GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BRUNO CHIARELLOTTO

Sur le théorème de comparaison entre cohomologie de De Rham p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 14, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A6_0>

Groupe d'Etude d'Analyse
Ultramétrique. (1986/87)
n° 14, 25 pages

2 mars 1987

Exposé n° 14

SUR LE THEOREME DE COMPARAISON ENTRE COHOMOLOGIE DE DE RHAM p-ADIQUE

par

BRUNO CHIARELLOTTO*

§0.Introduction.

Soit

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathbb{Q}^{alg}(x)$. Soit 0 un point singulier de L; l'irrégularité de Fuchs en 0 est le nombre

$$irr_0(L) = \sup_{0 \leq i \leq n} (v_0(a_n)-n-v_0(a_i)+i).$$

Si on prends maintenant un corps $K \supset \mathbb{Q}^{alg}$ algébriquement clos et complet pour une valuation ultramètrique qui induit sur $\mathbb{Q}$ une valuation

-----

*Univ.PARIS VII U.E.R. de Math. et Inf. Tour 45.55-5^{me}ét. 2,Place Jussieu 75005 Paris.

*Seminario Matematico dell'Univ.di Padova Via Belzoni 7, 35131 Padova ITALIE.

Supporté par une bourse de C.N.R. Italie.

$\underline{p}$-adique, l'opérateur L opère sur $\frac{K[[x]]}{K\{x\}}$ et Clark [CL] a montré qu'il est toujours injectif. Il est facile de voir [MA] que L est aussi toujours surjectif sur l'espace précédent. D'autre part L opère aussi sur $\frac{\mathbb{C}[[x]]}{\mathbb{C}\{x\}}$ sur lequel il est toujours surjectif. Mais le théorème de Malgrange affirme que

$$\operatorname{irr}_0(L) = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}\left(L, \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\mathbb{C}\{x\}}\right) .$$

Soit $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ une varieté algébrique non-singulière définie sur $\overline{\mathbb{Q}}^{alg}$ et $\mathcal{M}_0$ un fibré de type fini à connexion intégrable; le plongement naturel $\overline{\mathbb{Q}}^{alg} \subseteq \mathbb{C}$ fournit par extension des scalaires une $\mathbb{C}$-varieté algébrique non-singulière $X_{\mathbb{C}}$ et un fibré à connexion intégrable $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$. A $X_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ on peut associer une variété analytique complexe X_{an} et un fibré à connexion holomorphe $\mathcal{M}_{an}$ et on a un morphisme entre les cohomologies de de Rham:

$$\mathbb{H}^*(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})) \longrightarrow \mathbb{H}^*(X_{an}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{an}))$$

qui n'est pas en général un isomorphisme. Si $\dim X_{\mathbb{C}} = 1$ Deligne a montré que la différence entre les caractéristiques d'Euler-Poincaré des espaces précédents est égale à la somme des irrégularités de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ aux points à l'infini de $X_{\mathbb{C}}$ [DE].

De la même façon le plongement $\overline{\mathbb{Q}}^{alg} \subseteq K$ fournit par extension des scalaires une variété algébrique non-singulière sur K X_K et un fibré à connexion intégrable $\mathcal{M}_K$. Comme précedemment on associe à X_K et $\mathcal{M}_K$ une variété analytique rigide X_{rig} et un fibré $\mathcal{M}_{rig}$, pour la topologie de Grothendieck, muni d'une connexion intégrable. On a encore un morphisme entre cohomologies de de Rham:

$$\mathbb{H}^*(X_K, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_K)) \longrightarrow \mathbb{H}^*(X_{rig}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{rig}))$$

et Baldassarri conjecture que c'est toujours un isomorphisme et il démontre la conjecture si dim $X_0 = 1$ [BA1]. Sa dêmonstration utilise la théorie de Turittin p-adique [BA0] et les théorèmes d'indice de Ph.Robba [RO] et de ce fait elle ne semble pas se généraliser en dimension supérieure (En [BA2] et [CH] on trouvera d'autres cas où la conjecture est démontrée).

Dans le cas complexe le théorème de dualité locale pour D_X-modules holonomes de Mebkhout [ME] montre, en particulier, que le théorème de Deligne est équivalent au théorème de Malgrange. Ceci suggere que le théorème de Clark est équivalent au théorème de Baldassarri dans le cas p-adique. Le but de ce travail est de montrer que tel est bien le cas. En plus du fait que cela fournit une démonstration particulèrement simple du théorème de Baldassarri, on a ici une méthode pour attaquer le problème en dimension supérieure. Le principal obstacle réside pour l'instant dans le manque d'une bonne théorie de la dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules dans le cas p-adique: c'est ce que nous allons étudier ulterieurement.
Dans le §3 on trouvera quelque résultat d'analyse fonctionelle pour K-espaces vectoriels topologiques convexes que nous utiliserons pendant §2. Cette note géneralise [VT],[MS],[MO].

***

Je remercie M.le Prof.Zoghman Mebkhout de m'avoir suggéré l'idée de ce travail et de m'avoir aidé à mettre au point la démonstration. Ce travail a été développé pendant mon séjour à l'Université de Paris VII. Je remercie M.le Prof.Lê Dũng Tráng de m'avoir accepté dans son équipe (L.A.212 du C.N.R.S.).

§1.Conjecture locale.

Commençons par énoncer la conjecture de nature locale que nous pensons être la vraie conjecture à démontrer (1.3) et dont la conjecture de Baldassarri ([BA1], (1.1), (1.2)) est un corollaire. Dans §2 nous démontrerons (1.3) pour une courbe.

Soit X_0 une variété algébrique irréductible et non-singulière définie sur le corps $\bar{\mathbb{Q}}^{alg} = K_0$ et soit $\mathcal{M}_0$ un fibré de rang fini muni d'une connexion intégrable ([KA], [DE]):

$$\nabla_0 : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_0 \otimes \Omega^1_{X_0/K_0} .$$

Si nous prenons un corps K, extension de K_0, valué complet pour une valuation ultramètrique et algébriquement clos, on obtient par extension des scalaires une variété algébrique lisse sur K X_K et un $\mathcal{M}_K$ fibré à connexion intégrable:

$$\nabla_K : \mathcal{M}_K \longrightarrow \mathcal{M}_K \otimes \Omega^1_{X_K/K} .$$

Soit:

$$\mathcal{DR}(\mathcal{M}_K) := 0 \longrightarrow \mathcal{M}_K \xrightarrow{\nabla_K} \mathcal{M}_K \otimes \Omega^1_{X_K/K} \longrightarrow \mathcal{M}_K \otimes \Omega^2_{X_K/K} \longrightarrow \quad \cdots$$

son complexe de de Rham.

Maintenant à X_K on peut associer un espace analytique rigide X_{rig} [KO] et, comme pour le cas classique, à $\mathcal{M}_K$ un $\mathcal{O}_{X_{rig}}$-module localement libre pour la topologie de Grothendieck, $\mathcal{M}_{rig}$, muni d'une connexion intégrable:

$$\nabla_{rig} : \mathcal{M}_{rig} \longrightarrow \mathcal{M}_{rig} \otimes \Omega^1_{X_{rig/K}} ,$$

soit

$$\mathcal{DR}(\mathcal{M}_{rig}) := 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rig} \longrightarrow \mathcal{M}_{rig} \otimes \Omega^1_{X_{rig/K}} \longrightarrow \quad \cdots$$

son complexe de de Rham.

La conjecture de Baldassarri affirme que le morphisme naturel:

$$(1.1) \qquad \mathbb{H}^*(X_K, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_K)) \longrightarrow \mathbb{H}^*(X_{rig}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{rig}))$$

est un isomorphisme.

Si

$$j : X_k \hookrightarrow \overline{X}_{rig}$$

est une compactification d'Hironaka et

$$j_{rig} : X_{rig} \hookrightarrow \overline{X}_{rig}$$

la situation analytique associée:

la conjecture (1.1) équivaut à démontrer qu'il existe un isomorphisme entre:

$$(1.2) \qquad \mathbb{H}^*(\overline{X}_{rig}, (j_* \mathcal{DR}(\mathcal{M}_K))_{rig}) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\overline{X}_{rig}, j_{rig*} \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{rig})).$$

(cfr. [BA1] et GAGA $\underline{p}$-adique [KO]).

N.B. A la différence du cas classique il n'y a pas d'hypothèses sur l'irrégularité de $\mathcal{M}_K$ à l'infini.

Nous pensons que la conjecture à formuler est:

le morphisme naturel de complexes des faisceaux abeliens sur $\overline{X}_{rig}$:

$$(1.3) \qquad (j_* \mathcal{DR}(\mathcal{M}_K))_{rig} \longrightarrow j_{rig*} \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{rig}).$$

est un quasi-isomorphisme.

On notera que la conjecture (1.2) est simplement un corollaire de (1.3). Kiehl a montré (1.3) pour le fibré trivial ($\mathcal{O}_K$, d) [KI] qui est l'analogue du théorème de Grothendieck dans le cas complexe ([GRØO],th.2.1).

§2.Démonstration de la conjecture pour une courbe.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer (1.3) quand X_0 est une courbe.

<u>THEOREME</u> 2.1.<u>La conjecture</u> (1.3) <u>est vraie si</u> X_0 <u>est une courbe sur</u> $K_0 = \bar{\mathbb{Q}}^{alg}$.

<u>DEM.</u> Le faisceau $\mathcal{M}_K$ localement libre peut être étendu à un faisceau $\overline{\mathcal{M}}_K$ sur $\overline{X}_K$ localement libre aussi, tel que:

$$\overline{\mathcal{M}}_K \otimes j_* \mathcal{O}_K \approx j_* \mathcal{M}_K \ .$$

La topologie de Grothendieck de $\overline{X}_{rig}$ est plus fine que la topologie de Zariski, donc on peut choisir un recouvrement de $\overline{X}_{rig}$ affinoïde admissible où sur chaque élément du recouvrement il y a tout au plus un seul point de $Y = \overline{X}_{rig} \setminus X_{rig} = \overline{X}_K \setminus X_K$. On peut étudier le morphisme (1.3) sur chaque affinoïde du recouvrement:si l'affinoïde ne rencontre pas le diviseur Y les deux complexes sont exactement les mêmes. Si l'affinoïde contient $a \in \overline{X}_{rig} \setminus X_{rig}$ le faisceau quotient:

$$\frac{j_{rig*}(\mathcal{M}_{rig})}{(j_* \mathcal{M}_K)_{rig}}$$

restreint à l'affinoïde est un faisceau "skyscraper" de support $\{a\}$ pour la topologie de Grothendieck, dont les sections globales sont

$$\frac{j_{rig*}(\mathcal{M}_{rig})_a}{(j_* \mathcal{M}_K)_{rig,a}} \ .$$

Puisqu'il existe une extension localement libre $\overline{\mathcal{M}}_K$ sur $\overline{X}_K$ de $\mathcal{M}_K$, on a des isomorphismes locaux:

$$(2.2)\qquad (j_*\mathcal{M}_K)_{rig,a} \approx (j_*\mathcal{O}_{X_K})^n_{rig,a} \ ; \ (j_{rig*}\mathcal{M}_{rig})_a \approx (j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})^n_a$$

et donc, pour la démonstration du théorème il suffira que les fléches verticales

$$(2.3)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})^n_a \arrow[r, "\nabla"] & (j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})^n_a \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (j_*\mathcal{O}_{X_K})^n_{rig,a} \arrow[r, "\nabla"] \arrow[u] & (j_*\mathcal{O}_{X_K})^n_{rig,a} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

avec $\nabla = \frac{d}{dx} + A$, $A \in M_n((j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,a})$, donnent un quasi-isomorphisme de complexes.

En vertu de Kiehl [KI], on peut choisir un recouvrement admissible affinoïde tel que tout affinoïde B qui rencontre le diviseur Y est isomorphe à SpK<x> et tel que le diviseur $Y \cap B$ est defini dans B par x=0. Dans ce cas là en utilisant le "paramètre local" x en a=0:

$$(j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} a_i x^i \ , \ a_i \in K; \ \exists \varepsilon>0, \lim\limits_{i\to+\infty} |a_i|\varepsilon^i = 0; \quad \forall \eta > 0 \\ \\ \lim\limits_{i\to-\infty} |a_i|\eta^i = 0 \end{array} \right\}$$

(séries à singularités essentielles).

$$(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0} = \left\{ \sum_{\substack{i\geq -N \\ N<+\infty}} a_i x^i \ , \ a_i \in K, \ \exists \varepsilon>0, \lim_{i\to+\infty} |a_i|\varepsilon^i = 0 \right\}$$

(séries à singularités méromorphes).

De plus l'anneau des germs de fonctions analytiques en x=0 (c.à d. en a) est

$$\mathcal{O} = \left\{ \sum_{i\geq 0} a_i x^i \ , \ a_i \in K \ ; \ \exists \varepsilon > 0, \lim_{i\to+\infty} |a_i|\varepsilon^i = 0 \right\} .$$

L'existence du vecteur ciclyque [DE], [MA] montre que le quasi-isomorphisme (2.3) est equivalent au quasi-isomorphisme:

$$(2.4)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0 & \xrightarrow{\tilde{L}} & (j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0} & \xrightarrow{\tilde{L}} & (j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où

$$\tilde{L} = \frac{d^n}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \quad \dots +b_0 \quad , \qquad b_i \in (j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0} \ .$$

Avec une multiplication par une puissance de x on peut changer $\tilde{L}$ en L:

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 \ , \qquad a_i \in \mathcal{O} \quad .$$

Enfin le quasi-isomorphisme en (2.4) est équivalent à l'isomorphisme

$$(2.5)\qquad \frac{(j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0}{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0}} \xrightarrow{L} \frac{(j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0}{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0}} \quad .$$

Definissons maintenant:

$$H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) := \frac{(j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0}{\mathcal{O}} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{x^i} \ , \ a_i \in K, \ \forall \eta > 0 \ \lim_{i \to +\infty} \frac{|a_i|}{\eta^i} = 0 \right\}$$

$$H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) := \frac{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0}}{\mathcal{O}} = \left\{ \sum_{i=1}^{N<+\infty} \frac{a_i}{x^i} \ , \ a_i \in K \right\} \quad ;$$

Par construction L opère sur les deux K-espaces vectoriels précedents et, de plus:

$$\frac{(j_{rig*}\mathcal{O}_{X_{rig}})_0}{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{rig,0}} \approx \frac{H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})}{H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})} \quad .$$

Finalement l'isomorphisme en (2.5) equivaut à quasi-isomorphisme (donné par les flèches verticales):

$$
(2.6)\quad
\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \xrightarrow{L} & H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \longrightarrow 0 & := & (H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L) \\
& \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow \\
0 \longrightarrow & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \xrightarrow{L} & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \longrightarrow 0 & := & (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L)
\end{array}
$$

Nous allons demontrer (2.6) par dualité locale.

<u>Proposition</u> 2.7 <u>Le dual algebrique du</u> K-<u>espace vectoriel</u> $H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$ <u>est</u> $\hat{\mathcal{O}} = K[[x]]$. <u>Le dual topologique de</u> $\mathcal{O}$ (<u>séries convergentes avec la topologie limite inductive localement convexe</u> [GR]) <u>est</u> $H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$.

La démonstration de la proposition sera donnée dans le §3.

Soit ${}^tL$ le transposé de L:

$$
{}^tL = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} a_i \qquad ;
$$

le dual algébrique du complexe $(H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L)$ est le complexe:

$$
(2.8)\quad 0 \longrightarrow \hat{\mathcal{O}} \xrightarrow{{}^tL} \hat{\mathcal{O}} \longrightarrow 0 \quad := \quad (\hat{\mathcal{O}}, {}^tL);
$$

et le dual topologique du complexe

$$
(2.9)\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{{}^tL} \mathcal{O} \longrightarrow 0 \quad := \quad (\mathcal{O}, {}^tL)
$$

est le complexe $(H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L) = (\mathcal{O}'; L)$ (Prop.2.7) .

Notons

$$
(2.10)\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{L} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \quad := \quad (\mathcal{O}^*, L)
$$

le complexe dual algebrique du complexe $(\mathcal{O}, {}^tL)$.

On a les morphismes canoniques:

$$
i : (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L) \longrightarrow (\mathcal{O}^*, L)
$$

et

$$j : (\mathcal{O}', L) = (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L) \longrightarrow (\mathcal{O}^*, L)$$

qui avec (2.6) forment le diagramme commutatif de complexes:

(2.11)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\mathcal{O}^*, L) & \\ (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}); L) \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "(2.6)"] & & (\mathcal{O}', L) \arrow[ul, "j"'] \end{tikzcd} \quad ;$$

on va démontrer que i, j sont quasi-isomorphismes pour conclure que (2.6) est un quasi-isomorphisme.

Rappellons que nous sommes parti d'une situation définie sur $\overline{\mathbb{Q}}^{alg} = K_0$ et, particulier, L et ${}^tL$ sont definis sur K_0. Le polinôme indiciel de ${}^tL$ a ses racines (exposants) dans K_0, mais chaque élément de K_0 est un nombre p-adiquement non-Liouville ([CL];[CHR]); alors:

<u>THEOREME</u> 2.12 <u>(Clark [CL]) Puisque les exposants de</u> ${}^tL$ <u>sont des nombres non-Liouville</u>,

$${}^tL : \frac{\hat{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} \longrightarrow \frac{\hat{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$$

<u>est un isomorphisme</u>.

<u>DEM</u>. La surjectivité est un résultat de Malgrange [MA]. Le théorème de Clark affirme que chaque solution formelle, f , d'une equation différentielle

$$Pf = g$$

où g est une série convergente et P est un opérateur différentiel linéaire avec coefficients convergents et avec exposants non-Liouville est convergente. $\nmid$

<u>N.B.</u> Implicitement on a obtenu un calcul d'indice pour l'anneau des germes de founctions analytiques rigides parce que $(\hat{\mathcal{O}}, {}^tL)$ est à indice [MA].

Le théorème 2.12 est equivalent au quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{\Theta} & \xrightarrow{\ {}^{t}L\ } & \hat{\Theta} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\ {}^{t}L\ } & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Par dualité algebrique on peut conclure que

$$i : (H^{1}_{[0]}(\Theta_{\overline{X}_{rig}}); L) \longrightarrow (\Theta^{*}, L)$$

est un quasi-isomorphisme puisque tous les complexes sont cohomologiquement de dimension finie.

Pour le morphisme j la démonstration est plus compliquée. Comme nous avons vu tout à l'heure, le théorème de Clark (2.12) implique que l'opérateur ${}^{t}L : \mathcal{G} \longrightarrow \Theta$ est à indice. On démontrera dans §3 que:

i) Θ est un espace topologique de Hausdorff avec la topologie localement convexe limite inductive (au sense ultramétrique [GR], [VT]). L'opérateur ${}^{t}L$ est continu pour la topologie limite inductive et la limite qui forme Θ est une limite dénombrable d'espaces de Banach.

ii) Pour chaque application continue K-linéaire de Θ en soi même, le théorème du graphe férmé et le théorème de l'application ouverte sont valables. On a alors, en particulier, que, $\mathrm{Im}\,{}^{t}L$ étant de codimension finie, $\mathrm{Im}\,{}^{t}L$ est férmé en Θ . De plus pour chaque $g \in \Theta$ il existe $\beta \in H^{1}_{0}(\Theta_{\overline{X}_{rig}}) = \Theta'$ tel que $\beta(g) \neq 0$.

On peut alors appliquer dans notre cas une adaptation d'un théorème de Serre [SE] (toujours dans §3, cor.3). On trouve que les <u>duaux topologiques des espaces de cohomologie de</u> $(\Theta, {}^{t}L)$ <u>sont isomorphes aux espaces de cohomologie de la situation duale topologique</u> (Θ', L). Mais les espaces de cohomologie de $(\Theta, {}^{t}L)$ sont de dimension finie et separés: pour ces espaces donc le dual topologique coincide avec le dual algébrique. Finalement les espaces duaux topologiques des espaces de cohomologie de ($\mathcal{O}$, ${}^tL$) sont isomorphes aux espaces de cohomologie de la situation duale algébrique ($\mathcal{O}^*$, L). On a donc prouvé que

$$j : (\mathcal{O}', L) \longrightarrow (\mathcal{O}^*, L)$$

est un quasi-isomorphisme.

A l'aide du diagramme (2.11), on trouve que

$$(2.6)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \xrightarrow{L} & H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \xrightarrow{L} & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme, et le théorème 2.1 est démontré. $\nmid$

On remarquera que ce raisonnement est calqué sur la démonstration du théorème de dualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes [ME].

§3. Note

On démontrera d'abord la proposition 2.7 .

<u>Proposition</u> 2.7 <u>Le dual algébrique de</u> $H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$ <u>est</u> $\hat{\mathcal{O}}$. <u>Le dual topologique de</u> $\mathcal{O}$ <u>est</u> $H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$.

<u>DEM.</u> En effet $H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$ est limite inductive d'espaces vectoriels de dimension finie, son dual algébrique est la limite projective des espaces duaux: $\hat{\mathcal{O}}$.

Considerons maintenant $\mathcal{O}$. Comme dans [GR], $\mathcal{O}$ est limite inductive d'algèbre de Tate (donc K-espaces de Banach):

$$\mathcal{O} = \varinjlim_{e\in K^*} A_e \qquad\qquad A_e = K\langle \frac{x}{e} \rangle$$

(les notations sont comme en [BGR]).

Avec la topologie limite inductive localement convexe [VT](au sense ultramétrique) $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff ([GR]ch. 1 § 8, la definition de telle topologie est l'usuelle et en particulier une applcation linéaire de $\mathcal{O}$ en un K-espace localement convexe Y

$$f : \mathcal{O} \longrightarrow Y$$

est continue si et seulement si chaque application

$$A_e \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{f} Y$$

est continue [VT]).

Si $\beta = \sum_{i>0} \frac{a_i}{x^i} \in H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$, on peut associer la flêche

$$\lambda_\beta : \mathcal{O} \longrightarrow K$$

$$g = \sum_{i\geq 0} b_i x^i \longrightarrow \sum_{i\geq 0} b_i a_{i+1} \quad .$$

L'application λ_β est bien définie: si g converge en $\{e \in K, |e| \leq \varepsilon\}$ on trouve, pour e dans le domain de convergence de g

$$\lim_{i \to +\infty} |b_i a_{i+1}| = \lim_{i \to +\infty} |b_i a_{i+1} \frac{e^{i+1}}{e^{i+1}}| = 0 \ .$$

Mais $\lambda_\beta \in \mathcal{O}'$: en effet si pour chaque $e \in K^*$ on considère l'application induite par λ_β en A_e, λ^e_β ; en rappellant que A_e est une K-algèbre de Banach avec la norme:

$$g \in A_e \ , \ \|g\|_e = \sup_{i\geq 0} |b_i| e^i \quad ,$$

on trouve:

$$|\lambda^e_\beta(g)| = |\sum_{i\geq 0} b_i a_{i+1}| \leq \max_i |b_i a_{i+1} \frac{e^{i+1}}{e^{i+1}}| \leq \|g\|_e \max_i |a_{i+1} \frac{e}{e^{i+1}}| \leq \mathcal{V} \|g\|_e \ , \mathcal{V} \in |K|$$

celà implique que λ^e_β est borné pour chaque e, donc continue.

On peut définir einsi une application

$$H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}}) \longrightarrow \mathcal{O}'$$

qui est injective: si $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$, $\beta \neq 0$, il existe évidemment $f \in \mathcal{O}$, $\lambda_\beta(f) \neq 0$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathcal{O}'$, nous ferons voir qu'il existe $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$, tel que $\lambda_\beta = \lambda$. En effet pour chaque $g = \sum_{i \geqslant 0} a_i x^i \in \mathcal{O}$ on trouve

$$\lambda(g) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda(x^i)\Big) = \sum_{i \geqslant 0} a_i \lambda(x^i) \qquad \text{avec } \lambda(x^i) \in K .$$

On peut écrire:

$$\beta = \sum_{i \geqslant 0} \frac{(x^i)}{x^{i+1}} \qquad ,$$

il suffit voire que $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$, parce que c'est sure alors que $\lambda = \lambda_\beta$.

Pour chaque $e \in K^*$ on peut considérer $g = \sum e^i x^i$, $g \in \mathcal{O}$. Comme $\lambda(g)$ est défini, on a

$$\lim_{i \to +\infty} |e^i \lambda(x^i)| = 0 \ ;$$

donc

$$\lim_{i \to +\infty} |e^{i+1} \lambda(x^i)| = 0 \qquad \forall e,\ e \in K^*$$

et $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$. C'est vrai que $\mathcal{O}' = H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$. $\nmid$

<u>N.B.1</u> Il existe des résultats plus forts si on utilise [MS], [MO]. En particulier on trouve que $\mathcal{O}$ est réflexif et $\mathcal{O}' = H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$ est un espace de Fréchet.

<u>N.B.2</u> A l'aide de la proposition 2.7, on a facilement que pour chaque $g \in \mathcal{O}$ il existe $\beta \in \mathcal{O}' = H_0^1(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$ tel que $\beta(g) \neq 0$. Pour un étude du théorème de Hahn-Banach p-adique voir [IN].

*****

Notre but est maintenant d'étudier l'anneau des germes des fonctions holomorphes en $x_i=0$, $i=1, \ldots, n$ de l'espace analytique $\mathrm{Sp}K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$: $\mathcal{O}_X$ (Les résultats de cette section peuvent être utilisés pour n=1 c.à d. pour le K-espace $\mathcal{O}$ du precedent paragraphe).

Par definition

$$\mathcal{O}_x = \varinjlim_{e \in K^*} A_e$$

où $A_e = K < \frac{x_1}{e}, \ldots, \frac{x_n}{e} > = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_\alpha x^\alpha \ , \ a_\alpha \in K, \ \lim_{|\alpha| \longrightarrow +\infty} |a_\alpha| |e|^{|\alpha|} = 0 \right\}$

sont des espaces de Banach (K-algèbres de Tate). On peut munir $\mathcal{O}_x$ de la topologie limite inductive localement convexe: avec telle topologie $\mathcal{O}_x$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff (àu sense ultramétrique [GR], [VT]).

Soit maintenant $c \in K^*$, $|c| < 1$ alors:

$$A_i = K < \frac{x_1}{c^i}, \ldots, \frac{x_n}{c^i} > \qquad i = 0,1,2...$$

est un systeme cofinal pour $\mathcal{O}_x$: donc $\mathcal{O}_x$ est limite inductive de dénombrables espaces de Banach. On doit aussi remarquer que les flèches $A_i \longrightarrow A_{i+1}$ et, donc, $A_i \longrightarrow \mathcal{O}_x$ sont injectives.

On va étudier en général les K-espaces vectoriels $(\mathcal{LB})$ qui nous définirons comme espaces vectoriels topologiques localement convexe (au sense ultrametrique) qui sont limite inductive d'une suite de K-espaces de Banach (leurs topologies sont exactement celles qui dérivent de la limite) : manifestement on peut penser que si $E \in (\mathcal{LB})$ alors $E = \varinjlim E_i$ avec $E_i \longrightarrow E_{i+1}$ injectif pour chaque i ([GR01]). $\mathcal{O}_x$ est surement un espace $(\mathcal{LB})$.

Nous férons voir comme pour les espaces $(\mathcal{LB})$ soient vraies les théorèmes du graphe férmé et de l'application ouverte, generalisant ainsi les résultats de [VT]. En particulier on pourra appliquer ces faits à $\mathcal{O}_x$. La démonstration est une transposition de celle du cas classique [GR01]. Donnons maintenant le théorème clef (toujours "espace vectoriel" signifie "K-espace vectoriel"):

THEOREME A ([GRO1],[GRO2]) Soit E un espace vectoriel topologique de Hausdorff; E_i $i \in \mathbf{N}$ une suite d'espaces vectoriels topologiques de Banach. Soit

$$u_i : E_i \longrightarrow E$$

application linéaire continue pour chaque i, soit u une application linéaire continue de F , K-espace de Banach, en E

$$u : F \longrightarrow E$$

telle que

$$u(F) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} u_i(E_i) \ .$$

Alors il existe un indice k , $u(F) \subseteq u_k(E_k)$ et si u_k est injective, on peut écrire $u = u_k \cdot v$ où $v : F \longrightarrow E_k$ est continue.

DEM. Soient $H_i \subseteq F \times E_i$ sous-espaces férmés tels que:

$$H_i = \left\{ (x,y) \in F \times E_i \mid u(x) = u_i(y) \right\} \ .$$

Soient $F_i = p_i(H_i)$ où $p_i : F \times E_i \longrightarrow F$

$$F_i = \left\{ x \in F \mid u(x) \in u_i(E_i) \right\} \ ,$$

les hypothèses disent que

$$F = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i \ .$$

Mais F est de Banach donc de Baire: il y a alors au moins un des F_i qui n'est pas maigre, soit F_k:

$$p_{k \mid H_k} : H_k \longrightarrow F$$

est une application entre espaces de Banach, donc pour [BOU] ch.I§3.3 théo.1

$$F_k = p_k(H_k) = F$$

($p_{k \mid H_k}$ est un homomorphisme (strict)) on a :

$$u(F) \subseteq u_k(E_k) \ .$$

Si u_k est injective:

$$\begin{tikzcd} E_k \arrow[dr, "u_k"'] & & F \arrow[ll, dashed, "v"'] \arrow[dl, "u"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

il est possible de bien définir $v : F \longrightarrow E_k$ et son graphe

$$gr\ v = \left\{ (x,y) \in F \times E_k \mid u(x) = u_k(y) \right\} = H_k$$

est férmé : v est continue. ∤

<u>THEOREME B</u> ([GRO1],[GRO2]) <u>Soient</u> E, F <u>espaces vectoriels de Hausdorff qui sont</u> ($\mathcal{LB}$). <u>On a</u>

(1) <u>si</u> $u : E \longrightarrow F$ <u>est une application linéaire continue et surjective alors elle est un homomorphisme</u> .

(2) $u : F \longrightarrow E$ <u>linéaire, elle est continue si et seulement si son graphe est férmé</u>.

On a donc:

<u>COROLLAIRE</u> 1 <u>Pour chaque application</u> K-<u>linéaire de</u> $\mathcal{O}_X$ <u>en soi même les théorèmes de l'application ouverte et du graphe férmé sont valables</u>.

<u>DEM</u>. (TH.B) (1) Soit $E = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup E_i$, on peut penser que u soit bijective: en effet si nous considérons

$$\frac{E}{\operatorname{Ker} u} \xrightarrow{\ \bar{u}\ } F$$

$\frac{E}{\operatorname{Ker} u}$ est encore un espace ($\mathcal{LB}$) séparé et l'application induite par u est encore continue pour la topologie limite inductive de $\frac{E}{\operatorname{Ker} u}$ (en général, ici, la topologie limite inductive est plus fine que la topologie quotient). Donc on peut supposer:

$$u : E \longrightarrow F$$

bijective et continue. Il faut démontrer que $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue. Il suffit que pour chaque F_j, $\varinjlim_{j \in \mathbf{N}} F_j = F$ et $v_j : F_j \longrightarrow F$, l'application $u^{-1} \cdot v_j$ soit continue.

Pour chaque F_j on a:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[dr, "u \cdot u_i"'] & & F_j \arrow[dl, "v_j"] \\ & F & \end{tikzcd} \qquad i=0,1,2\ldots$$

où $E = \varinjlim_{i \in \mathbf{N}} E_i$ et $u_i : E_i \longrightarrow E$, et

$$v_j(F_j) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (u \cdot u_i)(E_i) .$$

Grace au théorème A, il existe $\bar{j} \in \mathbf{N}$ tel que:

$$v_j(F_j) \subseteq (u \cdot u_{\bar{j}})(E_{\bar{j}}) ,$$

mais $u \cdot u_{\bar{j}}$ est injective (E est espace vectoriel $(\mathcal{LB})$ donc on peut penser que chaque u_i soit injective) et, toujours du théorème A, il existe

$$b_j : F_j \longrightarrow E_{\bar{j}}$$

continue telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E_{\bar{j}} \arrow[dr, "u \cdot u_{\bar{j}}"'] & & F_j \arrow[ll, "b_j"'] \arrow[dl, "v_j"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Donc

$$u^{-1} \cdot v_j = u_{\bar{j}} \cdot b_j$$

et $u^{-1} \cdot v_j$ est continue. Cela est vrai pour chaque j : u^{-1} est donc continue.

(2) Pour démontrer que u est continue si son graphe est fermé il

suffira de voir que, pour chaque F_j qui forme F, l'application $u \cdot v_j$:

$$F_j \xrightarrow{v_j} F \xrightarrow{u} E$$

est continue. Mais le graphe de $u \cdot v_j$ est férmé, donc il est suffisant de démontrer que si l'application

$$u : F \longrightarrow E$$

avec F espace de Banach a le graphe férmé elle est continue. Soit $H = \mathrm{gr}\, u \subseteq F \times E$ férmé. Encore $H_i = H \cap (F \times E_i)$ est férmé aussi en $F \times E_i$; H_i est de Banach avec la topologie induite parce que $F \times E_i$ est de Banach. Alors

$$H = \bigcup H_i$$

et on peut utiliser sur H la topologie limite inductive des H_i (qui est en général plus fine que la topologie induite en H par $F \times E$). Avec la nouvelle topologie ($v = pr_F$)

$$v : H \longrightarrow F$$

est bijective et continue, donc pour la partie (1) v est un homomorphisme et son inverse v^{-1} est une application linéaire continue:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, dash, "pr_E"] \arrow[d, "v"'] & E \\ F \arrow[u, bend left, "v^{-1}"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif:

$$u = pr_E \cdot v^{-1}$$

est continue . ∤

On va appliquer les résultats précédents au cas d'une seule variable: $\mathcal{O}$. Dans ce cas là:

$$\mathcal{O} = \varinjlim_{i\in\mathbf{N}} K\langle \frac{x}{c^i} \rangle \qquad \text{où} \quad c\in K^*, \quad |c|<1 \text{ et}$$

$$A_i = K\langle \frac{x}{c^i} \rangle = \left\{ \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i x^i \ , \ a_i \in K, \ \lim_{i\to +\infty} |a_i||c|^i = 0 \right\}$$

(chaque $A_i \longrightarrow \mathcal{O}$ est une immersion).

Soit P un opérateur différentiel K-linéaire du type:

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^i}{dx^i} \qquad b_i \in \mathcal{O} \ .$$

On peut supposer que les exposant de P soient non- Liouville:

$$P : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \ .$$

<u>COROLLAIRE</u> 2 <u>Avec les hypothèses précédentes</u> P <u>est continu</u>, P <u>est à indice,</u> P <u>est un homomorphisme sur l'image et</u> $\mathrm{Im}P$ <u>est fermé en</u> $\mathcal{O}$.

<u>DEM</u>. On chaque A_i la multiplication et la derivation sont continues, donc P est continu. Comme les exposants de P sont non Liouville, on peut appliquer le théorème 2.12 de Clark: P est à indice et, en particulier, $\mathrm{Im}P$ est de codimension finie: soit m cette codimension. En prenant alors un supplémentaire algébrique K^m de $\mathrm{Im}P$ on trouve:

$$\mathcal{O}\times K^m \xrightarrow{P\oplus 1_{K^m}} \mathcal{O}$$

continue et surjective. En $\mathcal{O}\times K^m$ les hypothèses du théorème B sont valables: $P\oplus 1_{K^m}$ est un homomorphisme et ensuite l'application induite

$$\frac{\mathcal{O}\times K^m}{\mathrm{Ker}P\times\{0\}} \xrightarrow{\approx} \mathcal{O}$$

est un isomorphisme topologique.

Maintenant $\mathcal{O}\times\{0\}$ est fermé dans le premier membre et, donc

$$P \oplus 1_{K^m}(\mathcal{O}\times\{0\}) = \mathrm{Im}P$$

est férmé en $\mathcal{O}$ et, en plus,

$$P = P\oplus 1_{K^m}\big|_{\mathcal{O}\times\{0\}} : \mathcal{O}\times\{0\} \longrightarrow \mathcal{O}$$

est un homomorphisme (sur l'image), $\#$

N.B. Nous avons démontré aussi que

$$\mathcal{O} = \mathrm{Im}P \oplus K^m \quad ,$$

somme topologique.

On peut comprendre comme l'opérateur ${}^tL$ du §2 ait les mêmes propriétés de P du corollaire 2. Nous savons que le dual topologique $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ est $H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})$ (cfr. proposition 2.7).

COROLLAIRE 3 (Serre [SE]) Soit P comme ci-déssus. Si

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\quad P \quad} \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}' \xrightarrow{\quad {}^tP \quad} \mathcal{O}' \qquad \text{(transposé)}$$

alors

i) $\left(\dfrac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}P}\right)' \approx \mathrm{Ker}\,{}^tP$

ii) $(\mathrm{Ker}P)' \approx \dfrac{\mathcal{O}'}{\mathrm{Im}\,{}^tP}$.

N.B. Si on applique le corollaire 3 à notre cas du §2 avec ${}^tL$ au lieu de P et L au lieu de ${}^tP$ on trouve:

$$(*) \qquad (\mathrm{Ker}\,{}^tL)' \approx \frac{\mathcal{O}'}{\mathrm{Im}L} \qquad \left(= \frac{H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})}{LH^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})} \right)$$

$$(**) \qquad \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}\,{}^tL}\right)' \approx \mathrm{Ker}L \qquad (= \mathrm{Ker}L \text{ sur } H^1_0(\mathcal{O}_{\overline{X}_{rig}})),$$

avec $\mathrm{Ker}\,{}^tL$ et $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}\,{}^tL}$ de dimension finie et séparés.

DEM. (coroll.3) La démonstration est une adaptation d'un théorème de Serre [SE] pour les espaces de Fréchet: ici l'hypothèse clef c'est la finitude des indices.

Nous commençon par démontrer (ii).

Soit $c' \in \mathcal{O}'$ et $h' = [c'] \in \frac{\mathcal{O}'}{\mathrm{Im}\,{}^tP}$; c' induit une forme linéaire sur KerP, qui ne dépend que de h'. Si c' induit l'application nulle sur KerP on trouve:

$$\bar{c}' : \frac{\mathcal{E}}{\mathrm{KerP}} \longrightarrow K .$$

Par le corollaire 2, P est un homomorphisme sur l'image: on peut définir $\bar{P}^{-1}$ continue

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{O}}{\mathrm{KerP}} & \xleftarrow[\approx]{\bar{P}^{-1}} & \mathrm{ImP} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{c}'} & & \\ K & & \end{array}$$

en rappellant que $\mathcal{O} \approx \mathrm{ImP} \oplus K^m$ et en définissant $\beta = \bar{c}' \cdot \bar{P}^{-1} \oplus 0$, $\beta \in \mathcal{O}'$, on a que $c' \in \mathrm{Im}\,{}^tP$ (en effet pour chaque $a \in \mathcal{O}$, $\beta(Pa) = \bar{c}' \cdot \bar{P}^{-1}(Pa) = \bar{c}'(a) = c'(a)$). Donc

$$\frac{\mathcal{O}'}{\mathrm{Im}\,{}^tP} \hookrightarrow (\mathrm{KerP})' \quad .$$

Par hypothèse sur P, KerP est de dimension finie (coroll.2), mais après la démonstration de la proposition 2.7, nous avons rèmarqué que pour chaque $a \in \mathcal{O}$ il existe $\beta \in \mathcal{O}' = H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{rig}})$ tel que $\beta(a) \neq 0$. On trouve alors que KerP a un supplémentaire topologique en $\mathcal{O}$ ([GRO2]), G:

$$\mathcal{O} = \mathrm{KerP} \oplus G.$$

De cette observation on peut déduire (ii).

Pour (i), chaque $c' \in \mathrm{Ker}\,{}^tP$ définit sur ImP une application nulle, clairement

$$\mathrm{Ker}\,{}^tP \hookrightarrow \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}P}\right)' \quad .$$

Si B $\left(\frac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}P}\right)'$:

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}P} \xrightarrow{B} K \, ,$$

$B\cdot\pi \in \mathcal{O}'$:

$$({}^tP(B\cdot\pi))(a) = B\cdot\pi(Pa) = 0 \qquad \forall\, a \in \mathcal{O}$$

$B\cdot\pi \in \mathrm{Ker}\,{}^tP$ et $B\cdot\pi$ induit B. ∦

BIBLIOGRAPHIE

[BAO] BALDASSARRI,F. Differential modules and singular points of p-adic differential equations. Adv. in Math. 44, 155-179 (1982).

[BA1] BALDASSARRI,F. Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel I. Inv. Math. 87, 83-99 (1987).

[BA2] BALDASSARRI,F. Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel II(singularités reguliéres). A paraître.

[BGR] BOSCH,S.;GUNTZER,U.;REMMERT,R. Non archimedean analysis. Grundlehren der Math. Wissenschaften 261 Springer Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1984).

[BOU] BOURBAKI,N. Espaces vectoriels topologiques.Hermann Paris 1966.

[CH] CHIARELLOTTO,B. A comparison theorem in p-adic cohomology (A paraître).

[CHR] CHRISTOL,G. Modules différentiels et equations différentielles p-adique. Queen's Paper in Pure et Appl. Math. 66 Queen's Univ. Kingston-Ontario 1983.

[CL] CLARK,D. A note on the p-adic convergence of solution of linear differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 17 262-269 (1966).

[DE] DELIGNE,P. Equations différentielles à points singuliers. Lecture Notes in Math. 163 Springer Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[GR] GRAUERT,H.;REMMERT,R. Analytische Stellenalgebren. En Die Grundlehren der Math. Wissenschaften Band 176 Springer-Verlag (1971).

[GRØO] GROTHENDIECK,A; On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Publ.Math. I.H.E.S. 29, 95-103(1966).

[GRO1] GROTHENDIECK,A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaire. Memoirs of Am. Math. Soc. 16 (1955).

[GRO2] GROTHENDIECK,A. Topological vector spaces. Gordon & Breach Science Publ. New York London (1973).

[IN] INGLETON,A.W. The Hahn-Banach theorem for non archimedean valued fields. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48, 41-45 (1952).

[KA] KATZ,N. Nilpotent connections and the monodromy theorem: application of a result of Turrittin. Publ. Math. I.H.E.S. 39 355-432 (1970).

[KI] KIEHL,R. Die de Rham kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten uber einem bewerteten Körper. Publ. Math. I.H.E.S. 33,5-20 (1967).

[KO] KOFP,U. Uber eigentliche Familien algebraischer Varietaten über affinoidem Räumen. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Serie 2, Heft 7 (1974).

[MA] MALGRANGE,B. Sur les points singuliers des équations différentielles. L'Ins. Math. 20, 147-176 (1974).

[ME] MEBKHOUT,Z. Théorèmes de bidualité locale pour les D_X-modules holonomes. Ark. Mat. 20, 111-124 (1981).

[MO] MORITA,Y. A p-adic theory of hyperfunctions I. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 17, 1-24(1981).

[MS] MORITA,Y.;SCHIKHOF,W.H. Duality of projective limit spaces and injective limit spaces over a non-spherically complete non-archimedean field. Tohoku Math. Journal 38, 387-397 (1986).

[RO] ROBBA,Ph. Index of p-adic differential operators III. Applications to twisted exponential sums. Soc. Math. de France, Astérisque 119-120, 191-266 (1984).

[SE] SERRE,J.P. Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29, 9-26 (1955).

[VT] VAN TIEL,J. Espaces localement K-convexes, I-III. Indag. Math. 27, 249-258, 259-272, 273-289 (1965).