HA HUY KHOAI

Sur la théorie de Nevanlinna p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15 (1987-1988), p. 35-40
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1987-1988__15__35_0>

Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique
1987-1988

SUR LA THEORIE DE NEVANLINNA p-ADIQUE

par Ha Huy Khoai

§1. Dans cet exposé nous proposons une variation p-adique de la théorie de Nevanlinna. Tout d'abord nous rappelons ici quelques résultats de la théorie de Nevanlinna classique. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan complexe $\mathbf{C}$ et soit $a\in\mathbf{C}$ un nombre complexe.

<u>Question</u> : Quelle-est "la taille" de l'ensemble des points $z\in\mathbf{C}$ où la fonction $f(z)$ prend la valeur a ou des valeurs "proches" de a?

Pour répondre à cette question R. Nevanlinna a construit la fonction suivante.

Soit $n(f,a,r)$ le nombre de points $z\in\mathbf{C}$ tels que $f(z) = a$ et $|z| \leq r$ (chaque point z étant compté avec sa multiplicité). On pose

$$N(f,a,r) = \int_o^r \frac{n(f,a,t) - n(f,a,o)}{t}\, dt+n(f,a,o) \log r$$

$$m(f,ar) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}\, d\varphi, \text{ où } \log^+x = \max\{\log x, o\}$$

$$T(f,a,r) = N(f,a,r) + m(f,a,r)$$

<u>Théorème</u> (premier théorème fondamental de Nevanlinna). Il existe une fonction $T(f,r)$ telle que pour tout $a\in\mathbf{C}$ on ait

$$T(f,a,r) = T(f,r) + h(f,a,r)$$

où $h(f,a,r)$ est une fonction bornée.

Comme la fonction $T(f,r)$ ne dépend pas de a et la fonction h est bornée on peut dire que la fonction $f(z)$ prend chaque valeur a avec "une même multiplicité".

Le deuxième théorème fondamental montre qu'en général, $m(f,a,r)$ est petit par rapport à $T(f,r)$, et en conséquence $N(f,a,r)$ approche $T(f,a)$. En particulier on définit "le défaut de la valeur a" suivant :

$$\delta(a) = \underset{r\to\infty}{\underline{\lim}} \frac{m(f,a,r)}{T(f,r)} = 1-\overline{\lim} \frac{N(f,a,r)}{T(f,r)}$$

Alors l'ensemble des points a tels que $\delta(a) > 0$ est dénombrable et on a

$$\sum_{a\in\mathbf{P}^1} \delta(a) \leq 2$$

La fonction $T(f,r)$ est dite "fonction caractéristique".

§2. Pour construire l'analogue p-adique de la fonction caractéristique de Nevanlinna on utilise la notion de polygôme de Newton des fonctions analytiques p-adiques.

Soit p un nombre premier, soit $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et soit $\mathbf{C}_p$ la complétion de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Soit D le disque unité dans $\mathbf{C}_p$: $D = \{z \mid |z| < 1\}$. La valeur absolue de $\mathbf{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Nous utilisons aussi la notation $v(z)$ pour la valuation additive de $\mathbf{C}_p$ qui prolonge ord_p

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans D représentée par la suite convergente :

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$$

Pour chaque n nous construisons le graphe Γ_n qui décrit $v(a_n z^n)$ comme fonction de $v(z)$. Soit $v(f,t)$ le bord de l'intersection des demi-plans situés sous les droites Γ_n .Alors dans chaque segement fini $[r,s], o<r<s<+\infty$ il existe qu'un nombre fini de Γ_n qui interviennent dans $v(f,t)$. D'où on déduit que $v(f,t)$ est une ligne polygônale qui s'appelle le polygône de Newton de la fonction $f(z)$. Nous appellerons le point $t>o$ où $v(f,t)$ est un sommet les points critiques de $f(z)$. Chaque segment fini $[r,s]$ ne contient qu'un nombre fini de points critiques de $f(z)$. On sait que si $t = v(z)$ n'est pas un point critique de $f(z)$ alors $|f(z)| = p^{-v(f,t)}$.
Maintenant soit $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ une fonction méromorphe dans D. On pose

$$v(\varphi,t) = v(f,t) = v(f,t) - v(g,t)$$

Il est clair que si t n'est ni un point critique de $f(z)$, ni de $g(z)$, alors $|\varphi(z)| = p^{-v(\varphi,t)}$. Nous appelons un point $t > 0$ un point critique de $\varphi(z)$ s'il est un point critique d'au moins une des fonctions $f(z)$, $g(z)$.

<u>Fonction $T(\varphi,a,t)$</u>. Soit a un point de $\mathbf{C}_p$. On notera $n(\varphi,t,a)$ le nombre de points $z\in D$ tels que $v(z) = t$ et $\varphi(z) = a$, où chaque point est compté avec sa multiplicité. On pose

$$T(\varphi,a,t) = \sum_{s>t} n(\varphi,a,s)(s-t) + v^{+}(\varphi-a,t)$$

où $v^{+}(f,t) = \max\{v(f,t),o\}$.

Remarquons que si φ n'est pas la constante a, alors la somme dans le membre à droite est une somme finie pour chaque $t > o$, parce que $n(\varphi, a, s) > o$ seulement aux points critiques s de la fonction $f(z)-ag(z)$ et que le nombre de ces points est fini dans la région $v(z) > t > o$.

Nous appelons la fonction $T(\varphi, a, t)$ la fonction caractéristique de la fonction $\varphi(z)$.

§3. Analogue p-adique du premier théorème de Nevanlinna.

Théorème 1. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans D. Alors on a pour tout $a \in \mathbb{C}_p$

$$T(\varphi, a, t) = T(\varphi, t) + h(\varphi, a, t)$$

où la fonction $h(\varphi, a, t)$ est bornée.

Le théorème 1 se démontre de façon analogue au cas classique, où l'on pose

$$T(\varphi, t) = N(\varphi, t) + m(\varphi, t)$$

$$N(\varphi, t) = \sum_{i=1}^{P} \{v(b_i)-t\},$$

où $b_1, \ldots, b_P$ sont les pôles (avec leurs multiplicités) de $\varphi(z)$ dans $\{v(z) > t\}$ et $m = v^+(1/_\varphi, t) = \max\{v(1/_\varphi, t), o\}$. Alors le théorème 1 est la conséquence du lemme de Jensen.

Lemme de Jensen. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans D, soient $a_1, \ldots a_N$ et $b_1, \ldots, b_P$ les zéros et les pôles (comptés avec leurs multiplicités) de la fonction $\varphi(z)$ dans $\{v(z) > t\}$ et supposons $\varphi(o) \neq o, \infty$. Alors on a

$$\log_p |\varphi(o) + v(\varphi, t) = (N-P)t + \sum_{i=1}^{N} v(a_i) - \sum_{i=1}^{P} v(b_i)$$

La démonstration du lemme est basée sur les propriétés du polygône de Newton de la fonction $\varphi(z)$.

§4. Analogue p-adique du second théorème de Nevanlinna.

On pose

$$\bar{N}(1/_{\varphi-a}, t) = \sum_i \{v(a_i)-t\}$$

où les a_i sont les zéros distincts de $\varphi(z) - a$ dans $\{v(z) > t\}$.

$$\delta(a) = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{m(1/_{\varphi-a}, t)}{T(\varphi, t)} = 1- \overline{\lim} \frac{N(1/_{\varphi-a}, t)}{T(\varphi, t)}$$

$$\theta(a) = 1 - \overline{\lim}_{t\to o} \frac{N(1/_{\varphi-a}, t)}{T(\varphi, t)}$$

$$\theta(a) = \lim_{t\to o} \frac{N(1/_{\varphi-a},t)-\bar{N}(1/_{\varphi-a},t)}{T(\varphi,t)}$$

<u>Théorème 2</u>. L'ensemble des valeurs a tels que $\theta(a) > o$ est dénombrable et on a :

$$\sum_a (\delta(a)+\theta(a)) \le \sum_a \theta(a) \le 2$$

Comme le cas classique le théorème 2 est la conséquence de "l'inégalité principale" suivante :

<u>Lemme</u>. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe non constante dans $\{u(z)>t\}$, $a_1,\ldots,a_q$ sont des nombres distincts de $\mathbb{C}_p$. Alors on a

$$m(\varphi,t) + \sum_{i=1}^{q} m(\frac{1}{\varphi-a_i},t) \le 2T(\varphi,t) - N_1(t) + S(t)$$

où $N_1(t)$ est une fonction positive et $S(t)$ est bornée quand $t \to o$.

Comme le cas classique nous obtenons aussi le théorème de Picard, le théorème des deux points pour les fonctions méromorphes. En particulier dans le cas p-adique on peut construire la fonction méromorphe par les ensembles $E_a(\varphi) = \{z\in D, \varphi(z) = a\}$ donnés pour trois valeurs distinctes $a\in\mathbb{C}_p$. L'algorithme de construction est basé sur les résultats de M. Lazard ([16]) et le théorème d'interpolation p-adique ([2]).On peut trouver les démonstrations des résultats précédents dans [1-4], [7].

§5. <u>Commentaire</u>. Dans [1] j'ai défini la fonction caractéristique suivante

$$T(\varphi,a,t) = \sum_{s<t} n(\varphi,a,s)s+v(\varphi-a,t).$$

Il est difficile de démontrer l'analogue du théorème 1 et je n'ai pas démontré l'analogue du théorème 2. Quand j'ai modifié la définition de la fonction caractéristique (comme celle de cet exposé), il est devenu facile de démontrer les résultats analogues à la théorie classique et mon intérêt pour la théorie de Nevanlinna p-adique est perdu ! Maintenant je pense qu'il était intéressant de construire une analogue p-adique de la théorie de Griffiths, King, Carlson, Stoll,..., c'est-à-dire, la théorie de Nevelinna de grande dimension, parce que cette théorie contiendrait beaucoup d'interprétations géométriques et aurait des relations intéressantes avec la théorie des nombres. Il est nécessaire de rappeler ici quelques résultats de la "théorie de Nevanlinna arithmétique" : Reyssat a remarqué l'analogie des théorèmes de Siegel et de Picard.

Théorème de Siegel. Soit k un corps de nombres, $\mathcal{O}_k^*$ le groupe des unités. Alors l'équation u+v = 1 n'a qu'un nombre fini de solutions $u, v \in \mathcal{O}_k^*$.

Théorème de Picard L'équation u+v = 1 n'a pas de solutions en fonctions entières inversibles.

Alors on peut faire la "traduction" de la théorie de Nevanlinna à l'arithmétique. Ensuite P. Vojta a noté que l'on peut voir la formule de Jensen sous la forme suivante :

Soit R un nombre réel fixé, $\overline{D}_R$ un disque fermé. On notera $F = \mathrm{Mer}(\overline{D}_R)$ le corps des fonctions méromorphes dans $\overline{D}_R$. Soit $\theta \in [o, 2\pi]$.
Alors considérons les valuations

$$v_\theta(f) = -\log|f(Re^{i\theta})|$$

Soit $a \in D_R$, on pose

$$v_a(f) = \begin{cases} (\mathrm{ord}_a f)\log\left|\frac{R}{a}\right|, a \neq o \\ (\mathrm{ord}_a f) \log R, a = o \end{cases}$$

Alors la formule de Jensen prend la forme suivante

$$\sum_{a \in D_R} v_a(f) + \int_o^{2\pi} v_\theta(f) \frac{d\theta}{2\pi} = -\log|c_f|$$

Donc on voit que la formule de Jensen est l'analogue de la formule du produit de Artin-Whaples et le second théorème fondamental est l'analogue de Artin-Whaples et le second théorème fondamental est l'analogue du théorème de Roth :

Au lieu de fonction méromorphe on considère une suite infinie $\{b\} \subset k$ dans un corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] < \infty$. On définit la hauteur :

$$m(a,b) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \text{ archimed}} \log^+ \frac{1}{\|b-a\|_v}$$

$$N(a,b) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_v \log^+\|b\|_v$$

Alors pour tout $a \in k$

$$N(a,b) + m(a,b) = h(b) + O(1)$$

$$\sum_v \log\|b\|_v = o \qquad \text{formule du produit}$$

Si on pose $\delta(a) = \underline{\lim} \frac{m(a,b)}{h(b)}$, alors

$$\sum \delta(a) \leq 2 \text{ (Théorème de Roth).}$$

P. Vojta propose une "variation arithmétique" de la théorie de Griffiths et il a énoncé quelques conjectures très agréables. En particulier, d'une de ses conjectures il suit la conjecture "abc", et d'où, "le théorème de Fermat" ([8].

D'après la philosophie du principe de Hasse-Minkowski on espère avoir un résultat "arithmétique" si on en a un dans les cas p-adiqus pour tout p et le cas réel. Alors on doit, peut-être, vérifier les conjectures de Vojta tout d'abord dans le cas p-adique, et même dans le cas réel ? (Mais qu'est-ce qu'une théorie de Nevanlinna réelle ?)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hà Huy Khoai. On p-adic meromorphic functions. Duke Math. J., Vol 50 (1983), 695-711.

[2] Hà Huy Khoai. p-adic Interpolation and continuation of p-adic functions. Springer Lecture Notes in Math., N° 1013 (1983).

[3] Hà Huy Khoai. On p-adic Interpolation. AMS translation Soviet Math. Notes, N°26, 1979, Vol.1.

[4] Hà Huy Khoai and My Vinh Quang. On p-adic-Nevanlinna theory. Proceedings of the 13^{th} Rolf Nevanlinna Colloquium, Joensuu, Finland 1987L. Springer Lecture Notes in Math, N°

[5] S. Lang. Introduction to complex hyperbolic spaces. Springer, 1986.

[6] M. Lazard. Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Publications Math. IHES, N°14.

[7] My Vinh Quang. Some applications of p-adic Nevanlinna theory. Acta Math. Vietnamica, 1988.

[8] J. Oesterlé. Nouveaux approches au "théorème de Fermat". Séminaire Bourbaki, Fév. 1988.

[9] Reyssat. Analogue arithmétique de la théorie de Nevanlinna. Séminaire d'Analyse complexe IHP, Janvier 1988.

[10] P. Vojta. Diophantine approximations and Value distribution Theory. Springer Lecture Notes in Math, N° 1239, 1987.

Ha Huy KHOAI
Institute of Mathematics
P.O. Box 631 Bo Ho
HANOI-VIETNAM