CHRISTIAN CHOFFRUT

Applications biséquentielles d'un monoïde libre dans un autre

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 15, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A15_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 15, 8 p.

28 mai 1976

APPLICATIONS BISÉQUENTIELLES D'UN MONOÏDE LIBRE DANS UN AUTRE

par Christian CHOFFRUT

1. Introduction.

Les applications séquentielles d'un monoïde libre X^* dans un autre Y^*, sont des transductions rationnelles fonctionnelles réalisées d'une certaine manière par des automates finis munis d'une "sortie". Elles jouent un rôle important dans la théorie des transductions rationnelles. En particulier, toute transduction rationnelle fonctionnelle peut être obtenue par composition de deux applications séquentielles (cf. [2], [7] et [8]).

Dans la définition d'un automate fini, donc dans celle d'une application séquentielle, intervient le choix d'un sens (suivant que la lecture se fait de gauche à droite ou de droite à gauche). Cependant, alors que les notions d'automate à gauche et à droite définissent une même classe d'objets (un langage reconnu par un automate à gauche est reconnu par un automate à droite et inversement), il n'en est pas de même des applications séquentielles gauches et droites. En particulier, placer un marqueur à gauche de tout mot non vide définit une application séquentielle gauche et non droite. Nous appelons biséquentielle toute application séquentielle qui est à la fois gauche et droite.

La caractérisation dûe à S. GINSBURG [3] des applications séquentielles en tant qu'applications de X^* dans Y^*, laisse prévoir que les contraintes, pour qu'une application soit biséquentielle, sont très fortes. Il existe, outre les morphismes, des applications qui sont biséquentielles. Soit par exemple θ l'application de $\{x , y\}^*$ dans lui-même définie récursivement par $\theta(1) = 1$ (1 est le mot vide), et pour tout $f \in X^*$, $\theta(f)x = \theta(fx)$, $\theta(fx)y = \theta(fxy)$ et $\theta(fy^2) = \theta(fy)xy$. On vérifie sans peine que θ est biséquentielle.

Le but du présent travail est de montrer que pour une certaine classe d'applications séquentielles il n'existe pas d'autres applications biséquentielles, en dehors des morphismes. Plus précisément, toute application séquentielle gauche θ conservant les préfixes (cf. [3]), à tout mot $f \in X^*$ nous pouvons associer une application ρ_f de X^* dans Y^*, définie pour tout $h \in X^*$ par $\theta(fh) = \theta(f)\rho_f(h)$. Si de plus les mots $\theta(f)$ pour $f \in X^*$ ne sont pas tous puissances d'un même mot, on montre le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit θ une application séquentielle gauche telle que tout mot f ait une puissance f^r $(r > 0)$ vérifiant $\rho_{f^r} = \theta$. Alors θ est biséquentielle si, et seulement si, c'est un morphisme.

2. Quelques propriétés combinatoires du monoïde libre.

2.1. Rappel de définitions et de résultats classiques.

Soit X^* le monoïde libre engendré par l'ensemble X , et 1 son élément neutre. Les éléments de X sont appelés des lettres, ceux de X^* des mots et 1 est appelé le mot vide de X^* .

Un mot $h \in X^*$ est facteur de $f \in X^*$, s'il existe f_1 , $f_2 \in X^*$ tels que l'on ait $f = f_1 h f_2$. On dit que h est un facteur gauche (resp. droit) de f , si f_1 (resp. f_2) est le mot vide.

Deux mots f , $h \in X^*$ sont dits conjugués, s'il existe u , $v \in X^*$, tels que l'on ait $f = uv$ et $h = vu$.

PROPOSITION 2.1. - Deux mots f , $h \in X^*$ sont conjugués si, et seulement si, il existe $g \in X^*$ tel que l'on ait $fg = gh$.

Un mot $f \in X^*$ est dit primitif, si pour tout $h \in X^*$ et tout $n \geq 0$, $f = h^n$ implique $n = 1$. Dans le cas contraire on dit qu'il est imprimitif. En particulier, 1 est imprimitif.

Il est clair que tout mot $f \in XX^*$ est puissance d'un mot primitif. Que celui-ci soit unique résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2 [6]. - Soit f , $h \in X^*$ et n , $p > 0$ tels que $f^n = h^p$. Alors f et h sont puissances d'un même mot.

Pout tout $f \in XX^*$ nous noterons $\sqrt{f}$ l'unique mot primitif dont f est puissance et nous poserons $\sqrt{1} = 1$. Pour tout f , $h \in X^*$ nous noterons $\sqrt{f} \sim \sqrt{h}$, si $\sqrt{f} = \sqrt{h}$ ou si f ou h est le mot vide. Dans le cas contraire nous écrirons $\sqrt{f} \not\sim \sqrt{h}$.

PROPOSITION 2.3 [4]. - Soit f , $h \in X^*$. Alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{h}$ si, et seulement si, $fh = hf$.

La relation $\sim$ ainsi définie n'est pas transitive. Cependant si $h \neq 1$, alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{h}$ et $\sqrt{h} \sim \sqrt{g}$ entraine $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

Un ensemble $A \subset X^*$ sera dit cyclique, si tous les mots de A sont puissances d'un même mot, c'est-à-dire s'il existe $f \in X^*$ tel que l'on ait $A \subset f^*$. En raison de la remarque précédente , A est cyclique si, et seulement si, il existe un mot $g \in XX^*$ tel que pour tout $f \in A$ on ait $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

Les deux résultats classiques suivants illustrent le type de contraintes qu'entraine, pour un mot, le fait d'être imprimitif.

PROPOSITION 2.4. - Soit f , g , $h \in X^*$ et n , $p \geq 2$ tels que l'on ait les deux conditions

1° $fg^n = h^p$,

2° $(n-1)|g|^{(1)} \geqslant |h|$ *ou* $(np-n-p)|g| \geqslant |f|$.
Alors f , g , h *sont puissances d'un même mot.*

PROPOSITION 2.5 [6]. - *Soit* $f , g , h \in X^*$ *et* $n , p , m \geqslant 2$ *tels que l'on ait* $f^n = g^m n^p$. *Alors* f , g , h *sont puissances d'un même mot.*

2.2. *Deux lemmes techniques.*

Les résultats qui suivent sont utilisés comme lemmes techniques dans la démonstration du théorème.

LEMME 2.6. - *Soit* $f , g \in X^*$ *et* p , p' , q , q' *des entiers positifs ou nuls tels que l'on ait* $\sqrt{f^p g^q} \sim \sqrt{f^{p'} g^{q'}}$. *Alors si*

$$(p+q)(p'+q')(|p-p'|+|q-q'|) \neq 0 ,$$

on a $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

Preuve. - Par hypothèse, il existe $h \in X^*$ et $r , r' \geqslant 0$, tels que l'on ait

(1) $f^p g^q = h^r$ et

(2) $f^{p'} g^{q'} = h^{r'}$.

Il est clair que si l'un des quatre entiers p , p' , q , q' est nul, alors les trois mots f , g , h sont puissances d'un même mot. En éliminant les cas où une application directe des propositions 2.4. ou 2.5. donne le résultat, trois cas sont à envisager.

1er cas : $f^p g^q = f^{p'} g^{q'}$. On peut toujours supposer $p < p'$, c'est-à-dire $q' < q$. Il vient $f^{p'-p} = g^{q-q'}$, ce qui entraine $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$ en vertu de la proposition 2.2.

2e cas : $1 < r < r'$. Quatre sous-cas sont à considérer.

(i) $q = q' = 1$ et par conséquent $p < p'$. Remplaçons $f^p g$ par h^r dans (2). On obtient $f^{p'-p} = h^{r'-r}$, c'est-à-dire $\sqrt{f} \sim \sqrt{h}$ ou encore $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

(ii) $p = p' = 1$. Ce cas se traite essentiellement comme le précédent.

(iii) $q = p' = 1$. Si $h = 1$, alors $f = g = 1$ et l'on a $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$. Supposons donc $h \neq 1$. Comme $p > 0$ on a $|fg| \leqslant |f^p g| < |fg^{q'}|$, c'est-à-dire $q' > 1$.

Si $p = 1$, alors en reportant $fg = h^r$ dans (2), on obtient $g^{q'-1} = h^{r'-r}$ donc $\sqrt{g} \sim \sqrt{h}$ et finalement $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

Si $p > 1$, alors $(p-1)|f| < |h|$ entraine $|fg| > (r-1)|h|$, et $(q'-1)|g| < |h|$ entraine $|fg| > (r'-1)|h|$. On obtient finalement les inégalités $(r-1)|h| < |fg| \leqslant 2|h|$, et $(r'-1)|h| < |fg| \leqslant 2|h|$, ce qui implique $r = r' = 2$, en contradiction avec l'hypothèse $r < r'$.

(iv) $q' = p = 1$. Ce cas se traite essentiellement comme le précédent.

---

(1) $|g|$ désigne la longueur de g .

3e cas : $r = 1 < r'$. On peut supposer $p' = 1$. La deuxième équation donne $|fg| < |h|$, ce qui contredit la première.

LEMME 2.7 [1]. - Soit f_1 , g_1 , h_1 , f_2 , g_2 , $h_2 \in X^*$, et supposons que pour quatre valeurs distinctes de l'entier n on ait $\sqrt{g_1 \, f_1^n \, h_1} \sim \sqrt{g_2 \, f_2^n \, h_2}$. Alors l'une des trois situations suivantes a lieu

1° $g_1 \, f_1 \, h_1 = 1$ ou $g_2 \, f_2 \, h_2 = 1$,

2° Il existe u , $v \in X^*$ et $p \geqslant 0$ tels que l'on ait

$$f_1 = uv \; , \quad f_2 = vu \quad \text{et} \begin{cases} g_1 = g_2 \, f_2^p \, v \quad \text{et} \quad h_2 = vf_1^p \, h_1 \\ \text{ou} \\ g_2 = g_1 \, f_1^n \, u \quad \text{et} \quad h_1 = uf_2^p \, h_2 \, . \end{cases}$$

3° Il existe $u \in X^*$ tel que l'on ait

$$g_1 \sqrt{f_1} = ug_1 \; , \quad g_2 \sqrt{f_2} = ug_2 \; , \quad \sqrt{f_1} \, h_1 = h_1 \, u \quad \text{et} \quad \sqrt{f_2} \, h_2 = h_2 \, u \, .$$

3. Applications séquentielles.

3.1. Tranducteurs unilatères.

Un transducteur unilatère gauche (resp. droit) T est constitué de

- trois ensembles finis non vides Q , X , Y respectivement appelés ensemble des états, alphabet d'entrée et alphabet de sortie,
- un état initial $q_0 \in Q$,
- deux actions $\mu : Q \times X \longrightarrow Q$ (resp. $X \times Q \longrightarrow Q$) et $\bar{\theta} : Q \times X \longrightarrow Y^*$ (resp. $X \times Q \longrightarrow Y^*$) appelées fonction de transition et fonction de production, et que l'on étend de manière classique à $Q \times X^*$ (resp. $X^* \times Q$) par récurrence sur la longueur des mots : $\forall \, q \in Q$, $\mu(q \, , 1) = q$ (resp. $(1 \, , q)\mu = q$) et $\bar{\theta}(q \, , 1) = 1$ (resp. $(1 \, , q)\bar{\theta} = 1$), $\forall \, q \in Q$, $\forall \, f \in X^*$, $\forall \, x \in X$, $\mu(q \, , fx) = \mu(\mu(q \, , f) \, , x)$ (resp. $(xf \, , q)\mu = (x \, , (f \, , q)\mu)\mu$) et $\bar{\theta}(q \, , fx) = \bar{\theta}(q \, , f)\bar{\theta}(\mu(q \, , f) \, , x)$ (resp. $(xf \, , q)\bar{\theta} = (x \, , (f \, , q)\mu)\bar{\theta}(f \, , q)\bar{\theta})$.

Comme il est coutume de le faire nous écrirons $q.f$ (resp. $f.q$) au lieu de $\mu(q \, , f)$ (resp. $(f \, , q)\mu$).

Un tranducteur unilatère gauche (resp. droit) est minimal s'il vérifie les deux conditions suivantes.

$\mathcal{U}_a$: $\forall \, q \in Q$, $\exists \, f \in X^*$, $q_0.f = q$ (resp. $f.q_0 = q$).

$\mathcal{U}_r$: $\forall \, q \, , q' \in Q$, $q \neq q' \Longrightarrow \exists \, f \in X^*$, $\bar{\theta}(q \, , f) \neq \bar{\theta}(q' \, , f)$ (resp. $(f \, , q)\bar{\theta} \neq (f \, , q')\bar{\theta}$).

3.2. Applications séquentielles.

Un transducteur unilatère gauche (resp. droit) T définit une application θ_T de X^* dans Y^* de la façon suivante. Pour tout $f \in X^*$, $\theta_T(f) = \bar{\theta}(q_0 \, , f)$ (resp. $(f)\theta_T = (f \, , q_0)\bar{\theta}$). Nous dirons que T réalise θ_T .

Inversement, nous dirons qu'une application θ de X^* dans Y^* est une application séquentielle gauche (resp. droite) s'il existe un transducteur unilatère gauche (resp. droit) qui la réalise. En particulier, tout morphisme peut être réalisé par un transducteur unilatère gauche ou droit. Nous appellerons biséquentielle toute application qui peut être réalisée par un transducteur unilatère gauche, et par un transducteur unilatère droit.

Lorsque θ est une application séquentielle gauche (resp. droite), nous pouvons associer à tout $f \in X^*$ une application ρ_f (resp. λ_f) de X^* dans Y^* , définie pour tout $h \in X^*$ par $\theta(fh) = \theta(f)\rho_f(h)$ (resp. $(hf)\theta = (h)\lambda_f(f)\theta$). Il est clair que ρ_f (resp. λ_f) est elle-même une application séquentielle gauche (resp. droite) que l'on a $\rho_1 = \theta$ (resp. $\lambda_1 = \theta$), et que pour tout $f , g , h \in X^*$ on a $\rho_f(gh) = \rho_f(g)\rho_{fg}(h)$ (resp. $(hg)\lambda_f = (hg)\lambda_{gf}(g)\lambda_f$).

On sait (cf. [2]) qu'à toute application séquentielle gauche (resp. droite) θ , correspond un transducteur unilatère gauche (resp. droit) T_θ , unique à un isomorphisme près, minimal, qui la réalise. L'ensemble de ses états est l'ensemble $\{\rho_f \; ; \; f \in X^*\}$ (resp. $\{\lambda_f \; ; \; f \in X^*\}$), son état initial est ρ_1 (resp. λ_1), et l'action d'un mot $h \in X^*$ sur l'état ρ_f (resp. λ_f) est définie par ρ_{fh} (resp. λ_{hf}) pour la fonction de transition, et $\rho_f(h)$ (resp. $(h)\lambda_f$) pour la fonction de production.

Si θ est une application séquentielle gauche (resp. droite), et $f \in X^*$ un mot, nous dirons par abus de langage que f est un idempotent si pour tout $h \in X^*$, on a $\rho_{hf^2} = \rho_{hf}$ (resp. $\lambda_{f^2h} = \lambda_{fh}$). Si θ est biséquentielle, nous dirons que f est idempotent s'il est idempotent pour θ considérée comme application séquentielle droite. Rappelons que θ étant une application séquentielle gauche ou droite, ou une application biséquentielle, tout mot $f \in X^*$ a une puissance qui soit un idempotent.

Une application séquentielle gauche (resp. droite) θ sera dite cyclique s'il existe un mot $u \in Y^*$ tel que pour tout mot $f \in X^*$, on ait $\theta(f) \subset u^*$, c'est-à-dire si l'ensemble $\theta(X^*)$ est cyclique.

On dira que l'application séquentielle gauche (resp. droite) θ possède un puits, s'il existe un mot $f \in X^*$ tel que pour tout $h \in X^*$ on ait $\rho_f(h) = 1$ (resp. $(h)\lambda_f = 1$).

3.3. Une caractérisation des morphismes.

Un morphisme est une application séquentielle gauche (resp. droite) particulière. La proposition qui suit, constitue une caractérisation des morphismes dans la classe des applications séquentielles gauches (resp. droites).

PROPOSITION 3.1. - *Soit θ une application séquentielle gauche (resp. droite) de X^* dans Y^* , sans puits, non cyclique. Alors θ est un morphisme si, et seulement si, pour tout idempotent $f \in X^*$, l'ensemble $\{\rho_h(f) \; ; \; h \in X^*\}$ (resp. $\{(f)\lambda_h \; ; \; h \in X^*\}$, est cyclique.*

Preuve. - La condition est evidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

(1) Si la condition est vérifiée pour tout idempotent, elle est vérifiée pour tout mot.

Considérons en effet un mot $f \in X^*$, et soit f^r $(r > 0)$ une puissance de f qui soit un idempotent. Par hypothèse, il existe $u \in YY^*$, tel que pour tout $h \in X^*$ on ait $\sqrt{\rho_h(f^r)} \sim \sqrt{u}$. (Nous ne traitons que le cas des applications gauches).

Si h vérifie $\rho_{hf^r} = \rho_h$, alors on a $\rho_h(f^r) = \rho_h(f)\rho_{hf}(f^{r-1})$ et $\rho_{hf}(f^r) = \rho_{hf}(f^{r-1})\rho_h(f)$, c'est-à-dire $\rho_h(f)\rho_{hf}(f^{r-1}) = \rho_{hf}(f^{r-1})\rho_h(f)$ ou encore $\sqrt{\rho_h(f)} \sim \sqrt{\rho_h(f^r)}$ en vertu de la proposition 2.3. Comme $\rho_h(f)$ est le mot vide si, $\rho_h(f^r)$ est lui-même le mot vide, on a bien $\sqrt{\rho_h(f)} \sim \sqrt{u}$.

Si h est quelconque, alors on calcule $\rho_h(f^{r+1})$ de deux façons différentes. $\rho_h(f^{r+1}) = \rho_h(f)\rho_h(f^r) = \rho_h(f^r)\rho_{hf^r}(f)$. Puisque $\rho_{hf^rf^r} = \rho_{hf^{2r}} = \rho_{hf^r}$, en vertu de ce qui précède, tous les mots qui figurent dans la dernière équation sont puissances d'un même mot, en particulier : $\sqrt{\rho_h(f)} \sim \sqrt{u}$.

(2) Il n'existe pas de mot $f \in X^*$, tel que ρ_f soit cyclique.

En effet, supposons qu'il existe $f \in X^*$ et $u \in YY^*$ tels que pour tout $h \in X^*$ on ait $\sqrt{\rho_f(h)} \sim \sqrt{u}$. Puisque θ n'est pas cyclique, il existe $g \in X^*$ tel que l'on ait $\sqrt{\theta(g)} \not\sim \sqrt{u}$. En vertu de (1), il vient $\rho_f(g) = 1$. Mais θ étant sans puits, il existe $g' \in X^*$, tel que $\rho_{fg}(g') \neq 1$. Alors, en raison du lemme 2.6., on a $\sqrt{\theta(gg')} \not\sim \sqrt{\rho_f(gg')}$ ce qui contredit l'hypothèse.

(3) Pour tout f, $h \in X^*$, on a $\theta(f) = \rho_h(f)$.

Supposons, en effet par l'absurde, qu'il existe f, $h \in X^*$, tels que l'on ait $\theta(f) \neq \rho_h(f)$. Nous pouvons faire l'hypothèse $\theta(f) \neq 1$, le cas $\rho_h(f) \neq 1$ se traitant de la même manière. En vertu du (2), il existe $g \in X^*$, tel que l'on ait $\sqrt{\rho_{hf}(g)} \not\sim \sqrt{\theta(f)}$. Mais alors en vertu du lemme 2.6., on ne peut pas avoir $\sqrt{\theta(fg)} \sim \sqrt{\rho_h(fg)}$ ce qui établit la propriété.

<u>Remarque</u>. – La condition que θ ne possède pas de puits est indispensable. Considérons, en effet, l'application séquentielle gauche θ de $\{x, y\}^*$ dans lui-même, définie pour tout $f \in \{x, y\}^*$ par $\theta(xf) = x$ et $\theta(yf) = y$. Alors θ vérifie bien les conditions de la proposition mais n'est pas un morphisme.

4. Applications biséquentielles.

Cette dernière partie est consacrée à la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction, concernant les applications biséquentielles. Nous établissons d'abord deux lemmes.

LEMME 4.1. – <u>Soit</u> θ <u>une application biséquentielle de</u> X^* <u>dans</u> Y^*, <u>et</u> $f \in X^*$ <u>un idempotent. Alors</u>

(1) <u>pour tout</u> $h \in X^*$, <u>les mots</u> $\rho_{hf}(f)$ <u>et</u> $(f)\lambda_{fh}$ <u>sont conjuguées à</u> $\rho_f(f)$ <u>et</u>

à $(f)\lambda_f$.

(2) si $\rho_f = \theta$ ou $\lambda_f = \theta$, alors pour tout $h \in X^*$ on a $\theta(f) = \rho_{hf}(f) = (f)\lambda_{fh}$.

Preuve.

(1) De l'égalité $\theta(f^2) = \theta(f)\rho_f(f) = (f)\lambda_f(f)\theta = (f^2)\theta$, on déduit que $\rho_f(f)$ et $(f)\lambda_f$ sont conjugués. Il suffit alors de vérifier que, pour tout $h \in X^*$, $\rho_{hf}(f)$ et $(f)\lambda_f$ sont conjugués. Or pour tout entier $n > 0$, on a

$$\theta(hf^n) = \theta(h)\rho_h(f)\rho_{hf}(f)^{n-1} = (h)\lambda_f(f)\lambda_f^{n-1}(f)\theta = (hf^n)\theta ,$$

ce qui implique en particulier $|\rho_{hf}(f)| = |(f)\lambda_f|$, donc en vertu de la proposition 2.7., que $\rho_{hf}(f)$ et $(f)\lambda_f$ sont conjugués.

(2) Si maintenant $\lambda_f = \theta$, alors l'égalité précédente devient

$$\theta(h)\rho_h(f)\rho_{hf}(f)^{n-1} = (h)\lambda_f(f)\lambda_f^n ,$$

ce qui par identification des facteurs droits de longueur $|(f)\lambda_f|$ entraine $\rho_{hf}(f) = (f)\lambda_f = (f)\theta$

COROLLAIRE 4.2. - Soit θ une application biséquentielle de X^* dans Y^* , $f \in X^*$ un mot et $n > 0$ un entier tels que $\rho_{f^n} = \theta$. Alors pour tout $r \geqslant 0$ on a $\sqrt{\theta(f^n)} \sim \sqrt{\rho_{f^r}(f)}$.

Preuve. - Soit $k > 0$ un entier, tel que $f^{k.n}$ soit idempotent. Si $\theta(f^{k.n}) = 1$, alors on a evidemment $\rho_{f^r}(f) = 1$. Supposons donc $\theta(f^{k.n}) = 1$. En vertu du lemme précédent nous avons

$$\theta(f^{k.n}) = \rho_{f^r}(f^{k.n}) = \rho_{f^{r+1}}(f^{k.n}) ,$$

c'est-à-dire

$$\rho_{f^r}(f)\rho_{f^{r+1}}(f^{k.n-1}) = \rho_{f^{r+1}}(f^{k.n-1})\rho_{f^r}(f) ,$$

ce qui signifie bien $\sqrt{\theta(f^{k.n})} \sim \sqrt{\rho_{f^r}(f)}$ d'après la proposition 2.3., et achève la démonstration.

LEMME 4.3. - Soit θ une application biséquentielle de X^* dans Y^* , telle que pour tout idempotent $f \in X^*$, on ait $\rho_f = \theta$, et soit $h \in X^*$. Si l'ensemble $\{\theta(g) \ ; \ \rho_{hg} = \rho_h\}$ est cyclique, alors θ est elle-même cyclique.

Preuve. - Supposons qu'il existe $u \in Y^*$, tel que pour tout $g \in X^*$, $\rho_{hg} = \rho_h$ entraine $\theta(g) \in u^*$. Soient $f \in X^*$, f^r une puissance qui soit un idempotent. Il existe $k \in X^*$ tel que pour tout $p > 0$, on ait $\rho_{hf^p.r_k} = \rho_h$. On a donc $\theta(f^p)^r\theta(k) \in u^*$, ou encore en vertu de la proposition 2.4., $\theta(f^r) \in u^*$.
Mais $\theta(f^r) = 1$ entraine $\theta(f) = 1$, et $\theta(f^r) \neq 1$ entraine, d'après le corollaire précédent, $\sqrt{\theta(f)} \sim \sqrt{\theta(f^r)}$, ou encore $\sqrt{\theta(f)} \sim \sqrt{u}$.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.4. - Soit θ une application biséquentielle de X^* dans Y^*, non cyclique telle que pour tout idempotent $f \in X^*$ on ait $\rho_f = \theta$. Alors θ est un morphisme.

Preuve.-En vertu de la proposition 3.1., il suffit de montrer que pour tout idempotent $f \in X^*$, l'ensemble $\{\rho_h(f) \ ; \ h \in X^*\}$ est cyclique.

Supposons d'abord $\theta(f) \neq 1$. En vertu du corollaire 4.2., pour tout entier $n > 0$, et tout $h \in X^*$, les mots $\theta(f^n h) = \theta(f)^n \theta(h)$ et $\rho_{f^n h}(f^n h) = \rho_h(f)\rho_{hf}(f)^{n-1}\rho_{hf}(h)$ sont puissances d'un même mot. Or $\theta(f)$ et $\rho_{hf}(f)$ sont égaux en raison du lemme 4.1., ce qui, par application du lemme 2.7., entraine que $\rho_h(f)$ et $\theta(f)$ sont puissances d'un même mot.

Reste le cas $\theta(f) = 1$. Soit $g \in X^*$ un idempotent, et $k \in X^*$ tels que l'on ait $\rho_{hfg} = \rho_{hf}$ et $\rho_{hfgk} = \rho_h$. Pour tout $n > 0$, soit $(fg^n k)^p$ une puissance qui soit un idempotent. En vertu de la proposition 4.1. et de son corollaire, les mots

$$\theta(fg^n k) = \theta(g)^n \theta(k) \ , \quad \rho_h(fg^n k) = \rho_h(f)\rho_{hf}(g)^n \rho_{hfg}(k) \quad \text{et} \quad \theta(fg^n k)^p$$

sont puissances d'un même mot. Comme on a $\theta(g) = \rho_{hf}(g)$, puisque g est idempotent et que $\rho_{hfg} = \rho_{hf}$, le lemme 2.7. entraine $\sqrt{\rho_h(f)} \sim \sqrt{\theta(g)}$. Or le lemme précédent montre qu'il existe $g' \in X^*$ vérifiant les mêmes conditions que g, et tel que $\sqrt{\theta(g')} \not\sim \sqrt{\theta(g)}$. Alors $\sqrt{\rho_h(f)} \sim \sqrt{\theta(g')}$ entraine $\rho_h(f) = 1$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOFFRUT (C.). - Transducteurs conservant l'imprimitivité du langage d'entrée, "Automata languages and programming", p. 13-29. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1973.

[2] EILENBERG (S.). - Automata, languages and machines, Vol. A. - New York, Academic Press, 1974 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 59-A).

[3] GINSBURG (S.). - The mathematical theory of context-free languages. - New York, Mc Graw-Hill publishing Company, 1966.

[4] LENTIN (A.). - Equations dans les monoïdes libres. - Paris, Gauthier-Villars, 1972 (Mathématiques et Sciences de l'Homme, 20).

[5] LENTIN (A.) and SCHÜTZENBERGER (M. P.). - A combinatorial problem in the theory of free monoïds, "Combinatorial mathematics and its applications, Proceeding of the conference held at Chapel Hill, 1967", p. 128-144. - Chapel Hill, University of North Carolina Press, 1969.

[6] LYNDON (R. C.) and SCHÜTZENBERGER (M. P.). - The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group, Michigan math. J., t. 9, 1962, p. 289-298.

[7] NIVAT (M.). - Transductions des langages de Chomsky, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 18, 1968, fasc. 1, p. 339-445.

[8] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Sur les relations rationnelles fonctionnelles entre monoïdes libres, Theor. Computer Science (à paraître).

Christian CHOFFRUT
Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05.