \end{aligned}$$

où $k[X\ ,\ Y]$ est l'algèbre libre en deux variables.

φ est de façon évidente surjective.

φ est injective. Cherchons le noyau, $\mathrm{Ker}\ \varphi$, de φ.

Soit p dans $k[X\ ,\ Y]$, tel que $p(x\ ,\ y) = 0$. p s'écrit

$$p = \sum_{i=1}^{n_0} a_i\ M_i\ ,$$

avec a_i appartenant à k, et M_i un monôme de degré quelconque.

$$p(x\ ,\ y) = \sum a_i\ M_i(x\ ,\ y) = 0\ .$$

On divise $\sum a_i M_i(x , y)$, à droite par x ou y , jusqu'à ce que l'on obtienne des monômes "se terminant" par x , et d'autres "se terminant" par y (on multiplie à gauche par x^α , avec α dans $\underset{\sim}{N}$, pour éliminer les termes constants). On obtient ainsi

$$[\sum_{i=0}^{n_1} a_i N_i(x , y)]x + [\sum_{i=0}^{n_2} a_i' N_i'(x , y)]y = 0 .$$

Or $Ax \cap Ay = \{0\}$, d'où

$$\sum_{i=0}^{n_1} a_i N_i(x , y) = 0 , \quad n_1 < n$$

$$\sum_{i=0}^{n_2} a_i' N_i'(x , y) = 0 , \quad n_2 < n .$$

Et en réïtérant ce procédé, on obtient $\sum_{i=0}^{0} a_i M_i(x , y) = 0$, $aM(x , y) = 0$, d'où $a = 0$, et donc $p(x , y) = 0 \Longrightarrow p = 0$.

Donc $k[x , y]$ est une algèbre libre.

Or $\omega(k[x , y]) = e_1$, et $k[x , y] \subseteq A$, donc $\omega(B) \geq e_1$, et on a le résultat.

PROPOSITION 11. - <u>Soient</u> A , <u>une algèbre intègre de dimension de Gel'fand-Kirillov finie, et</u> B <u>une sous-algèbre de</u> A <u>de même dimension de Gel'fand-Kirillov, alors</u> :

(a) <u>Si</u> $\dot{B} = B - \{0\}$, $\dot{B}$ <u>est un domaine de Ore à droite et à gauche,</u>

(b) <u>Si</u> A <u>est de type fini, l'anneau des fractions,</u> $\dot{B}^{-1} A$, <u>de</u> A <u>est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel à droite et à gauche sur le corps</u> K <u>des fractions de</u> B ,

(c) <u>Sous les mêmes hypothèses que dans (b),</u> $\dot{B}^{-1} A$ <u>est égal au corps des fractions de</u> A .

<u>Démonstration</u>.

(a) On suppose que la condition de Ore n'est pas vérifiée. Alors il existe x dans $\dot{B}$, et y dans A tel que $By \cap Ax = \{0\}$. Alors $By + Ax$ est une somme directe, et comme la multiplication à droite par x est injective, $Byx + Ax^2$ est aussi une somme directe.
Or $Byx + Ax^2 \subset Ax$, donc $(Byx + Ax^2) \cap By = \{0\}$, d'où $By + Byx + Ax^2$ est aussi une somme directe, et par récurrence, $By + Byx + Byx^2 + \ldots$, est aussi une somme directe.

Soit alors W un sous-espace vectoriel de dimension finie de B , contenant 1 , et V un sous-espace de A , tel que $V = W + kx + ky$.
On a alors

$$V^{2n} \supseteq W^n(kx + ky)^n ,$$

et donc

$$V^{2n} \supseteq W^n yx + W^n yx^2 + \ldots + W^n yx^{n-1} .$$

D'où

$$d_V(2n) \geqslant n d_W(n) ,$$

car la somme dans le 2nd membre est directe, et $\operatorname{Dim} A \geqslant 1 + \operatorname{Dim} B$. Ce qui est faux ici, d'où la condition de Ore est remplie.

(b) Soit maintenant A de type fini, et V un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A . Le corps K des fractions de B , existe, d'après (a), et $K = \dot{B}^{-1} A$.

Soit $r(n) = \dim_K KV^n$, où KV^n est le K-espace vectoriel engendré par V^n , ces K-sous-espaces vectoriels de $\dot{B}^{-1} A$ ($= KA$) , recouvrent KA , car les V^n recouvrent A . On a donc deux possibilités.

1° Il existe un entier n , tel que $A = KV^n$, le résultat est alors démontré.

2° La suite $(r(n))$ est strictement croissante. Soit dans ce cas $(e_1 , \ldots e_{r(n)})$ une base de KV^n , tel que e_i soit dans V^n pour tout i , et W un sous-espace vectoriel de dimension finie de B . On a alors :

$$(W + V)^{2n} \supseteq W^n V^n \supseteq W^n e_1 + \ldots + W^n e_{r(n)} .$$

Comme les (e_i) forment un système libre sur k

$$\dim (V + W)^{2n} \geqslant r(n) \dim W^n \geqslant n \dim W^n ,$$

d'où $\operatorname{Dim} A \geqslant 1 + \operatorname{Dim} B$ ce qui est faux : on est toujours dans le cas (a), d'où le résultat.

(c) Montrons que KA est un corps, ce sera alors le corps des fractions $Q(A)$ de A , puisque KA est inclus dans $Q(A)$. Soit x un élément de KA .

La multiplication à gauche, ou à droite, par x est une application K-linéaire, injective car A est intègre, de KA . Comme KA est de dimension finie sur K , cette application est bijective. D'où 1 a un antécédent. Il existe y dans KA tel que $1 = xy$, et il existe y' dans KA tel que $1 = y'x$. Donc x est inversible à droite et à gauche, donc inversible et KA est un corps.

Donc $\dot{B}^{-1} A$ est le corps des fractions de A .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOHRO (W.) und KRAFT (H.). - Über die Gel'fand-Kirillov-Dimension, Math. Annalen t. 220, 1976, p. 1-24.

[2] BOHRO (W.) und RENTSCHLER (R.). - Oresche Teilmengen in Einhüllenden Algebren, Math. Annalen, t. 217, 1975, p. 201-210.

[3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chap. 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).

[4] JOSEPH (A.). - Sur les algèbres de Weyl, cours à l'Université Paris-VI, 1974.

Catherine HEIMENDINGER
20 rue Pasteur
92120 MONTROUGE.

(Texte reçu le 18 avril 1977)