GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

HA HUY KHOAI

Sur le théorème de Morera p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15 (1987-1988), p. 29-34
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1987-1988__15__29_0>

Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique
1987-1988

SUR LE THEOREME DE MORERA p-ADIQUE

par Ha Huy KHOAI

L'analogue p-adique de l'intégrale sur une courbe a été construit par Schnirelman en 1938. L'intégrale de Schnirelamn est utilisée dans l'étude des nombres transcendants (voir W. Adams [1], J. Coates [2], T.N. Shorey [5], R. Tijdeman [6]) et pour construire l'analogue p-adique de la théorie spectrale (voir M. Vishik [7]). Dans ces articles on considère l'intégrale Krasner. Dans cet exposé nous considérons l'intégrale de Schnirelman de fonctions non-nécessairement analytiques au sens de Krasner et nous cherchons un analogue p-adique du théorème de Morera.

En analyse p-adique nous avons quelques notions de fonctions analytiques : les fonctions analytiques au sens de Krasner, les fonctions localement analytiques. Ce sont les analogues de notion de fonctions analytiques complexes. Mais dans le cas complexe nous avons encore une notion bien connue de fonctions analytiques : ce sont les fonctions dont les intégrales sur les cycles sont nulles (théorème de Morera). Nous choisirons ici l'intégrale de Schnirelman comme analogue de l'intégrale de Cauchy et montrons que les fonctions p-adiques dont les intégrales de Schnirelman sont nulles ont plusieurs propriétés analogues à celles des fonctions analytiques. L'intégrale de Schnirelman est, peut-être, un bon candidat pour la construction d'une nouvelle notion de fonctions analytiques p-adiques.

§1. INTEGRALE DE SCHNIRELMAN

Nous rappelons ici quelques propriétés de l'intégrale de Schnirelman des fonctions analytiques. Soit p un nombre premier, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{C}_p$, resp., l'anneau des entiers p-adiques, le corps des nombres p-adiques, la complétion de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. La valeur absolue de $\mathbf{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soit D un domaine de $\mathbf{C}_p$. On notera

$$B^+(a,r) = \{z\in\mathbf{C}_p,\ |z-a| \le r\}$$
$$B^-(a,r) = \{z\in\mathbf{C}_p,\ |z-a| < r\}$$
$$C(a,r) = \{z\in\mathbf{C}_p,\ |z-a| = r\}$$

Définition 1.1. On dit que la fonction $f(z)$ donnée dans un domaine D est intégrable au sens de Schnirelman si pour tout $a\in D$ et $\gamma\in \mathbf{C}_p$ tels que $B^{+}(a,|\gamma|) \subset D$ la limite suivante existe =

$$I_{a,\gamma}(f) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ (m,p)=1}} \frac{1}{m} \sum_{\xi^m=1} f(a+\xi\gamma)$$

Dans ce cas $I_{a,\gamma}(f)$ est appelée l'intégrale de Schnierelman de la fonction $f(z)$ par rapport a γ. On notera

$$I_{a,\gamma}(f) = \int_{a,\gamma} f(z)dz.$$

Théorème 1.2. (Schnirelman). Pour une fonction $f(z)$ analytique au sens de Krasner dans D et pour tout $a,\gamma\in \mathbf{C}_p$ tels que $B^{+}(a,|\gamma|) \subset D$ on a

$$\int_{a,\gamma} f(z)(z-a)dz = 0$$

Théorème 1.3. (Schnirelman). Soit $f(z)$ une fonction analytique au sens de Krasner dans D et $a,\gamma\in \mathbf{C}_p$ tels que $B^{+}(a,|\gamma|) \subset D$. Alors on a

$$\int_{a,\gamma} \frac{f(z)(z-a)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in B^{-}(a,|\gamma|) \\ 0 & \text{si } x\notin B^{+}(a,|\gamma|) \end{cases}$$

Pour les autres propriétés de l'intégrale de Schnirelman voir [3].

§2. LA CLASSE $\mathcal{S}(D)$.

Définition 2.1. On dit qu'une fonction $f(z)$ est de la classe $\mathcal{S}(D)$ si et seulement si pour tout a, $\gamma\in \mathbf{C}_p$ tels que $B^{+}(a,|\gamma| \subset D$ on a

(1) $$\int_{a,\gamma} f(z)(z-a)dz = 0$$

Remarque. 1) Si on note $\mathcal{K}(D)$ l'espace de fonctions analytiques au sens de Krasner dans D, alors $\mathcal{K}(D) \subset \mathcal{S}(D)$.

2) La propriété "appartenir à la classe $\mathcal{S}(D)$" est une propriété globale, et il est naturel qu'il existe des fonctions localement analytiques qui n'appartiennent pas à la classe $\mathcal{S}(D)$.

Par exemple, considérons la fonction suivante :

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq |z| < 2 \end{cases}$$

Alors $f(z) \notin \mathcal{S}(B^{-}(0,2))$. En effet, en choisissant $a = 1$, $\gamma = -1$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ (n;p)=1}} f(a+\xi\gamma)\xi\gamma = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ (n,p)=1}} f(1-\xi)(-\xi)$$

Il est facile de montrer que si $\xi^n = 1$, $(n,p) = 1$ et $\xi \neq 1$ alors $|1-\xi|=1$ alors $|1-\xi|=1$ et donc $f(1-\xi) = 1$. On obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ (n,p)=1}} f(1-\xi)(-\xi) = \frac{1}{n}$$

Ainsi, il n'existe pas d'intégrale $\int_{a,\gamma} f(z)(z-a)dz$ pour $a = 1$, $\gamma = -1$.

<u>Théorème 2.3</u>. Soit $f(z)$ une fonction de la classe $\mathcal{S}(D)$. Alors les valeurs de $f(z)$ dans chaque boule $B^{+}(a,r) \subset D$ ne dépendent que des valeurs dans $C(a,r)$.

<u>Démonstration</u>. Supposons que $B^{+}(a,|\gamma|) \subset D$ et soit z un point de $B^{-1}(a,|\gamma|)$. Alors la boule $B^{+}(z-\gamma,|\gamma|)$ est contenue dans D, et comme $f \in \mathcal{S}(D)$ on a

$$\int_{z-\gamma,\gamma} f(x)(x-z+\gamma)dx = 0 \ .$$

Par la définition 1.1. on a

$$0 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n,p)=1}} \frac{1}{n} \sum_{\xi^n=1} f(z+\xi\gamma-\gamma)(z-\gamma+\xi\gamma-z+\gamma) =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n,p)=1}} \frac{1}{n} \sum_{\xi^n=1} f[z+(\xi-1)\gamma]\xi\gamma,$$

et parce que $(n,p) = 1$,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n,p)=1}} \sum f[z+(\xi-1)\gamma]\xi = 0$$

On a donc

$$(2) \qquad f(z) = -\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n,p)=1}} \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ \xi\neq 1}} f[z+(\xi-1)\gamma]\xi$$

Comme $|\xi-1| = 1$ si $\xi^n = 1$, $(n,p) = 1$, $\xi\neq 1$, les points $z+(\xi-1)\gamma\in C(a,|\gamma|)$ et le théorème est démontré.

Corollaire 2.4. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions de la classe $\mathcal{S}(B^+(o,r)$ et supposons que $f(z) = g(z)$ dans $C(o,r)$. Alors $f(z) \equiv g(z)$ dans $B^+(o,r)$.

Corollaire 2.5. (le principe du maximum). Supposons que $f\in\mathcal{S}(B^+(o,r))$. Alors

$$\sup_{|z|\leq r} |f(z)| = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

En effet, par la formule (2) pour $z\in B^-(o,r)$ on a

$$|f(z)| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n,p)=1}} \Big| \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ \xi\neq 1}} f[z+(\xi-1)\gamma] \Big|$$

où $\gamma\in\mathbf{C}_p$, $|\gamma| = r$. Pour chaque n on a

$$\Big| \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ \xi\neq 1}} f[z+(\xi-1)\gamma] \Big| \leq \max_{|x|=r} |f(x)|$$

Théorème 2.6. Soit $f(z)$ une fonction de la classe $\mathcal{S}(B^+(o,r)$, et supposons que $f'(z)$ existe uniformément dans $C(o,r)$. Alors $f'(z)$ existe uniformément dans $B^+(o,r)$ et $f'\in\mathcal{S}(B^+(o,r)$.

Démonstration. Soit b un point de $B^-(o,r)$ et $h\in\mathbf{C}_p$ assez petit, $\gamma\in C(o,r)$. Par la formule (2) on a

$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} = - \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n,p)=1}} \sum_{\substack{\xi^n=1 \\ \xi\neq 1}} \frac{f[b+h(\xi-1)\gamma] - f[b+(\xi-1)\gamma]}{h} \xi$$

Comme pour tout $\xi\neq 1$, $(n,p) = 1$, $b+(\xi-1)\gamma\in C(o,r)$, pour $b\in B^-(o,r)$ la limite suivante existe uniformément

$$\lim_{\substack{h\to\infty \\ (n,p)=1}} \frac{f[b+h+(\xi-1)\gamma] - f[b+(\xi-1)\gamma]}{h} = f'[b+(\xi-1)\gamma].$$

En posant

$$f'(b) = -\lim_{\substack{n\to\infty\\(n,p)=1}} \sum_{\substack{\xi^n=1\\ \xi\neq 1}} f'[b+(\xi-1)\gamma]\xi, \qquad (3)$$

nous avons la fonction $f'(z)$ définie dans $B^-(o,r)$.

Nous démontrons maintenant que $f'\in\mathcal{S}(B^+(o,r))$. Soit $\gamma\in\mathbf{C}$ tel que $|\gamma| \geq r$. Si $|\gamma| = r$ alors la formule (3) montre que

$$\int_{b,\gamma} f'(z)(z-b)dz = 0$$

pour tout $b\in B^+(o,r)$. Si $|\gamma| < r$ alors $f\in\mathcal{S}(B^+(b,|\gamma|)$. Comme on a démontré, $f'(z)$ existe uniformément dans $C(b,|\gamma|)$. Des considérations analogues aux précédentes nous donnent

$$f'(z) = -\lim_{\substack{n\to\infty\\(n,p)=1}} \sum_{\substack{\xi^n=1\\ \xi\neq 1}} f'[z+(\xi-1)\gamma]\xi \qquad (4)$$

pour tout $z\in B^+(b,|\gamma|)$. Alors la formule (4) et la démonstration du théorème 2.3 montrent que

$$\int_{b,\gamma} f'(z)(z-b)dz = 0$$

Le théorème est démontré.

On notera par $\mathcal{A}(D)$ l'espace de fonctions localement analytiques dans D. Soit $f(z)\in\mathcal{A}(D)$, pour chaque $x\in D$ on note par $\rho_x(f)$ le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(z)$ en x.

<u>Théorème 2.7</u>. Soit $f(z)$ une fonction de la classe $\mathcal{S}(B^+(o,r))$ et supposons que $f\in\mathcal{A}(c(o,r))$ et $\min_{x\in C(o,r)} \rho_x(f) > 0$. Alors $f(z)$ a des dérivées de tous ordres dans $B^+(o,r)$ et ses dérivées sont de la classe $\mathcal{S}(B^+(o,r))$.

En effet, comme $\min_{x\in C(o,r)} \rho_x(f) > 0$, $f(z)$ est différentiable uniformément d'ordre infini dans $C(o,r)$ et le théorème 2.7 est une conséquence du théorème 2.6.

<u>Théorème 2.8</u>. Soit $f(z)$ une fonction de la classe $\mathcal{S}(B^+(o,r))$ et supposons qu'il existe $r'<r$ tel que dans $\{z'<|z|\leq r\}$ $f(z)$ admet une représentation par une série de Laurent. Alors $f(z)$ est holomorphe dans $B^+(o,r)$.

<u>Démonstration</u> . Supposons que $f\in\mathcal{S}(B^+(o,r))$ et pour $r' < |r| \leq r$,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

On pose

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \text{ si } z \in C(o,r) \\ \sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n \text{ si } z \in B^-(o,r) \end{cases}$$

Alors $g \in \mathcal{S}(B^+(o,r))$ et comme $f, g \in \mathcal{S}(B^+(o,r))$, $f(z) = g(z)$ dans $c(o,r)$, $f(z) \equiv g(z)$ dans $B^+(o,r)$ (corollaire 2.4). Le théorème 2.8. est démontré.

Remarque. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire et $r > \varepsilon$ on a

$$\mathcal{S}(B^+(o,r)) \cap \mathcal{K}(B^+(o,r)) \setminus B^+(o,r-\varepsilon)) = \mathcal{K}(B^+(o,r))$$

Question : Est-ce que $\mathcal{S}(B^+(o,r)) = \mathcal{K}(B^+(o,r))$?

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. Adams. Transcendental numbers in the p-adic domain. Amer. J. Math. 88 (1966) 279-308.

[2] J. Coates. An effective p-adic analogue of a theorem of Thue Acta Arith. 15 (1969), 279-305.

[3] N. Koblitz. p-adic analysis : a short course on recent works. London lecture Notes in Math, N42.

[4] L.G. Schnirelman. On functions in normed algebraically closed division rings. Isvestija AN SSSR 2 (1938) 417-498.

[5] T.N. Shorey : Algebraic independence of certain numbers in the p-adic domain. indag. Math. 34 (1971) 1-7.

[6] R. Tijdeman. Indag. Math. 33 (1971) 1-7.

[7] M.M. Vishik. Some applications of the Schnirelman integral in non-archimedean analysis Uspehi Math. nauk., 34 (1979) 223-224.

Ha Huy KHOAI
Institute of Mathematics
P.O. Box 631 Bo Ho
HANOI-VIETNAM