GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

THIERRY LEVASSEUR

Action du groupe additif

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 7, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A7_0>

ACTION DU GROUPE ADDITIF, D'APRÈS M. MIYANISHI

par Thierry LEVASSEUR .

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et intègres.

L'objet de cet exposé est de décrire la démonstration donnée par MIYANISHI (cf. [5]) du théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, A une k-algèbre intègre de type fini et de dimension 2. Posons $X = \operatorname{Spec} A$. Alors X est isomorphe au plan affine sur k si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) A est factoriel,

(ii) L'ensemble A^* des éléments inversibles de A coïncide avec $k^* = k - \{0\}$,

(iii) Il existe une action non triviale du groupe additif G_a sur X (définie sur k).

1. Définition des dérivations et G_a-action

Définition 1.1. - Soit A un anneau (ou une k-algèbre sur un corps k), une dérivation localement finie d'ordre supérieur sur A (en abrégé l. f. h. d.) est une suite d'endomorphismes $D = \{D_0 , D_1 , \ldots\}$ du groupe abélien A satisfaisant à :

1° D_0 = identité, $D_i(ab) = \sum_{j+k=i} D_j(a)\, D_k(b)$, pour tout a et b dans A ,

2° Pour tout a dans A , il existe un entier $n > 0$ tel que $D_m(a) = 0$, pour tout $m \geqslant n$.

Lorsque A est une k-algèbre, et D_n est k-linéaire pour tout $n \geqslant 0$, D est dite k-triviale.

La dérivation l. f. h. d. D est dite itérative (en abrégé l. f. i. h. d.), si elle satisfait la condition suivante :

3° $D_i\, D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$ pour tout i et j positifs ou nuls.

PROPOSITION 1.1.

1° Si l'anneau A est de caractéristique p , alors, pour tout j et i dans $\mathbb{N}$ on a

$$D_{(j-1)p^i}\, D_{p^i} = j D_{jp^i} .$$

2° Il est alors facile de montrer par récurrence que si $r = j_0 + j_1 p + \dots + j_n p^n$ avec $0 \leq j_k < p$, pour tout k, alors

$$j_0!\, j_1! \dots j_n!\, D_r = (D_1)^{j_0} (D_p)^{j_1} \dots (D_{p^n})^{j_n} .$$

3° Si A est une algèbre sur un corps de caractéristique 0, on a $D_i = \frac{1}{i!} D_1^i$ donc

$$D = \{D_0 , D_1 , \frac{1}{2!} D_1^2 , \frac{1}{3!} D_1^3 \dots\}$$

PROPOSITION 1.2. - Soit A un anneau (ou une algèbre sur un corps k), alors les conditions suivantes sont équivalentes si $D = \{D_0 = \mathrm{id} , \dots , D_n , \dots\}$, suite d'endomorphismes du groupe abélien A.

(1) D l. f. h. d. (ou l. f. h. d. k-triviale) sur A,

(2) $\varphi : A \longrightarrow A[t]$ défini par $\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(a) t^n$ est un homomorphisme d'anneaux (de k-algèbres), t étant une indéterminée sur A.

Lorsque A est une k-algèbre il y a équivalence entre :

(1') D l. f. i. h. d. k-triviale sur A.

(2') φ définie en (2) est un homomorphisme de k-algèbres tel que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A[t] = A \otimes_k k[t] \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \otimes \mathrm{id} \\ A \otimes_k k[t] & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \Delta} & A \otimes_k \otimes k[t] \otimes_k k[t] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \otimes k[t] \\ & {\scriptstyle Z} \searrow & \swarrow {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \varepsilon} \\ & A \otimes_k k & \end{array}$$

avec

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t \quad \text{et} \quad \varepsilon : \begin{cases} k[t] \longrightarrow k \\ t \longmapsto 0 . \end{cases}$$

(3') ${}^a\varphi$: Spec $A \times_k G_a \dashrightarrow$ Spec A est une action du groupe additif G_a de k sur Spec A.

Définition 1.2. - Si a est un élément de A, nous définissons la longueur de a, notée long a, comme étant le degré par rapport à t de $\varphi(a)$.

Un élément a de A est une D-constante (i. e. $D_i(a) = 0$ pour tout $i \geq 1$) si, et seulement si, $\varphi(a) = a$, ou encore long $a = 0$.

2. Propriétés des dérivations localement finies itératives d'ordre supérieur.

PROPOSITION 2.1. - Soient A anneau, et D l. f. h. d. sur A, alors :

(i) Tout élément inversible de A est une D-constante,

(ii) <u>L'ensemble</u> A_0 <u>des</u> <u>D-constantes est un sous-anneau de</u> A <u>"inerte"</u>. (Si $s \in A_0$ et $s = r_1 . r_2$ avec $r_i \in A$; $i \in \{1 , 2\}$ alors, $r_i \in A_0$; $i \in \{1 , 2\}$),

(iii) A_0 <u>est algébriquement fermé dans</u> A .

<u>Preuve</u>.

(i) Si $a \in A$ et a inversible, $\varphi(a)$ est inversible dans $A[t]$ qui est intègre donc $\varphi(a) \in A$, d'où $\varphi(a) = a$.

(ii) Il est clair que A_0 est un sous anneau de A ; nous supposerons $A_0 \neq A$, soit s dans A_0 , donc $\text{long } s = 0$.

Si $s = r_1 . r_2$, et si r_1 n'appartient pas à A_0 , nous aurons

$$\text{long } s = \text{long } r_1 + \text{long } r_2$$

avec $\text{long } r_1 \neq 0$ en contradiction avec $\text{long } s = 0$.

(iii) Si $b \in A$ avec $a_q b^q + a_{q-1} b^{q-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$, avec a_i dans A_0 pour tout i ; $b(a_q b^{q-1} + \ldots + a_1) = - a_0$, donc (ii) entraine que b appartient à A_0 .

COROLLAIRE 2.1. - <u>Si</u> A <u>est un anneau factoriel, alors</u> A_0 <u>est factoriel</u>.

REMARQUE 2.1. - <u>Si</u> A <u>est une</u> <u>k-algèbre et</u> D <u>k-triviale, alors</u> A_0 <u>sera aussi</u> <u>une</u> <u>k-algèbre</u>.

LEMME 2.1. - <u>Soient</u> A <u>anneau avec</u> D <u>1. f. i. h. d. sur</u> A , A_0 <u>l'anneau des D-constantes ; s'il existe</u> t <u>dans</u> A <u>tel que</u> $D_1(t) = 1$, $D_i(t) = 0$ <u>pour</u> $i > 1$, <u>alors</u> $A = A_0[t]$ (t <u>est algébriquement indépendant sur</u> A_0).

<u>Preuve</u>. - Définissons $L : A \longrightarrow A$ par

$$L(a) = \sum_{i=0}^{\infty} (- 1)^i D_i(a)t^i \quad \text{pour tout } a \text{ dans } A .$$

L est un homomorphisme d'anneaux (de k-algèbres si A est une k-algèbre sur un corps k), et l'on a

$$L^{-1}(0) = tA , \quad \text{Im } L = A_0 ,$$

la seule difficulté est de prouver que $\text{Im } L \subset A_0$. Pour cela il suffit de prouver que $D_s(L(a)) = 0$ pour tout $a \in A$ et $s \geqslant 1$.

Il résulte des égalités

$$D_\ell(t^i) = \binom{i}{\ell} t^{i-\ell} \quad \text{si } \ell \leqslant i ,$$

$$D_\ell(t^i) = 0 \quad \text{si } \ell > i ,$$

que

$$D_s(t^i D_i(a)) = \sum_{\ell=0}^{\inf(i,s)} \binom{i}{\ell} \binom{s - \ell + i}{i} t^{i-\ell} D_{s-\ell+i}(a) .$$

Soit n un entier tel que $D_i(a) = 0$, si $i > n$. On a alors

$$D_s(L(a)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{\sum_{\ell=0}^{\inf(i,s)} \binom{i}{\ell} \binom{s-\ell+i}{i} t^{i-\ell} D_{s-\ell+i}(a)\}$$

pour $s \leqslant n$,

$$D_s(L(a)) = 0 \quad \text{si} \quad s > n .$$

D'où, si $s \leqslant n$,

$$D_s(L(a)) = \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^k a_k t^k D_{s+k}(a)$$

où

$$a_k = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{k+j}{j} \binom{s+k}{k+j} = \binom{s+k}{k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} = 0 ,$$

et par suite

$$D_s(L(a)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad s \geqslant 1 .$$

De plus, on a $L^2 = L$, car $L(t^n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Nous pouvons écrire alors $a = L(a) + ta_1$, puis $a = L(a) + tL(a_1) + t^2 a_2$, où $a_1 - L(a_r) = ta_2$, d'où

$$a = L(a) + L(a_1)t + \dots + L(a_m)t^m \pmod{t^{m+1} A} \text{ pour tout entier } m .$$

On peut alors montrer par récurrence que, pour tout k ,

$$a_k = D_k(a) - tkD_{k+1}(a) + t^2 \frac{k(k+1)}{2} D_{k+2}(a) - t^3 \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} D_{k+3}(a) + \dots$$

(ce qui implique $L(a_k) = L(D_k(a))$, mais, pour tout $j > n$, $D_j(a) = 0$ donc, si on écrit $a = \sum_{i=0}^{n} L(a_i)t^i + t^{n+1} a_{n+1}$, alors $a_{n+1} = 0$. Par suite, a appartient à $A_0[t]$ puisque $\operatorname{Im} L = A_0$.

<u>Définition</u> 2.1. - Soit $D = \{D_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ une l. f. i. h. d. non triviale sur A . Soit $A_i = \{a \in A \text{ tel que } D_m(a) = 0 \text{ si } m > i\}$, les A_i forment une suite croissante de A_0-modules, et $A = \bigcup_{i \in \underset{\sim}{N}} A_i$. Un entier n sera dit <u>indice de saut</u>, si $A_{n-1} \subset A_n$. Pour a dans A , on appelle <u>support de</u> a l'ensemble

$$\operatorname{Supp} a = \{k \ ; \ D_k(a) \neq 0\} .$$

REMARQUE 2.2. - <u>Si</u> n <u>est le premier indice de saut, alors</u> x <u>est dans</u> A_n <u>sans être dans</u> A_{n-1} <u>si, et seulement si,</u> long x <u>est la plus courte longueur parmi celles des éléments de</u> A <u>qui ne sont pas des</u> D-<u>constantes</u>.

LEMME 2.2.

1° <u>Soit</u> $D = \{D_0 , D_1 , \dots\}$ <u>une l. f. i. h. d. non triviale sur l'anneau</u> A , <u>et soit</u> n <u>le premier indice de saut, alors</u> pour tout x dans $A_n \setminus A_{n-1}$, $D_i(x)$ appartient à A_0 pour tout i non nul dans $\operatorname{Supp} x$, et si $u = \prod_{i \in \operatorname{Supp} x, i \neq 0} D_i(x)$ alors $A[u^{-1}] = A_0[u^{-1}][x]$.

2° <u>Inversement soient</u> A <u>un anneau,</u> A_0 <u>un sous-anneau de</u> A <u>tel que</u> A <u>soit une</u> A_0<u>-algèbre de type fini, et tel qu'il existe</u> u <u>dans</u> A_0 , x <u>dans</u> A <u>trans-</u>

cendant sur A_0 avec $A[u^{-1}] = A_0[u^{-1}][x]$. Alors il existe une l. f. i. h. d. D non triviale sur A , dont A_0 est l'anneau des D-constantes.

Preuve.

Si le premier indice de saut est 1 la preuve est facile. En effet, soit $x \in A_1 \setminus A_0$; posons $u = D_1(x)$, alors $u \in A_0$; nous pouvons étendre D de manière unique à $A[u^{-1}]$ en posant, si $a \in A$, $D(a/u^n) = D(a)/u^n$; dans $A[u^{-1}]$, D est une l. f. i. h. d., et $D(x.u^{-1}) = 1$; appliquons le lemme 2.1 à $t = x.u^{-1}$ et $A[u^{-1}]$, nous obtenons

$$A[u^{-1}] = A_0[u^{-1}][t] = A_0[u^{-1}][x]$$

avec t algébriquement indépendant sur $A_0[u^{-1}]$, donc $x = tu$ est algébriquement indépendant sur A_0 .

Puisque dans le cas où la caractéristique de A est 0 et où D est non triviale sur A , le premier indice de saut vaut 1 (cf. Proposition 1.1.3), nous supposerons à partir de maintenant que nous sommes dans le cas où la caractéristique de A est un nombre premier p , et que le premier indice de saut est plus grand que 1.

Nous allons montrer que

1° Le premier indice de saut est $n = p^s$, s entier non nul.

2° Le m-ième indice de saut est mp^s ,

3° Si $a \in A_n \setminus A_{n-1}$, Supp(a) n'est formé que de puissances de p . De plus, les $D_k(a)$ appartiennent à A_0 pour tout $k \in \mathrm{Supp}(a)$.

Preuve de 1°. - Posons $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_s p^s$ $(0 \leqslant n_i < p ,\ n_s \neq 0)$.

Nous avons (proposition 1.1.2)

$$D_n = \frac{1}{n!!} D_1^{n_0} D_p^{n_1} \dots D_{p^s}^{n_s} \quad \text{où} \quad n!! = n_0!\, n_1! \dots n_s! \ .$$

Supposons que n ne soit pas une puissance de p , deux cas sont alors possibles. Ou bien $n_0 \geqslant 1$, ou bien $n_0 = 0$, et $n_1 + \dots + n_s \geqslant 2$. Dans le premier cas, l'élément $c = D_{n-1}(a)$ appartient à $A_1 \setminus A_0$. En effet, $D_i(c) = 0$ pour $i \geqslant 2$, mais $D_i(c) = D_1(D_{n-1}(a)) = nD_n(a) \neq 0$, car $n \not\equiv 0 \pmod p$ et $a \in A_n \setminus A_{n-1}$, alors 1 est le premier indice de saut, et ce cas a été éliminé.

Si maintenant on avait $n_0 = 0$ et $n_1 + \dots + n_s \geqslant 2$, l'élément $c = D_s(a)$ appartiendrait à A_{n-1} , car un entier supérieur à $n - p^s$ ne peut appartenir à Supp(c) , pour tout $h \geqslant 1$, on a

$$D_{n-p^s+h}(D_{p^s}(a)) = \frac{(n+h)!}{(n-p^s+h)!\, p^s!} D_{n+h}(a) = 0 \ ,$$

d'où $c \in A_{n-1} = A_0$, mais d'autre part

$$D_{n-p^s} D_{p^s}(a) = \frac{1}{n_1! \dots (n_{s-1})!} D_p^{n_1} \dots D_{p^s}^{n_s-1} D_{p^s}(a) = n_s D_n(a) \neq 0$$

et puisque $n - p^s = n_1\, p + n_2\, p^2 + \dots + \dots + (n_s - 1)p^s \geqslant n_1 + \dots + n_{s-1} \geqslant 1$, on arrive à une contradiction avec le fait que $c \in A_0$. Par conséquent, n est une puissance de p , soit $n = p^s$.

Preuve de 2°. – Montrons que les indices de saut sont de la forme mp^s . Soit $x \in A_{p^s} \setminus A_0$, on peut montrer par récurrence sur m que $x^m \in A_{mp^s}$ pour tout m , mais que $D_{mp^s}(x^m)$ est non nul. Ainsi, pour tout m , mp^s est indice de saut ; il reste à voir que tous les indices de saut sont de cette forme.

Supposons que q soit un indice de saut qui ne soit pas multiple de p^s alors $mp^s < q < (m + 1)p^s$ avec m entier , soit $q_0 = q - mp^s$, $0 < q_0 < p^s$.
Si $x \in A_q \setminus A_{q-1}$, posons $c = D_{mp^s}(x)$, alors

$$D_{q_0}(c) = \frac{q!}{q_0!\; mp^s!}\, D_q(x) \neq 0$$

car $q!/q_0!\, mp^s!$ est un entier de la forme $1 + ph$ et $D_q(x)$ n'est pas nul, donc c n'appartient pas à A_0 (ni à A_{q_0-1}),et $c \in A_{q_0}$ car $x \in A_q$, donc $A_{q_0-1} \subset A_{q_0}$, d'où une contradiction.

Preuve de 3°. – Nous avons $A_0 = A_1 = \dots = A_{p^s-1} \subset A_{p^s}$, soit x dans $A_{p^s} \setminus A_0$, et $m \in \operatorname{Supp} x$; écrivons $m = m_0 + m_1\, p + \dots + m_t\, p^t$ ($m_t \neq 0$, $0 \leqslant m_i < p$). Supposons que $m_t \geqslant 2$, ou que l'un des m_i $(i < t)$ soit non nul. Alors si $c = D_{p^t}(x)$, on a $D_{m-p^t}(c) \neq 0$, car $D_{m-p^t}(c) = m_t\, D_m(x) \neq 0$, donc

$$c \notin A_0 = \dots = A_{p^s-1} ,$$

il existe par conséquent $i > 0$ tel que $D_{p^s-1+i}\; D_{p^t}(x) = D_{p^s+p^t-1+i}(x) \neq 0$, ce qui est impossible puisque $p^s + p^t - 1 + i$ est plus grand que p^s . Donc $m \in \operatorname{Supp} x$ implique $m = p^t$.
De plus, si $D_{p^t}(x) \neq 0$, alors

$$D_k\, D_{p^t}(x) = \frac{(k + p^t)!}{k!\; p^t!}\, D_{k+p^t}(x) \quad \text{pour tout } k ,$$

si $k + p^t$ n'est pas puissance de p , $D_{k+p^t}(x) = 0$. Si $k + p^t = p^h$ avec h entier $(k + p^t)!/k!\, p^t!$ est un multiple de p . Ce qui termine la preuve du 3°.

Soit donc, $n = p^s$ le premier indice de saut, et soit x un élément de $A_n \setminus A_0$, posons $u = \prod_{0<i\leqslant s} D_{p^i}(x)$ avec $D_{p^i}(x) \neq 0$; u appartient à A_0 d'après ce qui précède. Si a élément de A , posons $a_1 = a - D_{mp^s}(a)\, D_{p^s}(x)^{-m}\, x^m$, si $a \in A_{mp^s}$ (ce qui est possible). De plus, puisque u appartient à A_0 , on peut étendre D à $A[u^{-1}]$. Nous avons $D_{mp^s}(a_1) = 0$, car

$$D_{mp^s}(a_1) = D_{mp^s}(a) - D_{mp^s}(a)\, D_{p^s}(x)^{-m}\, D_{mp^s}(x^m) ,$$

puisque $D_{p^s}(x)^{-m}$ est une D-constante de $A[u^{-1}]$; par récurrence sur m , on montre que $D_{mp^s}(x^m) = D_{p^s}(x)^m$. Ainsi, a_1 appartient à

$$A_{(m-1)p^s} \quad (a_1 \in A_{mp^s} \text{ et } D_{mp^s}(a_1) = 0) .$$

En posant $a_2 = a_1 - D_{(m-1)p^s}(a_1)\, D_{p^s}(x)^{-(m-1)}\, x^{m-1}$, nous pouvons continuer le raisonnement, d'où l'on déduit une expression de a comme polynôme en x à coefficients dans $A_0[u^{-1}]$, x , appartenant à $A \setminus A_0$, est algébriquement indépendant sur A_0 .

Inversement, si $A_0[u^{-1}][x] = A[u^{-1}]$, définissons $\widetilde{D} = \{\widetilde{D}_0 = \mathrm{id} , D_1 , \dots\}$ l. f. i. h. d. sur $A[u^{-1}]$ de la manière suivante. $\widetilde{D}_i$ sont des endomorphismes de $A[u^{-1}]$ tels que $\widetilde{D}_i = 0$ sur $A_0[u^{-1}]$, pour $i > 0$, et $\widetilde{D}_1(x) = 1$, $\widetilde{D}_i(x) = 0$, pour tout $i > 1$.

Alors, si $A = A_0[a_1 , \dots , a_n]$ où $a_i = \sum_{\ell=0}^{\ell_i} \alpha_{\ell,i}\, x^\ell$ pour tout $i \geqslant 1$ avec $\alpha_{\ell,i} = \dfrac{\beta_{\ell,i}}{u^{k_{\ell,i}}}$ dans $A_0[u^{-1}]$, on a $a_i = \dfrac{f_i(x)}{u^{k_i}}$, où $f_i(x)$ appartient à $A_0[x]$, et k_i est un entier. Posons alors $s = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i$, $D_1(x) = u^s$, et $D_k = u^s\, \widetilde{D}_k$, alors A est laissé stable par D_k .

COROLLAIRE 2.2. - Si A est une k-algèbre de dimension 2, D une l. f. i. h. d non triviale sur A , A_0 ne peut être réduit à k , et A_0 est une k-algèbre de dimension 1.

COROLLAIRE 2.3. - Soit $A = k[X , Y] = k[X][Y]$. Alors il existe D une l.f.i.h.d. non triviale sur A .

PROPOSITION 2.2. - Si D est l.f. i. h. d. non triviale sur un anneau A , et si A_0 est l'anneau des D-constantes, l'injection $A_0 \dashrightarrow A$ est pure c'est-à-dire : si M est un A_0-module avec $A \otimes_{A_0} M = 0$ alors $M = 0$.

Preuve. - Le lemme précédent nous permet d'écrire, en posant

$$S = \{1 , u , \dots , u^n , \dots\} , \quad S^{-1} A = S^{-1} A_0[x] ;$$

supposons u non inversible dans A , soit M A_0-module de type fini, si $A \otimes_{A_0} M = 0$, alors $S^{-1} A \otimes_{S^{-1}A_0} S^{-1} M = 0$, donc $S^{-1} M = 0$, puisque $S^{-1} A$ est libre sur $S^{-1} A_0$. Il existe donc un entier n tel que $u^n M = 0$, si P appartient au support de M , $u \in P$.
De plus, M est un $(A_0/u^n A_0)$-module et $A/u^n A \otimes_{A_0/u^n A_0} M = 0$.
Nous aurons $A/u^n A \neq 0$ car u n'est pas inversible.

Soit $P \in \mathrm{Spec}\, A_0$ avec $u \in P$, posons $T = A_0 \setminus P$. Alors

$$T^{-1}(A/u^n A) \otimes_{(A_0)_P/u^n(A_0)_P} M_P = 0 .$$

Ainsi nous avons, soit

(i) $A_P/u^n A_P = PA_P/u^n A_P$, soit

(ii) $M_P = 0$.

Le premier cas est impossible, car il implique $A_P = PA_P$ puisque u^n appartient à P , ou encore $1 = b(a/s)$ avec $b \in P$, $a \in A$, $s \in T$, c'est-à-dire $s = ba$, ce qui implique $a \in A_0$ (A_0 est inerte) et $s = ba \in P$, ce qui n'est pas vrai. On a donc $P \notin \mathrm{Supp}\, M$, et par suite le support de M est vide donc $M = 0$.

3. Caractérisation du plan affine. Démonstration du théorème 1.

Nous allons donner la preuve du théorème 1. Les conditions sont évidemment nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes.

Supposons (i), (ii) et (iii) vérifiées, dans toute la suite nous noterons K le corps des fractions de A , A_0 l'anneau des D-constantes, K_0 son corps des fractions, et k désignera un corps algébriquement clos.

Nous allons montrer qu'il existe f et q algébriquement indépendants tels que $A = k[f , q]$.

Nous aurons besoin de deux résultats obtenus dans [1].

PROPOSITION 3.1. - *Supposons que R soit un anneau intègre contenant k dont le corps quotient soit une extension transcendante pure $k(t)$ de k . Alors la clôture intégrale de R est un anneau quotient d'un anneau de polynômes en une variable sur k.*

PROPOSITION 3.2. - *Soit F un corps de fonctions algébriques en une variable sur k , $F = k(x_1 , \dots , x_n)$ et $R = k[x_1 , \dots , x_n]$ intégralement clos, alors R est factoriel si, et seulement si, F est une extension transcendante pure de degré 1 de K ,* (cf. [1] ou [7]).

Remarque 3.1. - Dans les hypothèses de la proposition 2, nous pouvons aussi déduire que R est non seulement principal mais euclidien (cf. [7]).

LEMME 3.1. - *Soit k un corps algébriquement clos, A une k-algèbre intègre de type fini qui est un anneau factoriel de dimension 2 avec $A^* = k^*$. Supposons qu'il existe une G_a-action non triviale sur $\mathrm{Spec}\, A$ (définie sur k). Alors l'anneau A_0 des invariants de A est un anneau de polynômes à une indéterminée sur k .*

Preuve. - Nous savons qu'il existe $a \in A_0$ et $t \in A$, tels que $A[a^{-1}]=A_0[a^{-1}][t]$ (lemme 2.2). Puisque A_0 est factoriel, il en est de même de $A_0[a^{-1}]$, enfin $\dim A_0 = 1$. La k-algèbre $A_0[a^{-1}]$ est de type fini sur k , car $A[a^{-1}]$ est de type fini sur k . De plus, le corps quotient de $A_0[a^{-1}]$ est celui K_0 de A_0 , et $\operatorname{tr} \deg_k K_0 = 1$. D'après la proposition 3.2, on a $K_0 = k(u)$, où u est transcendant sur k.

La proposition 3.1 s'applique alors, et A_0 est anneau quotient d'un anneau de polynômes en une variable sur k. Mais $A_0^* = k^*$ implique $A_0 = k[d]$, d transcendant sur k.

LEMME 3.2. - <u>Soit</u> A <u>une</u> k-<u>algèbre de type fini de dimension</u> 2, <u>supposons</u> :

(i) <u>L'anneau</u> A <u>factoriel</u>,

(ii) <u>Il existe une</u> G_a-<u>action, propre et définie sur</u> k <u>sur</u> $\operatorname{Spec} A$,

(iii) <u>La</u> k-<u>algèbre</u> A_0 <u>est de type fini sur</u> k.

<u>Alors il existe</u> t <u>dans</u> $A \setminus A_0$ <u>tel que</u> $A = A_0[t]$.

<u>Preuve</u>.

1° Posons $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} A_0$, $f : X \dashrightarrow Y$ le morphisme (dominant) défini par l'injection $A_0 \dashrightarrow A$.

En appliquant à A_0 la proposition 3.2, nous obtenons que K_0 est une extension transcendante pure de degré 1 de k, puis la proposition 3.1, et le fait que A_0 soit de type fini sur k entraîne

$$A_0 = k[a\ ,\ 1/h(a)]\ ,\ \text{avec}\ \ h(a) \in k[a]\ .$$

2° Choisissons un élément t dans $A \setminus A_0$ tel que :

(i) La longueur de t est minimum (cf. remarque 2.2)

(ii) Si $D_{\operatorname{long} t}(t) = e.\ a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$ où e est inversible et $a_1, \dots, a_n$ sont irréductibles, alors $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ est maximal.

Alors le lemme 2.2 implique qu'il existe $c \in A_0$ tel que $A[c^{-1}] = A_0[c^{-1}][t]$, et $D_{\operatorname{long} t}(t)$ appartient à A_0. Dans ce cas, pour tout $\alpha \in k$, $t - \alpha$ est irréductible dans A. En effet, sinon on aurait $t - \alpha = t_1 t_2$, $t_i \in A$, $i \in \{1, 2\}$ et $\operatorname{long}(t - \alpha) = \operatorname{long} t_1$ et $\operatorname{long} t_2$, donc t_1 par exemple serait dans A_0. Posant alors $a_2 = D_{\operatorname{long} t_2}(t_2)$, nous aurons $D_{\operatorname{long}}(t) = a_2 t_1$, ce qui contredit le choix de t.

3° Posons $B = A_0[t]$, $Z = \operatorname{Spec} B$, nous pouvons noter que B est intégralement clos (B est factoriel) et nous avons les inclusions : $A_0 \longrightarrow B \xrightarrow{\psi} A$, ce qui donne lieu au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X = \operatorname{Spec} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & \operatorname{Spec} B = Z \arrow[d, "g"] \\ & Y = \operatorname{Spec} A_0 \end{tikzcd} .$$

ρ est un morphisme birationnel puisque $A[c^{-1}] = A_0[c^{-1}][t]$, donc K est le corps des fractions de $A[c^{-1}]$ et le corps des fractions de B. Nous allons montrer que toutes les fibres $\rho^{-1}(z)$ avec $z \in Z$ sont finies, $f = g \circ \rho$ donc pour tout z dans Z, $\rho^{-1}(z) \subset f^{-1}(g(z))$. Il suffira de prouver que, pour tout $y \in Y$, le morphisme $\rho_y : f^{-1}(g) \dashrightarrow g^{-1}(y)$, restriction de ρ , a toutes ses fibres finies, car alors $\rho^{-1}(z) = \rho_{g(z)}(z) \subset f^{-1}(g(z))$ sera finie.

Deux cas sont possibles, ou bien (i), y point générique de Y , ou bien (ii), y point fermé de Y .

(i) Si $y = (0)$ est le point générique de Y , soit $S = A_0 - \{0\}$. Il y a bijection entre les idéaux premiers de A (respectivement B) ne rencontrant pas S et ceux de $S^{-1}A$ (respectivement $S^{-1}B$).

Mais $A[c^{-1}] = A_0[c^{-1}][t]$, donc $S^{-1}A[c^{-1}] = S^{-1}A_0[c^{-1}][t]$, ou $S^{-1}A = K_0[t] = S^{-1}B$. Il y a donc bijection entre les idéaux premiers de B ne rencontrant pas S , et ceux de A ayant la même propriété. Par suite, ρ est un isomorphisme au-dessus du point générique de Y .

(ii) Si y est un point fermé de A_0 , y correspond à un idéal premier non nul de A_0 . Ces idéaux sont de la forme $(a - \alpha)A_0$ avec $h(\alpha) \neq 0$; en effet, tout élément ρ , irréductible dans A_0 (donc dans A , puisque A_0 est inerte), est de la forme $a - \alpha$, en effet on a $h(\alpha) = 0$ si, et seulement si, $a - \alpha$ est une unité, et $h(\alpha) \neq 0$ si, et seulement si, $a - \alpha$ est premier dans A .

(Si $h(\alpha) = 0$, avec $h(a) = \prod_{i=1}^{r} (a - \alpha_i)$, $1/(a - \alpha) = (\prod_{\alpha_i \neq \alpha} (a - \alpha_i))/h(a)$, est dans A_0 , et réciproquement si $a - \alpha$ est une unité, il existe $q(a)/h(a)^n$ tel que $(q(a)/h(a)^n)(a - \alpha) = 1$, donc $h(\alpha) = 0$).

Ceci montre en particulier que f est surjective.

D'autre part, $f^{-1}(y) = \{g \in \operatorname{Spec} A$ tel que $g \cap A_0 = (a - \alpha)A_0\}$ est le spectre de $A/(a - \alpha)A$ puisque $(a - \alpha)A_0$ est maximal dans A_0 , de même $g^{-1}(y) = \operatorname{Spec} B/(a - \alpha)B$, ces deux fibres étant irréductibles puisque $(a - \alpha)A$ et $(a - \alpha)B$ sont premiers dans A et B respectivement. Nous allons montrer que $\rho_y : f^{-1}(y) \longmapsto g^{-1}(y)$ est un morphisme dominant c'est-à-dire que

$$\bar{\psi} : B/(a - \alpha)B \dashrightarrow A/(a - \alpha)A$$

est injective, $\bar{\psi}$ étant induite par ψ .

Nous savons que $B/(a - \alpha)B \simeq A_0/(a - \alpha)A_0[t] \simeq k[t]$. Supposons que $\bar{\psi}$ ne soit pas injective.

Soit $q(t)$ dans $k[t]\setminus\{0\}$ tel que $\bar{\psi}(q(t)) = 0$ c'est-à-dire $q(t) \in (a - \alpha)A$, ce qui donne $\beta\prod_{1\leq i\leq m} (t - \gamma_i) = (a - \alpha)b$ avec b dans A ; β , γ_i dans k pour tout i , donc $t - \gamma_i = (a - \alpha)b'$ avec b' unité dans A , puisque $t - \gamma_i$ est irréductible ainsi que $a - \alpha$ dans A . Alors $t - \gamma_i$ serait dans A_0 ce qui est impossible ; donc $\bar{\psi}$ est injective.

Il est clair que l'on a $\dim A/(a - \alpha)A = \dim B/(a - \alpha)B = 1$, donc $f^{-1}(y)$ et

$g^{-1}(y)$ sont deux courbes irréductibles sur k .

Alors d'après [2] (chap. II, corollaire 7.4.4) si c et c' sont deux courbes algébriques irréductibles sur k , si $f : c \dashrightarrow c'$ est un k-morphisme, pour que f soit dominant il faut et il suffit que $f^{-1}(y)$ soit fini pour tout y dans c'.

Ainsi pour tout y point fermé de Y , les fibres de ρ_y sont finies, par conséquent ρ a toutes ses fibres finies.

4° ρ verifie les hypothèses suivantes

- ρ est un k-morphisme de type fini,
- ρ est birationnel,
- ρ a toutes ses fibres finies.

De plus, Z est un schéma affine normal (car B est intégralement clos). Alors, d'après [2] (chapitre III, 4.4.9), si Z est un préschéma intègre localement noethérien, si $\rho : X \dashrightarrow Z$ est un morphisme séparé de type fini, birationnel, ayant toutes ses fibres finies, si Z est normal, alors ρ est une immersion ouverte.

Ici, $Z = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} A$, ρ est séparé puisque tout morphisme de schémas affines est séparé ([2], I 5.5.8), $\rho(X)$ est donc un schéma affine ouvert dans Z .

5° Soit maintenant $V = Z\setminus\rho(X)$, montrons que $\operatorname{codim} V \geqslant 2$ (nous aurons en fait $\operatorname{codim} V = 2$). On a $V = V(I)$ avec I idéal de B , donc

$$\operatorname{codim} V = \inf_{P\in V(I)} (\dim B_P) = \inf_{P\in V(I)} (\operatorname{ht} P) .$$

Puisque $V = Z\setminus\rho(X)$, il n'existe pas de $q \in \operatorname{Spec} A$ tel que, si $P \in V$, $q \cap B = P$.

Soit $P \in V$, si $\operatorname{ht} P = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $\operatorname{ht} P = 1$. Alors, ou bien (i) : $P \cap A_0 = (0)$, ou bien (ii) : $P \cap A_0 \neq (0)$.

(i) Nous sommes au-dessus du point générique de A_0 , et nous avons déjà vu que ρ est un isomorphisme au-dessus du point générique, d'où une contradiction.

(ii) Soit $P \cap A_0 \neq (0)$, alors $P \cap A_0 = (a - \alpha)A_0$, où $\alpha \in k$ et $h(\alpha) \neq 0$.

Soient $G = (a - \alpha)A \in \operatorname{Spec} A$, et $Q = G \cap B = (a - \alpha)B$, nous avons alors $P = Q = (a - \alpha)B = G \cap B$, d'où une contradiction.

Soit O_Z le faisceau associé à Z , nous noterons $O_{Z,z}$ l'anneau local B_P si z est l'élément de Z correspondant à $P \in \operatorname{Spec} B$, nous avons la définition suivante $\operatorname{prof}_V(O_Z) = \inf_{z\in V} \operatorname{prof}(O_{Z,z})$ (cf. [2] ch. IV 5.10.1)

Mais le critère de normalité de Serre, appliqué à $Z = \operatorname{Spec} B$, nous permet d'écrire $\operatorname{prof}_V(O_Z) \geqslant \inf(2 , \dim O_{Z,z})$. Or, si z est dans V , on a $\dim O_{Z,z} \geqslant 2$ puisque $\operatorname{codim} V \geqslant 2$; d'où $\operatorname{pro}_V(O_Z) \geqslant 2$ (en fait il y a égalité).

<u>Définition</u> 3. - On dit que O_Z est V-<u>clos</u>, si l'on a l'isomorphisme suivant

$$\Gamma(Z , O_Z) \simeq \Gamma(Z\setminus V , O_Z)$$

(cf. [2], IV-5.9 et IV-5.9.8).

Or d'après [2] (IV-5.10.5) si X est un préschéma localement noethérien, V une partie de X stable par spécialisation, pour que O_X soit V-clos il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{prof}_V(O_X) \geqslant 2$ (une partie V de X est stable par spécialisation si l'adhérence de toute partie finie de V est dans V, en particulier si V est fermée [2] (IV-5.9.1)).

Ce résultat s'applique à $Z = \mathrm{Spec}\, B$, V et O_Z. O_Z est donc V-clos. $\rho(X)$ étant affine on en déduit

$$\rho(X) = \mathrm{Spec}\,(\Gamma(Z\backslash V\,,\,O_Z)) \simeq \mathrm{Spec}\,\Gamma(Z\,,\,O_Z) = Z$$

d'où

$$B = A_0[t] = A\,.$$

Sous les hypothèses (i), (ii), (iii) du théorème 1, en rassemblant les lemmes 3.1 et 3.2, nous obtenons $A = k[d\,,\,t]$, ce qui termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CUNNEA (W. M.). - Unique factorization in algebraic function fields, Illinois J. Math., t. 8, 1964, p. 425-438.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de geométrie algébrique, I à IV. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publication mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[3] MIYANISHI (M.). - Some remarks on the action of the additive group schemes, J. Math. Kyoto Univ., t. 10, 1970, p. 189-205.

[4] MIYANISHI (M.). - G_a-action of the affine plane, Nagoya math. J., t. 41, 1971, p. 97-100.

[5] MIYANISHI (M.). - An algebraic characterization of the affine plane, J. Math. Kyoto Univ., t. 15, 1975, p. 169-184.

[6] MIYANISHI (M.) and NAKAI (Y.). - Some remarks on strongly invariant rings, Osaka J. Math., t. 12, 1975, p. 1-17.

[7] SAMUEL (P.). - About euclidean rings, J. of Algebra, t. 19, 1971, p. 282-301.

Thierry LEVASSEUR
20 rue du Ruisseau
75018 PARIS