Thérèse Merlier

**Sur une généralisation des demi-groupes nilpotents**

*Groupe d'étude d'algèbre*, tome 1 (1975-1976), exp. n° 11, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A11_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 11, 3 p.



27 mai 1976

# SUR UNE GÉNÉRALISATION DES DEMI-GROUPES NILPOTENTS

par Thérèse MERLIER

## Introduction.

La structure des demi-groupes $S$ qui ne sont pas globalement idempotents (i. e. $S \neq S^2$) est en général mal connue ; ces demi-groupes ne peuvent, en effet, être ni des demi-groupes réguliers, ni des monoïdes, ni des bandes, ni des demi-groupes simples, etc. Toutefois, leur importance est grande, puisque de nombreux théorèmes, dans des directions diverses, les font intervenir (par exemple, cf. [3]), tout demi-groupe fini est produit sous-direct de demi-groupes nilpotents et de demi-groupes complètement 0-simples. De même (cf. [2]), le demi-groupe syntactique $M$ d'un code bipréfixe n'est pas globalement idempotent, puisque pour un certain entier $n$, $M^n$ est l'idéal minimal de $M$ (cette propriété est d'ailleurs caractéristique des codes bipréfixes).

Les demi-groupes nilpotents $(S^n = 0)$ sont évidemment la famille la plus caractéristique des demi-groupes non globalement idempotents.

Aucune démonstration ne sera donnée ici (Pour les démonstrations, nous renvoyons à notre thèse, [1] chapitre 1 et 2).

## 1. Demi-groupes nilpotents

Énonçons quelques propriétés de ces demi-groupes.

THÉORÈME 1.1. - *Un demi-groupe $S$ est nilpotent si, et seulement si, $S$ admet au plus un idempotent, et si $S$ admet une chaîne d'idéaux bilatères, qui est une chaîne maximale de l'ensemble des parties de $S$, $\mathcal{P}(S)$, ayant pour éléments particuliers $S, S^2, \ldots, S^n, \ldots$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.*

THÉORÈME 1.2. - *Un demi-groupe $S$ fini, ayant $n$ éléments, est un demi-groupe nilpotent si, et seulement si, $S$ admet au plus un idempotent, et si le treillis des idéaux de $S$ est de longueur $n$.*

Ces résultats reposent sur le fait que dans un demi-groupe nilpotent, si $I$ et $J$ sont deux idéaux (d'un côté) tels que $I \subset J$, alors il existe $x \in J \setminus I$, tel que $I \cup \{x\}$ est idéal (du même côté) de $S$. Et de plus, si $I$ est un idéal non vide d'un demi-groupe nilpotent, il existe $x \in I$ tel que $I - \{x\}$ est aussi un idéal de $S$.

## 2. Demi-groupes de profondeur gauche (ou droite) finie.

Définition 2.1. - Un demi-groupe $S$ est de profondeur gauche finie, s'il existe un entier $n$ tel que $S^n$ est un idéal 0-minimal à gauche.

Désignons par $E^*$ l'ensemble des idempotents (non nuls) de $S$, demi-groupe (avec zéro).

PROPOSITION 2.2. - Soit $S$ un demi-groupe de profondeur gauche finie dont l'ensemble $E^*$ des idempotents non nuls est non vide. Alors il y a équivalence entre

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & ex = 0 ,\\ (b) & xe = 0 ,\\ (c) & x^n = 0 .\end{array}\right\} \forall e \in E^*, \quad \forall x \in S .$$

Cette proposition nous permet de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 2.3. - Un demi-groupe $S$ de profondeur gauche finie, dont l'ensemble $E^*$ des idempotents non nuls est non vide, et vérifie

$$\forall x \in S , \forall e \in E^* , \forall f \in E^* , \quad xe = xf ,$$

est produit sous-direct de $N \times (G \times E)^0$, où $N$ est un demi-groupe nilpotent, $G$ un groupe, $E$ un zéro demi-groupe à gauche.

De plus, tout demi-groupe $S$ de profondeur gauche finie, dont l'ensemble $E^*$ des idempotents non nuls vérifie la condition précédente s'obtient de cette facon.

Exemples de demi-groupe de profondeur gauche finie. - Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ un ensemble formé de 5 éléments. Et soient $x_1$ et $y_1$ deux transformations de $X$ données par les tableaux suivants

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Le demi-groupe $S$ engendré par $x_1$ et $y_1$, sous-demi-groupe de $X^X$, est de profondeur gauche finie, et vérifie les conditions du théorème précédent. $S$ est produit sous-direct de $S^2 \times S/S^2$.

Par contre, les transformations $x_1$ et $y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ engendrent bien, elles aussi, un demi-groupe de profondeur gauche finie, $M$. On a $M^3$ idéal 0-minimal à gauche, mais $M$ n'est pas produit sous-direct de $M^3 \times M/M^3$. En effet, $x_1^2$ et $y_2\, x_1$ sont des idempotents non nuls, mais l'on a

$$x_1\, x_1^2 \neq x_1\, y_2\, x_1 .$$

Remarque. - Les conditions (a), (b), (c) de la proposition 2.2 ne sont pas équivalentes dans un demi-groupe de profondeur finie. Le lecteur trouvera un exemple dans [1].

## 3. Demi-groupes $G^0$-potents.

Définition 3.1. - Un demi-groupe avec zéro, $S$, est dit $G^0$-potent, s'il existe un entier $n$ tel que $S^n$ est un groupe avec zéro $G^0$.

COROLLAIRE 3.2. - <u>Un demi-groupe $G^0$-potent est de profondeur gauche finie.</u>

COROLLAIRE 3.3. - <u>Un demi-groupe est $G^0$-potent si, et seulement si, il est produit sous-direct du produit direct d'un groupe avec zéro, par un demi-groupe nilpotent.</u>

PROPOSITION 3.4. - <u>Soit $S$ le semi-groupe multiplicatif d'un anneau $R$. $S$ est $G^0$-potent si, et seulement si, l'une des puissances de l'anneau $R$ est un corps.</u>

Dans ce cas, l'anneau $R$ est isomorphe au produit direct d'un corps et d'un anneau nilpotent, et $S$ au produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe nilpotent.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] MERLIER (Th.). - Relations d'ordre et structures associatives, Thèse Univ. Paris Sud, 1976 (à paraître).

[2] PERRIN (D.). - Codes bipréfixes et groupes de permutations, Thèse Univ. Paris VII, 1975.

[3] RHODES (J.) and KHROHN (K.) [Contributors]. - Algebraic theory of machines, languages and semigroups. Edited by M. Arbib. - New York and London, Academic Press, 1968.

Thérèse MERLIER
Résidence Gascogne
105 rue Boucicaut
92260 FONTENAY AUX ROSES