Alex Rosenberg

La dimension globale d'extensions d'Ore

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 3, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A3_0>

LA DIMENSION GLOBALE D'EXTENSIONS D'ORE

par Alex ROSENBERG

Soit k un corps. En 1962, G. RINEHART a démontré que $\text{gl. dim } k[x , y]$ avec $xy - yx = 1$ est 1 si la caractéristique de k est 0 , et 2 si la caractéristique est $p \neq 0$. Puis, il a aussi démontré que, si on écrit

$$A_n(k) = k[x_1 , \ldots , x_n , y_1 , \ldots , y_n] \quad \text{avec} \quad x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} ,$$

on a

$$\text{gl. dim } A_n(k) = 2n$$

si la caractéristique de k est $p \neq 0$, et

$$n \leqslant \text{gl. dim } A_n(k) \leqslant 2n - 1$$

si k est de caractéristique 0 . C'est seulement en 1972 que ROOS a réussi à montrer que dans ce dernier cas, $\text{gl. dim } A_n(k) = n$. On peut donc se demander quelle est la dimension globale de $A_n(R)$ pour R , un anneau quelconque. Notons

$$D_n(R) = \text{l. gl. dim } A_n(R) - \text{l. gl. dim } A_{n-1}(R) .$$

Alors on a le theorème suivant :

THÉORÈME (RINEHART et ROSENBERG).

1° On a $D_n(R) = 1$ ou 2 ,

2° Soit R un anneau noetherien, à gauche et à droite, avec $\text{gl. dim } R = d < \infty$. Alors, $D_1(R) = 2$ si, et seulement si, il existe un module à gauche M sur $A_1(R)$ de type fini sur R , avec $\text{hd}_R M = d$.

3° Maintenant, soit de plus R un anneau commutatif, et notons par m le maximum des dimensions homologiques des R-modules cycliques qui sont en même temps des groupes de torsion (On prend $m = -\infty$ si R contient $\mathbb{Q}$). Alors

(a) Si R est une $\mathbb{Q}$-algèbre, $\text{gl. dim } A_n(R) = d + n$.

(b) $D_n(R) = 1$ pour $n \leqslant d - m$ et $D_n(R) = 2$ pour $n > d - m$.

Le cas R commutatif a aussi été prouvé par K. GOODEARL par des méthodes différentes. En général, si $\{a_n\}$ est une suite avec $a_n = 1$ ou 2 mais finalement constante, il existe un anneau R tel que $D_n(R) = a_n$. Quand on démontre le théorème, on étudie les extensions d'Ore, c'est à dire :

Soient R un anneau, D une dérivation de R

$$D(r_1 + r_2) = D(r_1) + D(r_2) , \quad D(r_1 r_2) = D(r_1) r_2 + r_1 D(r_2)$$

et $S = R[t]$, l'anneau des polynômes en t comme groupe additif, avec la multiplication donnée par la règle $rt = tr + D(r)$, et la multiplication usuelle entre les éléments de R et les puissances de t . HOCHSCHILD et FIELDS ont démontré, vers 1960, que

$$\text{l. gl. dim } S = \text{l. gl. dim } R \text{ ou bien l. gl. dim } R + 1 ,$$

résultat pas tout-à-fait vrai, car GOODEARL a donné un exemple d'un anneau commutatif avec $\text{gl. dim } R = \infty$, mais $\text{gl. dim } S = 1$!

Mais en tous cas, c'est vrai si $\text{l. gl. dim } R = d < \infty$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME (RINEHART, STAFFORD, ROSENBERG). - Soit R un anneau noethérien à gauche et à droite avec $\text{gl. dim } R = d < \infty$. Alors $\text{gl. dim } S = d + 1$ si, et seulement si, il existe un S-module à gauche M , de type fini sur R , avec $\text{hd}_R M = d$.

C'est seulement dans le cas commutatif, que nous pouvons donner des critères dans l'anneau même.

THÉORÈME (GOODEARL, STAFFORD et ROSENBERG). - Soit R noethérien commutatif et $\text{gl. dim } R = d < \infty$. Alors $\text{gl. dim } S = d + 1$ si, et seulement si, il existe un idéal maximum $\mathfrak{M}$ de R , avec $\text{hd}_R \mathfrak{M} = d - 1$ et, ou bien $D\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, ou bien la caractéristique de R n'est pas nulle.

J'ignore si l'hypothèse, que les anneaux soient noethériens, est nécessaire pour la validité des théorèmes.

Alex ROSENBERG
Dept of Mathematics
Cornell University
ITHACA, N. Y. 14853
(États-Unis)