Marcel P. Schützenberger

Quelques problèmes posés par l'étude combinatoire des semigroupes

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 19, p. 1
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A19_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 19, 1 p.

28 mai 1976

QUELQUES PROBLÈMES POSÉS PAR L'ÉTUDE COMBINATOIRE DES SEMIGROUPES

par Marcel P. SCHÜTZENBERGER

Résumé.

Divers travaux au premier rang desquels figurent ceux de J.-F. PERROT et de D. PERRIN ont montré l'intérêt de l'étude des groupes contenus dans le monoïde syntaxique d'un sous-monoïde X^* du monoïde libre A^* engendré par une partie X ayant un nombre fini k d'éléments. Le but de cette communication est d'établir l'énoncé suivant.

PROPRIÉTÉ. - Les seuls groupes (maximaux) dans $\mathrm{Synt}\,(X^*)$ qui ne sont pas sous-groupe du groupe symétrique γ_{2k} sont cycliques, et leur nombre est au plus k.

La vérification utilise la théorie des équations dans les monoïdes libres de A. LENTIN. Il semble possible de montrer par la même technique que le nombre d'idéaux principaux idempotents de $\mathrm{Synt}(X^*)$ est borné supérieurement en fonction de k. La valeur $2k$ figurant dans la propriété est vraisemblablement extravagante.

Notations. - Dans tout l'exposé, X est une partie du semi-groupe libre $A^+ = A^*\backslash 1$, et l'on pose

$$(1)\quad \begin{cases} P = XA^{+(-1)} = \{p \in A^* : \ pA^+ \cap X \neq \emptyset\} \ ; \\ Q = A^{+(-1)}X = \{q \in A^* : \ A^+ q \cap X \neq \emptyset\} \ ; \\ W = A^*\backslash A^{*(-1)}XA^{*(-1)} = \{w \in A^* : \ A^* w A^* \cap X = \emptyset\} \ ; \end{cases}$$

selon les notations de S. EILENBERG.

On considère un morphisme fixe α dans A^* du monoïde libre B^*, engendré par un ensemble B tel que la restriction de α à B soit une bijection sur X. Pour chaque mot a de A^*,

$$(2)\qquad a\bar{\alpha} = \{(q\ ,\ b\ ,\ p) \in Q \times B^* \times P \ ; \quad a = q.b\alpha.p\}$$

est l'ensemble des lectures de a. Deux lectures $(q\ ,\ b\ ,\ p)$ et $(q'\ ,\ b'\ ,\ p')$ de a sont séparées si, et seulement si, il n'existe pas de factorisations $b = b_1\, b_2$, $b' = b_1'\, b_2'$ pour lesquelles

$$(3)\qquad q.b_1\,\alpha = q'.b_1'\,\alpha \quad (\Longleftrightarrow b_2\,\alpha.p = b_2'\,\alpha.p') \ .$$

On rappelle que deux mots a et a' sont dits conjugués si, et seulement si, il existe des mots c, d tels que $a = cd$, $a' = dc$. Un mot a est primitif si, et seulement si, $a \in b^*$ pour tout $b \in A^*\backslash a$. C'est une sesquipuissance de thème cd $(= \sqrt{a})$ et d'ordre p si, et seulement si, il existe une paire (nécessairement unique) $(c\ ,\ d) \in A^* \times A^+$ et un entier $p \geqslant 2$ tels que

$$(4)\qquad a = (cd)^p\, c \ ; \quad cd \ \text{primitif.}$$

Marcel P. SCHÜTZENBERGER, 97 rue du Ranelagh, 75016 PARIS.