GILLES CHRISTOL

Fonctions hypergéométriques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A4_0>

Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique. (1986/87)
N° 8 , 16 pages.

le 15 décembre 1986

Exposé n° 8

FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES BORNEES

GILLES CHRISTOL

I Une conjecture.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_s]$, tels que $Q(0,\dots,0) \neq 0$. A partir du développement de Taylor :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum a_{n_1,\dots,n_s} x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}$$

de la fraction rationnelle P/Q , nous construisons la série entiére :

$$\Delta(P/Q) = \sum a_{n,\dots n} \lambda^n$$

qui est appelée diagonale de la fraction rationnelle P/Q .

PROPOSITION : *Toute diagonale de fraction rationnelle f satisfait les propriétés suivantes :*

a) Elle est solution d'une équation différentielle linéaire L à coefficients dans $\mathbb{Q}[\lambda]$.

a') Cette équation différentielle est une équation de Picard Fuchs.

b) Pour toute place p (finie ou non) de $\mathbb{Q}$, le rayon de convergence $r_p(f)$ de la série f dans le corps $\mathbb{C}_p$ est non nul.

c) Pour presque toute place p de $\mathbb{Q}$, on a $r_p(f) = 1$.

c') Pour presque toute place p de $\mathbb{Q}$, la fonction f est bornée dans le disque $D_p(0,1) = \{x\in\mathbb{C}_p ; |x|<1\}$.

c") Pour presque toute place p de $\mathbb{Q}$,on a :

$\|f\|_p = \sup_{x\in D_p(0,1)}|f(x)| = 1.$

Seules les propriétés *a)* et *a')* ne sont pas immédiates. On en trouvera une démonstration dans [1] .

Dans cet article nous nous proposons de tester la conjecture suivante sur les fonctions hypergéométriques ${}_sF_{s-1}$:

CONJECTURE : *Une série entière f qui vérifie les propriétés a), b), c), c') et c") est la diagonale d'une fraction rationnelle.*

REMARQUE : Supposons que la fonction f vérifie les conditions *a), b), c),* *c)'* et *c")*. On constate immédiatement que f est une G-fonction. Il résulte alors d'un théorème de CHUDNOWSKY ([3] , qui contient une erreur corrigée par Y. ANDRE) que l'équation différentielle L vérifie la condition de GALOČKIN . En particulier elle est "globalement nilpotente" et n'a, comme singularités, que des points singuliers réguliers avec exposants rationnels.

Dans ces conditions, des conjectures classiques de BOMBIERI et DWORK [4] affirment que cette équation différentielle "vient de la géométrie". Autrement dit elle vérifie la condition *a')*. Nous espèrons d'ailleurs que la preuve de notre conjecture facilitera celle des conjectures de BOMBIERI et DWORK.

II Fonctions Hypergéométriques.

Si a est un nombre rationnel, nous posons :

$$(a)_0 = 1 \quad , \quad (a)_{n+1} = (a+n)\ (a)_n$$

et si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ appartient à $\mathbb{Q}^s$, nous posons :

$$(\mathbf{a})_n = \prod_{i=1}^{s} (a_i)_n$$

A tout couple $\mathbf{a},\mathbf{b}$ d'éléments de $\mathbb{Q}^s \setminus (-\mathbb{N})$, nous associons la fonction hypergéométrique :

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b};\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_n}{(\mathbf{b})_n} \lambda^n$$

que nous noterons simplement F quand il n'y aura pas de risque de confusion.

REMARQUES :

Si dans la définition des fonctions hypergéométriques nous prenons $\mathbf{a}$ dans $\mathbb{Q}^s$ et $\mathbf{b}$ dans $\mathbb{Q}^r$ avec $r \neq s$, alors, pour $s > r$, nous avons $r_\infty(F) = 0$, et, pour $s < r$, nous avons $r_p(F) \leq |p|^{1/(p-1)}$ pour presque tout p . Par conséquent les conditions *b)* et *c)* ne sont pas simultanément satisfaites.

L'équation différentielle linéaire minimum $L = L(\mathbf{a},\mathbf{b})$ dont la fonction F est la solution n'a que des points singuliers réguliers et les exposants en ces points sont reliés de manière simple aux nombres a_i et b_i. Si nous voulons que L vérifie la condition de GALOČKIN, nous devons donc prendre les nombres a_i et b_i dans $\mathbb{Q}$.

Si l'un des a_i (resp. b_i) appartient à $-\mathbb{N}$, la fonction F est un polynôme (resp. n'est pas définie). Ce cas ne présente pas d'intérêt pour notre problème.

Nous verrons au paragraphe VI que la fonction F ne peut vérifier la condition *c')* que si l'un des b_i (disons b_s) est entier et vérifie la condition : tout a_i ou b_i entier est supérieur à b_s. Si $b_s>1$, un usage répété de la formule :

$$F(\mathbf{a}',\mathbf{b}';\lambda) = 1 + \frac{(\mathbf{a}')_1}{(\mathbf{b}')_1} \lambda\, F(\mathbf{a},\mathbf{b};\lambda)$$

où l'on a posé : $a'_1 = a_1-1$ et $b'_1 = b_1-1$, permet de ramener l'étude de la conjecture au cas où $b_s = 1$. On a alors, avec les notations classiques :

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b};\lambda) = {}_sF_{s-1}(a_1,\ldots,a_s;b_1,\ldots,b_{s-1};\lambda)$$

Avec les restrictions que nous avons imposées à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ (et qui sont donc naturelles si nous voulons tester notre conjecture), il est facile de vérifier que F est une G-fonction et qu'elle satisfait les conditions *a)*, *b)*, *c)*. Notre but est donc d'examiner ce qu'il en est des conditions *c')* et *c")*. Pour cela nous introduisons les définitions suivantes :

Une fonction f de $\mathbb{Q}[\lambda]$ sera dite *localement bornée* si elle vérifie les conditions *b)*, *c)* et *c')* et *globalement bornée* si, de plus, elle vérifie la condition *c")*.

Le signe $\square$ marquera la fin d'une démonstration.

III Valuation p-adique des coefficients de F .

Dans ce paragraphe p est un nombre premier fixé. Nos calculs sont fortement inspirés de ceux de KATZ [5] §6.

Si α est un nombre rationnel, nous notons $[\alpha]$ sa partie entière et $\langle\alpha\rangle$ sa partie fractionnaire. D'autre part nous définissons des fonctions R (reste), Q (quotient) et f, en posant pour tout nombre a de $\mathbb{Z}_p$, tout nombre $q = p^k$ et tout entier n :

$$a = - R(a,q) + q\, Q(a,q) , \qquad f(a,q,n) = \left[\frac{n+q-1-R(a,q)}{q}\right]$$

où $R(a,q)$ est un entier , $0 \le R(a,q) < q$ et $Q(a,q)$ appartient à $\mathbb{Z}_p$.

LEMME 1 : *Avec ces notations, la valuation p-adique de* $(a)_n$ *est donnée par la formule suivante :*

$$v_p((a)_n) = \sum_{k=1}^{h} f(a,p^k,n) + v_p\left[(Q(a,p^h))_{f(a,p^h,n)}\right] .$$

La démonstration se fait par récurrence sur h . Nous avons :

$$v_p((a)_n) = \sum_{m=0}^{n-1} v_p(-R(a,p)+pQ(a,p)+m) = \sum_{m'} 1+v_p(m'+Q(a,p))$$

où m' parcourt l'ensemble des entiers tels que :

$$0 \le m'p + R(a,p) \le n-1$$

c'est à dire :

$$-1 < -R(a,p)/p \le m' \le (n-1-R(a,p))/p$$

$$0 \le m' \le f(a,p,n) - 1$$

ce qui démontre le lemme pour $h = 1$.

Pour déduire la formule à l'ordre $h+1$ à partir des formules à l'ordre 1 et à l'ordre h , il suffit d'établir les relations suivantes :

$$Q(a,p^{h+1}) = Q(Q(a,p^h),p) \tag{1}$$

$$f(a,p^{h+1},n) = f(Q(a,p^h),p,f(a,p^h,n)) \tag{2}$$

Nous partons de l'égalité :

$$a = -R(a,p^h) + p^h\, Q(a,p^h) = -R(a,p^{h+1}) + p^{h+1}\, Q(a,p^{h+1})$$

Elle montre que $R(a,p^{h+1}) - R(a,p^h)$ est un entier divisible par p^h.En remarquant que cet entier est compris entre $-p^h+1$ et $p^{h+1}-1$, nous trouvons :

$$0 \le (R(a,p^{h+1})-R(a,p^h))/p^h \le p - 1 \tag{3}$$

et comme :

$$Q(a,p^h) = -(R(a,p^{h+1})-R(a,p^h))/p^h + p\, Q(a,p^{h+1})$$

nous obtenons d'une part la formule *(1)* et d'autre part :

$$R(Q(a,p^h),p) = (R(a,p^{h+1})-R(a,p^h))/p^h$$

Posons maintenant :

$$\theta = (n+p^{h+1}-1-R(a,p^{h+1}))/p^h$$
$$= (n+p^h-1-R(a,p^h))/p^h + p - 1 - R(Q(a,p^h),p)$$

de telle sorte que :

$$f(a,p^{h+1},n) = [\theta/p]$$
$$f(Q(a,p^h),p,f(a,p^h,n)) = \big[[\theta]/p\big]$$

La relation $\theta = p\,[\theta/p] + \varepsilon$ avec $0 \le \varepsilon < p$ nous montre :

$$\big[[\theta]/p\big] = \big[[\theta/p] + [\varepsilon]/p\big] = [\theta/p]$$

établissant ainsi la relation *(2)*.□

LEMME 2 : *Pour tout élément* a *de* $\mathbb{Z}_p\setminus(-\mathbb{N})$ *, la suite* $R(a,p^h)$ *tend vers l'infini avec* h *et, pour tout* n *, on a* $f(a,p^h,n) = 0$ *pour* h *assez grand.*

D'après l'inégalité *(3)*, la suite $R(a,p^h)$ est croissante. Si elle ne tend pas vers l'infini elle est donc constante à partir d'un certain rang. La limite p-adique a de la suite $-R(a,p^h)$ appartient alors à $-\mathbb{N}$. Si a n'appartient pas à $-\mathbb{N}$, pour h suffisament grand, on a donc $R(a,p^h) > n$ et alors $f(a,p^h,n) = 0$.□

D'après ces deux lemmes , si a appartient à $\mathbb{Z}_p\setminus(-\mathbb{N})$, on a :

$$v_p((a)_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f(a,p^h,n) \qquad (4)$$

En particulier, on a $R(1,p^h) = p^h-1$ d'où $f(1,p^h,n) = [n/p^h]$ et on retrouve la formule classique qui donne la valuation de $(1)_n = n!$.

Nous posons :

$$Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

LEMME 3 : *Pour tout élément* a *de* $\mathbb{Z}_p$ *, on a :*

$$f(a,p^h,n) - f(1,p^h,n) = Y(\langle n/p^h\rangle - R(a,p^h)/p^h) \qquad (5)$$

On constate que la fonction $f(a,p^h,n) - f(1,p^h,n)$ est périodique de période p^h en n . De plus, si $0 \le n < p^h$, on trouve :

$$f(1,p^h,n) = 0$$
$$f(a,p^h,n) = Y(n-R(a,p^h))=Y(\langle n/p^h\rangle- R(a,p^h)/p^h).\square$$

Si y est un nombre réel, nous définissons $\{y\}$ par les relations :

$$0 < \{y\} \leq 1 \quad \text{et} \quad y - \{y\} \in \mathbb{Z}$$

LEMME 4 : *Soit* a *un nombre de* $\frac{1}{N}\mathbb{Z}\setminus(-\mathbb{N})$ *soit* p *un nombre premier qui ne divise pas* N *et tel que* $p > N|a|$ *et soit* Δ *un entier tel que* $\Delta p \equiv 1$ *(mod* N*). Alors on a :*

$$R(a,p^h)/p^h = \{a\Delta^h\} - a/p^h \ .$$

Comme p et N sont premiers entre eux, un nombre Δ existe bien. et il existe un entier B tel que $\Delta^h p^h = 1 + BN$. L'égalité :

$$a = \frac{A}{N} = AB/(\Delta^h p^h - 1) = -AB + p^h\Delta^h AB/(\Delta^h p^h - 1)$$

montre alors que $R(a,p^h) = AB \ (p^h)$ c'est à dire :

$$R(a,p^h)/p^h = <AB/p^h> = <A\Delta^h/N - A/Np^h> = <a\Delta^h - a/p^h>$$

Maintenant, comme $\{a\Delta^h\}$ appartient à l'ensemble $\left\{\frac{1}{N}, \ldots, \frac{N}{N}\right\}$, et comme $|a/p^h| < 1/N$ par hypothèse, la formule du lemme est démontrée si on remarque que, pour $a\Delta^h$ entier, a est entier positif et $<a\Delta^h - a/p^h> = 1 - a/p^h$.□

IV Caractérisation des fonctions hypergéométriques globalement bornées.

Dans ce paragraphe, nous considérons une fonction hypergéométrique $F(\lambda) = F(\mathbf{a},\mathbf{b};\lambda)$ du type défini dans le paragraphe II. Nous notons N un dénominateur commun aux nombres a_i et b_i , et, pour tout nombre q premier à N , nous choisissons un entier Δ (positif) tel que $\Delta q \equiv 1$ *(mod* N*)* et nous posons :

$$V(x,q) = \sum_{i=1}^{s} Y(x-\{\Delta a_i\}+a_i/q) - \sum_{i=1}^{s} Y(x-\{\Delta b_i\}+b_i/q)$$

$$= \#\left\{ i \ ; \ \{\Delta a_i\}-a_i/q < x \right\} - \#\left\{ i \ ; \ \{\Delta b_i\}-b_i/q < x \right\}$$

de telle sorte que les résultats du paragraphe précédents donnent :

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) = \sum_{h=1}^{\infty} V(<n/p^h>,p^h) \tag{6}$$

D'autre part pour pouvoir énoncer plus commodément les résultats nous introduisons un ordre total sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$y \ll z \iff \{y\} < \{z\} \ \text{ou} \ \left[\{y\} = \{z\} \ \text{et} \ y \geq z\right]$$

et, pour tout entier Δ tel que $0 \leq \Delta < N$ et $(\Delta,N)=1$, nous posons :

$$\mathcal{M}(y,\Delta) = \#\left\{ i \;;\; \Delta a_i \ll y \right\} - \#\left\{ i \;;\; \Delta b_i \ll y \right\}$$

PROPOSITION 1 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) La fonction F est globalement bornée,

2) Pour tout Δ tel que $0 \le \Delta < N$ et $(\Delta, N)=1$, et tout réel y, on a $\mathcal{M}(y,\Delta) \ge 0$.

3) Pour tout Δ tel que $0 \le \Delta < N$ et $(\Delta, N)=1$, et tout entier j $(1 \le j \le s)$, on a $\mathcal{M}(\Delta b_j, \Delta) \ge 0$.

Que 2) entraine 3) est évident, et comme les sauts négatifs de la fonction $\mathcal{M}$ se trouvent aux points Δb_j, 3) entraine 2).

Remarquons que, si $q > 2N \sup(|a_i|,|b_i|)$, on a :

$$\begin{aligned} \{\Delta a_i\} - a_i/q \le \{\Delta b_i\} - b_i/q \quad &\Longleftrightarrow \{\Delta a_i\} - \{\Delta b_i\} \le (a_i - b_i)/q < 1/N \\ &\Longleftrightarrow \{\Delta a_i\} < \{\Delta b_i\} \text{ ou } \left[\{\Delta a_i\} = \{\Delta b_i\} \text{ et } a_i > b_i\right] \\ &\Longleftrightarrow \Delta a_i \quad \Delta b_i \end{aligned}$$

Il résulte de cette remarque que l'on a :

$$\lim_{x \longrightarrow (\{\Delta b_j\} - b_j/q)^+} V(x,q) = \mathcal{M}(\Delta b_j, \Delta) \tag{7}$$

(la fonction V est continue à droite alors que la fonction $\mathcal{M}$ est continue à gauche par suite des choix de Y et $\ll$). Les points $\{\Delta b_j\} - b_j/q$, étant les points de discontinuité à saut négatif de la fonction V, nous constatons que la condition 3) implique que, pour tout $q > 2N \sup(|a_i|,|b_i|)$ et pour tout $x \in]0,1]$, on a $V(x,q) \ge 0$.

D'après la formule *(6)*, nous avons donc, pour tout nombre premier $p > 2N \sup(|a_i|,|b_i|)$:

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) \ge 0$$

ce qui établit la propriété 1).

Supposons maintenant que la propriété 3) n'est pas satisfaite. Il existe donc un nombre j et un entier Δ tels que $\mathcal{M}(\Delta b_j, \Delta) < 0$. Soit p un nombre premier congru à $1/\Delta$ modulo N et tel que $p > 2N \sup(|a_i|,|b_i|,1)$. Nous considérons l'entier :

$$n = R(b_j, p) + 1$$

Pour tout entier $h \ge 2$, on trouve :

$$n/p^h \le 1/p < 1/2N < 1/N - \sup(|a_i|,|b_i|)/p$$

ce qui donne :

$$V(\langle n/p^h \rangle, p^h) = 0$$

en remarquant que, quelque soit l'entier Δ , les nombres $\{\Delta a_i\}$ et $\{\Delta b_i\}$ sont au moins égaux à $1/N$. Il résulte alors du lemme 4 et de l'égalité *(7)* que l'on a :

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) = V(n/p,p) = \mathcal{M}(\Delta b_j, \Delta) < 0$$

Et comme il y a une infinité de nombres premiers p satisfaisant nos conditions, la fonction F n'est pas globalement bornée. □

V Caractérisation des fonctions hypergéométriques localement bornées.

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent et nous posons, pour tout $x \in]0,1]$:

$$\mathcal{N}(x,\Delta) = \#\left\{ i \ ; \ \{\Delta a_i\} < x \right\} - \#\left\{ i \ ; \ \{\Delta b_i\} < x \right\}$$

PROPOSITION 2 : *La fonction F est localement bornée si et seulement si, pour tout Δ tel que $0 \le \Delta < N$ et $(\Delta,N)=1$, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) Pour tout $x \in]0,1]$, $\mathcal{N}(x,\Delta) \ge 0$.

2) Pour tout entier j $(1 \le j \le s)$, $\sum_{h=1}^{\ell(\Delta)} \mathcal{M}(\Delta^h b_j, \Delta^h) \ge 0$. où $\ell(\Delta)$ désigne l'ordre de Δ dans le groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.

Supposons que les conditions 1) et 2) sont satisfaites, et soit p un nombre premier. Nous notons $\mathcal{A}$ l'ensemble formé des a_i et des b_i et Δ le nombre entier qui vérifie les hypothèses de la proposition et tel que $p\Delta \equiv 1 \ (N)$. Pour $\alpha \in]0,1]$, nous posons :

$$I_{\alpha,h} = \left] \inf_{\substack{\{c\}=\alpha \\ c\in\mathcal{A}}} (\{\Delta^h c\} - c/p^h), \sup_{\substack{\{c\}=\alpha \\ c\in\mathcal{A}}} (\{\Delta^h c\} - c/p^h) \right]$$

(pour presque tout α , les intervalles $I_{\alpha,h}$ sont vides). Soit maintenant n un entier positif. Posons :

$$h(n) = \sup \left\{ h \ ; \ \langle n/p^h \rangle \in \bigcup_\alpha I_{\alpha,h} \right\}$$

Si $p^h > N(n + \sup_{c\in\mathcal{A}}|c|)$, le nombre $\langle n/p^h \rangle$ n'appartient pas à $\bigcup_\alpha I_{\alpha,h}$. L'entier $h(n)$ est donc défini (mais peut être nul). Si $h > h(n)$, on trouve, en utilisant la propriété 1) et en remarquant que la position relative de $\langle n/p^h \rangle$ et de $\{\Delta c\}$ pour $c\in\mathcal{A}$ ne dépend que de la valeur de c

modulo 1 c'est à dire de $\alpha = \{c\}$:

$$V(\langle n/p^h\rangle, p^h) = \mathcal{N}(\langle n/p^h\rangle, \Delta^h) \geq 0$$

Maintenant, si $h(n) \neq 0$ et si $p > N \sup_{c\in\mathcal{A}}|c|$, d'après le lemme 4, il existe deux nombres c_1 et c_2 de $\mathcal{A}$, un nombre $\alpha \in]0,1]$ et un entier r tels que :

$$\{c_2\} = \{c_1\} = \alpha \ , \ 0 < r \leq c_1 - c_2$$

$$R(c_1, p^{h(n)}) = R(c_2, p^{h(n)}) + c_2 - c_1$$

$$= p^{h(n)} \langle n/p^{h(n)}\rangle - r \equiv n-r \ (p^{h(n)})$$

Pour tout $h \leq h(n)$, en réduisant les égalités ci-dessus modulo p^h et en remarquant que, pour $k \leq h$, on a $R(b_1, p^h) \equiv R(b_1, p^k) \ (p^k)$ on obtient :

$$R(c_1, p^h) = R(c_2 p^h) + c_2 - c_1 = p^h \langle n/p^h\rangle - r$$

et on constate que $\langle n/p^h\rangle$ appartient à l'intervalle $I_{\alpha,h}$. Il résulte aussi de ce calcul que les sauts négatifs de la fonction $V(\langle n/p^h\rangle, p^h)$,lorsque l'entier n est de la forme :

$$R(c_1, p^{h(n)}) + r + m\, p^{h(n)} \quad \text{avec} \quad 0 < r \leq c_2 - c_1$$

s'obtiennent pour $r = c_1 - b_1 + 1$ avec $\{b_1\} = \alpha$. On constate donc que le minimum de ces fonctions est atteint simultanément. Nous en déduisons les minorations :

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) \geq \sum_{h=1}^{h(n)} V(\langle n/p^h\rangle, p^h)$$

$$\geq \inf_{\{b_1\}=\alpha} \left[\sum_{h=1}^{h(n)} V\left(\frac{R(b_1, p^h)+1}{p^h}, p^h\right) \right]$$

et, en utilisant la relation (7), la condition 2) et en définissant l'entier k par les inégalités :

$$0 < h(n) - k\, \ell(\Delta) \leq \ell(\Delta)$$

on obtient finalement :

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) \geq \inf_{b_1} \left[\sum_{h=1}^{h(n)} \mathcal{M}(\Delta^h b_1, \Delta^h) \right]$$

$$\geq \inf_{b_1} \left[\sum_{h=k\ell(\Delta)+1}^{h(n)} \mathcal{M}(\Delta^h b_1, \Delta^h) \right] \geq -\ \ell(\Delta)\ s$$

ce qui montre que la fonction F est localement bornée.

Supposons maintenant que la condition 1) n'est pas satisfaite et soit p un nombre premier congru à $1/\Delta$ modulo N et tel que $p > 3N$ $sup(|a_i|,|b_i|,2)$. La fonction $V(x,p)$ est négative sur un intervalle de longueur $\frac{1}{N} - 2sup(|a_i|,|b_i|) > 1/3N > 2/p$. Il existedonc un entier m $(0<m<p)$ pour lequel on a $V(x,p) \le -1$ sur l'intervalle $m/p \le x \le (m+1)/p$. On considère alors l'entier :

$$n = m\ (1 + p^{\ell(\Delta)} +\dots+ p^{\lambda\ell(\Delta)})$$

Pour $1 < \nu \le \ell(\Delta)$, et pour tout $c\in A$, il vient :

$$\begin{aligned}<n/p^{\mu\ell(\Delta)+\nu}> &\le m(p^{(\mu+1)\ell(\Delta)}-1)/p^{\mu\ell(\Delta)+\nu}(p^{\ell(\Delta)}-1)\\ &\le p^{\ell(\Delta)-\nu}(p-1)/(p^{\ell(\Delta)}-1)\\ &\le p^{1-\nu} \le 1/3N \le \{\Delta^{\mu\ell(\Delta)+\nu}c\} - c/p^{\mu\ell(\Delta)+\nu}\end{aligned}$$

et on constate que $V(<n/p^{\mu\ell(\Delta)+\nu}>,p^{\mu\ell(\Delta)+\nu}) = 0$.

Pour $0 \le \mu \le \lambda$ on a :

$$<n/p^{\mu\ell(\Delta)+1}> = m/p + \varepsilon$$

avec

$$\varepsilon = m(p^{(\mu+1)\ell(\Delta)}-1)/p^{\mu\ell(\Delta)+1}(p^{\ell(\Delta)}-1) \le 1/p$$

remarquant que $\Delta^{\mu\ell(\Delta)+1} \equiv \Delta\ (mod\ N)$, on voit que :

$$V(<n/p^{\mu\ell(\Delta)+1}>,\Delta^{\mu\ell(\Delta)+1}) \le -1 .$$

En réunissant ces résultats, on obtient finalement :

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) \le -\lambda - 1$$

ce qui montre que la fonction F n'est pas localement bornée.

Si c'est la condition 2) qui n'est pas satisfaite, il existe un indice j et un nombre Δ tels que $\sum_{h=1}^{\ell(\Delta)} M(\Delta^h b_j,\Delta^h) \le -1$. Soit alors p un nombre premier congru à $1/\Delta$ modulo N et tel que $p > 3N\ sup(|a_i|,|b_i|,1)$. Considérons les entiers :

$$n = R(b_j,p^{\lambda\ell(\Delta)}) + 1$$

où λ est un entier. Pour $h > \lambda\ell(\Delta)$, on a :

$$<n/p^h> < 1/p < 1/3N$$

ce qui donne $V(<n/p^h>,p^h) = 0$, et, pour $h\le \lambda\ell(\Delta)$, on a :

$$<n/p^h> = R(b_j-1,p^h)/p^h$$

finalement , en utilisant le lemme 4 et les formules *(6)* et *(7)*, on obtient :

$$v_p((\mathbf{a})_n/(\mathbf{b})_n) = \sum_{h=1}^{\lambda\ell(\Delta)} V(\{\Delta^h b_j\}-(b_j-1)/p^h) = \sum_{h=1}^{\lambda\ell(\Delta)} \mathcal{M}(\Delta^h b_j,\Delta^h)$$

$$= \lambda \sum_{h=1}^{\ell(\Delta)} \mathcal{M}(\Delta^h b_j,\Delta^h) \le -\lambda\cdot$$

et, comme λ est un entier quelconque, la fonction F n'est pas bornée.□

Pour terminer ce paragraphe, nous donnons un exemple de fonction hypergéométrique localement bornée qui n'est pas globalement bornée :

$$F(\lambda) = {}_3F_2(1/3,1/3,2/3;5/3,1;\lambda)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette affirmation à l'aide des propositions 1 et 2 et d'établir l'égalité suivante :

$$F(\lambda^3) = 2\,\lambda^{-2} \int \lambda \left[(1-\lambda^3)^{-1/3} * (1-\lambda^3)^{-1/3}\right] d\lambda$$

où $*$ désigne le produit de Hadamard.

Signalons que cette fonction F est, pour presque tout p , un élément algébrique (car solution bornée d'une équation différentielle à structure de Frobenius forte [2]) bien que n'étant pas une diagonale de fraction rationnelle.

VI Fonctions hypergéométriques de hauteur 1.

Nous appelerons hauteur de la fonction hypergéométrique F l'entier

$$h(F) = \#\left\{ i \;;\; b_i \in \mathbb{Z}\right\} - \#\left\{ i \;;\; a_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

LEMME 5 : *Si F est une fonction hypergéométrique localement bornée, pour tout $x\in]0,1]$ et tout Δ tel que $(\Delta,N)=1$, on a :*

$$0 \le \mathcal{N}(x,\Delta) \le h(F).$$

On sait que $\mathcal{N}(x,\Delta) \ge 0$ (voir proposition 2) .Maintenant, si $(\Delta,N) = 1$ on a aussi $(N-\Delta,N) = 1$ et, si $a \in \frac{1}{N}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$, on trouve $\{(N-\Delta)a\} = 1 - \{\Delta a\}$. On obtient donc :

$$\#\left\{ i \;;\; \{(N-\Delta)a_i\} < x \right\} = \#\left\{ i \;;\; a_i \notin \mathbb{Z} \text{ et } \{\Delta a_i\} > 1-x \right\}$$
$$= s - \#\left\{ i \;;\; a_i \in \mathbb{Z} \right\} - \#\left\{ i \;;\; \{\Delta a_i\} \le 1-x \right\}$$

Il résulte de ce calcul que, pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$0 \le \mathcal{N}(x,N-\Delta) = h(F) - \mathcal{N}((1-x)^{+},\Delta) \tag{8}$$

Nous obtenons alors l'inégalité $\mathcal{N}(x,\Delta) \le h(F)$ pour tout x en utilisant la continuité à gauche de la fonction $\mathcal{N}$.□

REMARQUE : Comme la fonction $\mathcal{N}(x,\Delta)$ n'est pas constante, ce lemme montre que, si la fonction F est localement bornée (et en particulier si elle est globalement bornée), on a $h(F) \ge 1$. Autrement dit, une fonction hypergéométrique ne peut être localement bornée que si au moins l'un des b_i est entier.

Nous dirons que la fonction hypergéométrique F est *réduite* si la différence a_i-b_j n'est entière pour aucun couple d'indices i,j . Pour ces fonctions la proposition 1 se simplifie et montre qu'une fonction hypergéométrique réduite ne peut être localement bornée sans être globalement bornée :

PROPOSITION 1bis : *Soit F une fonction hypergéométrique réduite. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) La fonction F est globalement bornée,

2) Pour tout Δ tel que $0 \le \Delta < N$ et $(\Delta,N)=1$, et tout $x \in]0,1]$, on a $\mathcal{N}(x,\Delta) \ge 0$.

Il suffit de remarquer que, à l'intérieur d'une même classe modulo $\mathbb{Z}$, la fonction $\mathcal{M}$ attachée à une fonction hypergéométrique réduite est monotone.□

Le lemme suivant montre que, pour tester notre conjecture sur les fonctions hypergéométriques de hauteur 1, il suffit d'étudier les fonctions hypergéométriques globalement bornées et réduites de hauteur 1 (il est en effet facile de vérifier que l'ensemble des diagonales de fractions rationnelles est stable par les opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynômiaux).

LEMME 6: *Toute fonction hypergéométrique globalement bornée F de hauteur 1 est de la forme $L(G)$ où G est une fonction hypergéométrique globalement bornée et réduite (de hauteur 1) et où L est un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynômes.*

Nous considérons un b_i . Supposons tout d'abord qu'il exite un indice j tel que $a_j = b_i + r$ avec $r \in \mathbb{N}$ et posons :

$$\delta_i(F) = F(\mathbf{a},\mathbf{b}') \quad \text{avec} \quad b'_i=b_i-1 \quad et \quad b'_j=b_j \quad \text{pour } j\neq i.$$

la relation :

$$(b)_n/(b-1)_n = (b+n-1)/(b-1) = 1 + n/(b-1)$$

se traduit immédiatement par la formule :

$$F = (1 + \frac{1}{(b-1)}\frac{dx}{xd})\ \delta_i(F)$$

La fonction F se déduit donc de la fonction hypergéométrique $G = \delta_i^r(F)$ par un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynômiaux. Par ailleurs, on vérifie facilement que la fonction G ne contient plus b_i (qui se "simplifie" avec a_j) mais reste de hauteur 1 et globalement bornée.

Supposons maintenant que les simplifications précédentes ont été toutes faites. Autrement dit, supposons que chaque b_i est supérieur à tous les a_j qui lui sont congrus modulo $\mathbb{Z}$. Le plus petit élément entier de l'ensemble $\mathcal{A}$ (qui est aussi le plus grand au sens de $\ll$) ne pouvant être un a_j car, dans ce cas, on aurait $\mathcal{M}(a_j+1,1) \leq -1$, aucun a_j n'est entier. Considérons donc un b_i non entier. Nous notons m le nombre de b_j congrus à b_i modulo $\mathbb{Z}$ $(m\geq 1)$ et nous supposons que b_i est le plus petit d'entre eux (c'est à dire le plus grand au sens de $\ll$). Compte tenu des définitions on trouve :

$$0 \leq \mathcal{M}(\Delta b_i,\Delta) \leq \mathcal{N}(\{\Delta b_i\},\Delta) - m \leq 1 - m$$

Donc $m = 1$ et, pour tout Δ , $\mathcal{N}(\{\Delta b_i\},\Delta) = 1$. Comme b_i n'est pas entier, la formule *(8)* donne :

$$1 = \mathcal{N}(\{(N-\Delta)b_i\},N-\Delta) = h(F) - \mathcal{N}(\{\Delta b_i\}^+,\Delta)$$

c'est à dire :

$$\mathcal{N}(\{\Delta b_i\}^+,\Delta) = 0 = \mathcal{N}(\{\Delta b_i\},\Delta) - 1 = \mathcal{M}(\Delta b_i,\Delta)$$

et aucun a_j ne peut être congru à b_i modulo $\mathbb{Z}$ car sa présence augmenterait la valeur de $\mathcal{N}(\{\Delta b_i\}^+,\Delta)$. Comme ceci a lieu pour tout indice i , la fonction F est réduite.□

PROPOSITION 3 : *Toute fonction hypergéométrique F réduite et de hauteur 1 est globalement bornée si et seulement si, pour tout Δ tel que $(\Delta,N) = 1$, les nombres $\exp(2i\pi\Delta a_i)$ et $\exp(2i\pi\Delta b_i)$ sont entrelacés sur le cercle unité.*

Il résulte du lemme 5 que la fonction $\mathcal{N}(x,\Delta)$ ne prend que les valeurs 0 et 1 . Elle a donc alternativement des sauts de $+1$ et de -1 .□

Il est facile de constater que les fonctions :

$$F_j(\lambda) = \lambda^{1-b_j} F(\mathbf{a}',\mathbf{b}';\lambda) \quad \text{avec} \quad a'_i = a_i+1-b_j \quad \text{et} \quad b'_i = b_i+1-b_j$$

sont solutions de la même équation différentielle que F . Si F vérifie les hypothèses de la proposition 3, il en sera de même de la fonction hypergéométrique intervenant dans F_j (passer de **a** à **a'** revient à faire un changement d'origine sur le cercle trigonométrique). La proposition suivante (due essentiellement à KATZ) n'est donc pas surprenante.

PROPOSITION 4 : *Soit F une fonction hypergéométrique réduite, globalement bornée et de hauteur 1 et soit L l'équation différentielle linéaire minimum dont elle est solution. Alors, pour presque tout nombre premier p, l'équation différentielle L a un système complet de solutions modulo p (c'est à dire est de p courbure nulle).*

Posons :

$$P(x) = \prod_{i=1}^{s} (x + a_i) \quad , \quad Q(x) = \prod_{i=1}^{s} (x + b_i)$$

en particulier on a $Q(-1) = 0$. Un calcul élémentaire donne :

$$L(x^n) = Q(n-1)\, x^{n-1} - P(n)\, x^n$$

Soit maintenant p un nombre premier qui ne divise pas N . L'opérateur L est donc représenté dans la base $\left\{1,\dots,x^{p-1}\right\}$ par la matrice :

$$\begin{bmatrix} -P(0) & 0 & 0 & & \text{—}\ 0 \\ Q(0) & -P(1) & 0 & & \vdots \\ 0 & Q(1) & -P(2) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & - & 0 & Q(p-2) & -P(p-1) \end{bmatrix}$$

Or $P(n) = 0$ pour $0 \le n < p$ si et seulement s'il existe un indice i tel que $n \equiv -a_i\ (p)$ et alors, si $p > 2N\ sup(|a_i|,|b_i|)$, d'après le lemme 4, on a $n = R(a_i,p) = p(\{\Delta a_i\}-a_i/p)$. D'après la proposition 3, nous voyons que les zéros modulo p des polynômes P et Q sont entrelacés si bien que la matrice de l'opérateur L est du type :

$$\begin{bmatrix} * & & & & & & & \\ * & * & & & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & * & 0 & & & & \\ & & & \ddots * & \ddots * & & & \\ 0 & & & 0 & * & & & \\ & & & & * & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

où chaque $*$ représente un coefficient non nul. Cette matrice se décompose alors en une somme directe de s matrices du type :

$$\begin{bmatrix} * & & & \\ * & * & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & * & 0 \\ & 0 & \ddots * & \ddots * \end{bmatrix}$$

et il est élémentaire de vérifier que chacune de celle-ci a un noyau de dimension exactement 1. Ceci nous donne donc s (= ordre de L) polynômes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}[\lambda^p]$ qui sont solutions de l'opérateur L .□

COROLLAIRE (modulo la conjecture de GROTHENDIECK si s>2) : *Une fonction hypergéométrique de hauteur* 1 *est globalement bornée si et seulement si elle est algébrique.*

D'après le lemme 6, on peut se ramener au cas des fonctions hypergéométriques réduites. La proposition 4 et la conjecture de GROTHENDIECK permettent alors de conclure. Par ailleurs il est bien connu que les fonctions algébriques sont globalement bornées.□

Ceci prouve notre conjecture dans le cas des fonctions hypergéométriques de hauteur 1.

VII Cas général.

Comme l'ensemble des diagonales de fractions rationnelles est stable par produit de Hadamard, notre conjecture est démontrée pour toute fonction hypergéométrique de hauteur h qui est le produit de Hadamard de h fonctions hypergéométriques bornées de hauteur 1. Ce cas est très fréquent. Cependant, il reste des exemples irréductibles à cette situation. Par exemple la fonction

$$_3F_2(1/9,4/9,5/9;1/3,1;\lambda)$$

(de hauteur 2) est globalement bornée mais ne semble pas être le produit de Hadamard de deux fonctions de hauteur 1.

-o-o-o-o-o-o-

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTOL G. Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard-Fuchs. *G.E.A.U. 12ème année, 1984/85, n°13, 12p.*

[2] CHRISTOL G. Fonctions et éléments algébriques *Pacific Jour. of Math. 125 (1986) 1-37.*

[3] D.V. et.G.V. CHUDNOWSKY : Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions. *Lecture note in math. 1052 (1982) 85-167.*

[4] B. DWORK : On Apéry's differential operator. *G.E.A.U. 8ème année, 1980/81,n° 25, 6p.*

[5] N. KATZ : Algebraic solutions of differential equations. *Invent. Math. 18 (1972) 1-118.*

CHRISTOL Gilles
5 allée des Gradins
91350 GRIGNY