Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Georges Gras

Fonctions L_p de $\mathbb{Q}$. Étude systématique des propriétés congruentielles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. Amice, G. Christol, P. Robba)
14° année, 1986/87, n° 5,

Exposé n° 5

Fonctions L_p de $\mathbb{Q}$ - Etude systématique des propriétés congruentielles

par Georges GRAS

Summary : We explain how to obtain systematically all (known or new) congruential properties concerning the values $L_p(\chi, s)$, of p-adic L-functions of $\mathbb{Q}$, when the character χ and/or $s \in \mathbb{Z}_p$ vary. The main tools are the results of Serre [S] on $\mathbb{Z}_p$-pseudo-measures and our results on eulerian $\mathbb{Z}_p$-distributions. All the basic facts may be found in [G2], [G3], and a survey in [G4] ; some specific applications are developped in [G5], [G6].

Introduction : L'exposé a porté sur un certain nombre d'applications de deux théorèmes de structure concernant les $\mathbb{Z}_p$-pseudo-mesures générant les fonctions L_p de $\mathbb{Q}$ (notamment en ce qui concerne les aspects congruentiels des valeurs $L_p(\chi, s)$ lorsque χ et/ou s varient). Grosso modo on peut dire que le rapprochement de ces résultats structurels fournit une méthodologie complète et systématique pour établir l'ensemble des phénomènes congruentiels standard concernant les valeurs $L_p(\chi, s)$. Certes ces propriétés congruentielles ne font pas partie des phénomènes les plus profonds de la théorie des fonctions L_p, mais elles restent utiles à l'arithmétique classique des classes d'idéaux et unités des corps abéliens.

Nous nous proposons d'évoquer toutes ces propriétés congruentielles générales, puis de constater qu'elles élucident les nombreux cas particuliers qui constituent une littérature abondante, caractérisée par l'extrême dispersion et manque de généralité des méthodes utilisées.

Plutôt que de reprendre en détail les bases techniques, déjà rédigées (notamment dans [G2], [G3], [G5]), nous préférons établir un fil conducteur, à la fois au plan logique et bibliographique, limité, comme déjà dit, aux seuls aspects congruentiels ; nous nous limitons aussi au cas des fonctions L_p de $\mathbb{Q}$, mieux connues, bien que le cas général existe manifestement.

1) <u>Les deux théorèmes de structure</u> : Soit S un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$ contenant la place à l'infini ∞ et le nombre premier p ; un résultat général (dû à Deligne-Ribet [DR] dans le cas des corps totalement réels) donne l'existence d'une pseudo-mesure p-adique λ_S définie dans l'anneau total des fractions de la $\mathbb{Z}_p$-algèbre Λ_{G_S} des mesures p-adiques sur le groupe de Galois G_S de l'extension abélienne maximale S-ramifiée $\mathbb{Q}_S$ de $\mathbb{Q}$ (par commodité nous identifions G_S au groupe topologique $\prod_{q \in S-\{\infty\}} \mathbb{Z}_q^*$). Cette pseudo-mesure λ_S est telle que pour tout caractère d'ordre fini χ de G_S (vu aussi comme caractère de Dirichlet modulo S) on a :

$$L_p(\chi, s) = \langle \chi \langle\ \rangle^{1-s}, \lambda_S \rangle, \text{ pour tout } s \in \mathbb{Z}_p,$$

où $\langle\ \rangle$ est la projection de $\mathbb{Z}_p^*$ sur $1+2p\,\mathbb{Z}_p$, vue également comme caractère de G_S.

Le premier résultat structurel provient de celui de Serre [S, (1. 15)] valable également pour les corps totalement réels ; il part du fait qu'ici on a

$$G_S = A_S \oplus \Gamma,$$

où le p-Sylow $A_{S,p}$ de A_S est fini et où $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ (le sous-groupe A_S fixe la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_\infty$ de $\mathbb{Q}$; on peut prendre Γ fixant $\mathbb{Q}_{S-\{p\}}(\mu_{2p})$, ou encore $\mathbb{Q}_{S-\{2\}}(\sqrt{-2})$ dans le cas $p=2$) :

(1. 1) <u>Théorème</u> : Soit σ un générateur topologique de Γ, et soit α_{A_S} la $\mathbb{Z}_p$-mesure de Haar sur A_S (normalisée par la condition $\langle 1, \alpha_{A_S} \rangle = |A_{S,p}|$) :

(i) Il existe un unique isomorphisme d'algèbres topologiques, de Λ_{G_S} sur $\Lambda_{A_S}[[T]]$, qui à σ associe $1-T$.

(ii) Il existe $c_S \in \mathbb{Z}_p^*$ et $\mu_S \in \Lambda_{G_S}$ tels que

$$\lambda_S = c_S\, \alpha_{A_S} T^{-1} + \mu_S$$

dans l'anneau total des fractions de Λ_{G_S}.

(1. 2) <u>Remarque</u> : Pour $k = \mathbb{Q}$, la constante c_S est la composante sur $\mathbb{Z}_p^*$ de $\log_p \langle \sigma \rangle \prod_{q \in S-\{\infty\}} (1-q^{-1})$ (cf. [G 5, (3. 8)]) ; plus généralement, pour k totalement réel, Colmez a démontré dans [C] la conjecture sur le résidu en $s=1$ de la fonction zêta p-adique de k, ce qui entraîne $c_S \in \mathbb{Z}_p^*$ dès que le régulateur p-adique de k est non nul (cf. [S, (3. 14)]).

Le second résultat structurel provient d'une part des propriétés eulériennes des pseudo-mesures λ_S (i. e. des propriétés des λ_S dans les projections canoniques induites par les projections $G_S \to G_U$, $U \subseteq S$ (cf. [G2, §4] pour le rappel de ces propriétés)), et, d'autre part, du fait que, pour toute place finie ou non $q_o \in S$, les groupes d'inertie H_q, dans $\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}$, des éléments de $S-\{q_o\}$ constituent une somme directe.

(1. 3) <u>Remarque</u> : Le cas du corps de base $\mathbb{Q}$ est assez particulier ; dans le cas général, ces sommes directes n'ont lieu que sous la conjecture de Leopoldt, sont à restreindre aux p-Sylow des groupes d'inertie et ne concernent que les places ne divisant pas p (cf. [G 2, (2. 2)] et [G4, (5. 1), (5. 2)]).

Le théorème de structure pour λ_S dépend directement de la somme directe de groupes d'inertie utilisée et suppose que chacun des facteurs est procyclique (cf. [G3, §2]) :

(1. 4) <u>Notations</u> : Si $2 \notin S$, on désigne par P une partie de S distincte de S (par exemple on peut prendre $P \subseteq S-\{\infty\}$; on a alors la somme directe $\bigoplus_{q \in P} H_q$, dont les composantes H_q sont procycliques). Si $2 \in S$, on peut décomposer H_2 sous la forme $H_{-1} \oplus H_o$, ceci de 2 façons exactement (cf. [G3, §5]), où $H_{-1} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_o \simeq \mathbb{Z}_2$; on considère alors une partie $P \subseteq (S-\{2\}) \cup \{-1, 0\}$ telle que l'on ait aussi une somme directe $\bigoplus_{t \in P} H_t$ de sous-groupes procycliques.

(1. 5) <u>Théorème</u> : Pour toute décomposition en somme directe de sous-groupes procycliques de la forme $\bigoplus_{t \in P} H_t$, il existe des distributions θ_Y, $Y \subseteq P$ (indexées par l'ensemble des parties de P) telles que $T\,\theta_Y \in \Lambda_{G_S}$ et telles que

$$\lambda_S = \sum_{Y \subseteq P} \theta_Y\, \varepsilon_{P-Y}\, x_Y ,$$

où les ε_{P-Y} sont des produits convenables de facteurs eulériens ε_t connus explicitement, et les x_Y des produits de mesures x_t canoniques ([G3, (4. 4), (5. 18)]).

(1. 6) <u>Remarque</u> : Pour les places $q \in S-\{p\}$, les ε_q, x_q sont particulièrement simples ; pour la place p leur forme est plus complexe et provient de tout un aspect, passé ici sous silence, dû au fait que les λ_S n'ont pas directement de bonnes propriétés eulériennes dans les projections de la forme $G_S \to G_U$, $p \notin U$, et qu'il faut d'abord transiter (via la transformée de Mellin p-adique) par les distributions de Stickelberger qui, elles, ont toutes les bonnes propriétés eulériennes (cf. [G3, §3]).

Si l'on compare les résultats des théorèmes (1. 1) et (1. 5), en égalant les parties polaires, on obtient alors l'expression suivante, où l'on a posé $\theta_Y = \beta_Y T^{-1} + \nu_Y$, $\beta_Y \in \Lambda_{A_S}$, $\nu_Y \in \Lambda_{G_S}$:

(1. 7) $$c_S \alpha_{A_S} = \sum_{Y \subseteq P} \beta_Y \varepsilon_{P-Y}(0)\, x_Y(0),$$

où $\gamma(0)$ désigne le terme constant de $\gamma \in \Lambda_{A_S}[[T]]$.

L'existence même d'un terme polaire explicite induit une information non vide sur les θ_Y donnés par (1. 5) ; cette information va porter tout naturellement sur les coefficients β_Y de (1. 7). Disons tout de suite que c'est cette information supplémentaire qui assure l'ultime raffinement des propriétés congruentielles (ou de p-divisibilités) des $L_p(\chi, s)$; on peut aussi expliquer à ce niveau la quasi-impossibilité de retrouver l'influence du terme polaire dans les études classiques des $L_p(\chi, s)$, pour χ <u>fixé</u> : en effet, l'aspect "mesures" est global et équivaut à la connaissance simultanée de <u>toutes</u> les fonctions L_p de $\mathbb{Q}$. Autrement dit l'influence du terme polaire (évidente pour $\zeta_{\mathbb{Q},p}(s) = L_p(1, s)$ qui a un pôle en $s = 1$, mais, a priori, inexistante pour les $L_p(\chi, s)$, $\chi \neq 1$) est en fait non vide au niveau des $L_p(\chi, s)$ dès que le caractère χ est d'ordre une puissance de p.

(1. 8) <u>Remarque</u> : Sans rentrer dans les détails, disons que les coefficients β_Y sont "connus" modulo l'idéal d'augmentation de A_S dans Λ_{A_S} (ce qui veut dire que les intégrales $\langle \chi \langle\ \rangle^{1-s}, \beta_Y \rangle = \chi(\beta_Y)$, χ d'ordre puissance de p, sont connues modulo l'idéal maximal de l'anneau des valeurs $\mathbb{Z}_p(\chi)$ du caractère χ). Le mot "connu" doit être interprété de la façon suivante : si S puis χ (d'ordre puissance de p) sont donnés, alors les nombres $\chi(\beta_Y)$ dépendent élémentairement des Frobenius des éléments de S dans les corps d'inertie correspondants, donc finalement des seuls nombres $\chi_\ell(q)$, $\ell, q \in S - \{\infty\}$, où χ_ℓ est la composante de χ sur le groupe des caractères de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}_{\{\ell\}})$ dans la décomposition $G_S = (\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}_{S-\{\ell\}}) \oplus \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}_{\{\ell\}})$.

En particulier, dans le cas $p = 2$ et χ quadratique, Pioui [Pi] a montré que les $\chi(\beta_Y)$ étaient des déterminants construits à partir des $\chi_\ell(q)$ (on y reviendra aux §§ 2, 3). Il est probable que ces coefficients $\chi(\beta_Y)$ ont, en toute généralité, une expression canonique de type "déterminant", comme dans le cas évoqué ci-dessus, mais ceci n'est pas encore établi.

2) <u>Utilisation des résultats précédents</u> : La forme même du résultat (1. 5) (joint à l'information concernant les β_Y) montre clairement que l'on obtient déjà des résultats standard de p-divisibilités puisque les p-divisibilités des intégrales

$\langle \chi \langle\ \rangle^{1-s}, \epsilon_{P-Y} x_Y \rangle$ sont connues explicitement. Il y a cependant plusieurs façons d'exploiter ce fait et nous allons indiquer trois directions principales où les résultats ont été explicités :

(i) l'étude de la p-divisibilité de $L_p(\chi, s)$, $s \in \mathbb{Z}_p$, χ fixé ([G2], [G 3]) ;

(ii) l'étude du module de continuité de $L_p(\chi, s)$, c'est-à-dire l'étude de la p-divisibilité de $L_p(\chi, t) - L_p(\chi, s)$, $s, t \in \mathbb{Z}_p$, χ fixé ([G3]) ;

(iii) l'étude de relations congruentielles linéaires de la forme $\sum\limits_i c_i L_p(\chi_i, s) \equiv c_o$ (selon un module convenable), les χ_i dépendant simplement du caractère χ ([G 5], [G6]).

(i) <u>p-divisibilités standard</u> : Pour le corps de base $\mathbb{Q}$, nous avons obtenu dans [G3, (0. 2)] un résultat optimum avec en plus la découverte d'une alternative dont aucun cas particulier n'était connu, et qui est la suivante :

Appelons v la valuation normalisée de $\mathbb{Z}_p(\chi)$ (cf. [G3, (0. 1), (ii)]) et $C(s) = C$ l'entier défini dans [G3, (0. 2)] ; alors

(2. 1) $$v(\tfrac{1}{2} L_p(\chi, s)) = C \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Z}_p,$$

<u>ou</u> $$v(\tfrac{1}{2} L_p(\chi, s)) > C \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Z}_p.$$

Signalons que cette alternative repose exclusivement sur l'existence et les propriétés des nombres $\chi(\beta_Y)$ (cf. (1. 7)) et que dans le cas où χ est d'ordre puissance de p les $\chi(\beta_Y)$ sont alors connus (i. e. l'alternative décidable aisément). Le cas de valuation constante (= C) est intéressant en pratique car il signifie que tous les invariants arithmétiques qui dépendent des $\mathbb{Q}_p$-conjugués des valeurs $L_p(\chi, s)$ ont la même p-divisibilité (lorsque χ parcourt l'ensemble des $\mathbb{Q}_p$-conjugués d'un caractère d'ordre puissance de p, la propriété $v(\frac{1}{2} L_p(\chi, s)) = C$ est conservée) ; en pratique ceci concerne les cas $s = 0$ (p-groupes de classes relatives), $s = 1$ (produits de la forme nombre de classes réelles par régulateur p-adique, qui s'interprètent aussi comme l'ordre de p-groupes de torsion associés au corps de classes (cf. [G1])), $s = -1$ (p-partie du noyau modéré du K_2, sous réserve, pour $p = 2$, d'admettre la conjecture de Birch-Tate).

(ii) <u>Module de continuité</u> : Ici encore le résultat a la forme suivante : lorsque χ n'est pas d'ordre puissance de p, on obtient :

(2. 2) $$v(\tfrac{1}{2} L_p(\chi, t) - \tfrac{1}{2} L_p(\chi, s)) \geq D(s, t) = D$$

où D est explicite (cf. [G 3, (0. 3)]).

Lorsque χ est d'ordre puissance de p, on a une information supplémentaire qui prend la forme (cf. [G3, (7.17)]) :

(2.3) $$v\left(\frac{1}{2} L_p(\chi, t) - \frac{1}{2} L_p(\chi, s) - a(s,t)(t-s)\right) \geq D(s,t) = D$$

pour une valeur analogue de D et où $a(s,t)$ dépend explicitement des $\chi(\beta_Y)$. Dans le cas quadratique, Pioui a calculé explicitement $a(s,t)$ qui s'exprime au moyen d'un déterminant constitué essentiellement à partir des symboles de restes quadratiques $\left(\frac{\ell_i}{\ell_j}\right)$, où $S-\{2\} = \{\ell_1, \ldots, \ell_r\}$ (cf. [Pi]) ; cette forme particulièrement simple des coefficients $a(s,t)$ donne les meilleures congruences générales standard de la forme $c_1 h(-m) - c_2 h(m) \log_2 \varepsilon(m) \equiv a \bmod 2^D$, où $h(-m)$, $h(m)$, $\varepsilon(m)$ sont les nombres de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, puis l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, m étant le conducteur de χ (pair), et où c_1, c_2 sont des constantes élémentaires.

Ceci nous permet d'introduire le dernier point qui ne repose pas directement sur le théorème de structure (1.5) mais sur un lemme technique nécessaire à sa démonstration et dont l'application directe donne des relations intéressantes :

(iii) Relations congruentielles linéaires : Ici on ne suppose pas nécessairement que $p \in S$. Le point de départ est la relation (donnée dans [G5, théorème (2.5) et démontrée à partir de [G3, §2]) entre des relèvements convenables des projections d'une mesure sur les différents facteurs d'une décomposition de G_S en somme directe. Pour des raisons déjà évoquées, il est préférable d'appliquer ce résultat aux distributions de Stickelberger μ_S (ce qui donne les relations congruentielles [G5, (3.11), (3.12), (3.14), (3.15)]) ; l'intégration de $\omega\chi^{-1}\langle\ \rangle^s$ par rapport à μ_S (qui redonne $\langle \chi\langle\ \rangle^{1-s}, \lambda_S\rangle$ dès que $p \in S$) conduit aux congruences explicites [G5, (4.4), (4.7), (4.9), (4.12)]. Ces congruences explicites ont été particularisées au cas quadratique (et $p=2$) dans [G6] ; ce dernier article étant en cours de parution, donnons à titre d'information l'une des congruences les plus significatives.

(2.4) Notations : Soient $\ell_1, \ldots, \ell_n$, $n \geq 0$, des nombres premiers impairs distincts et soit $m = \prod_{i=1}^{n} \ell_i$; soient $\pi = \prod_{i=1}^{n} (1-\ell_i^{-1})$, $\eta = (\pi/2)\left(16 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\log \ell_i}{\ell_i - 1}\right)$ et $\xi = \frac{\log 5}{4}$ (où log désigne la fonction logarithme 2-adique).

Pour $\lambda \in \{1,2\}$, $\mu \in \{-1,+1\}$ posons

$$S(-\lambda, \mu) = \sum_{\substack{d|m \\ d \equiv \mu (4)}} (-1)^{n_d} \left(1 - \left(\frac{-\lambda d}{2}\right)\right) h(-\lambda d) \prod_{\substack{\ell | m \\ \ell \nmid d}} \left(1 - \left(\frac{-\lambda d}{\ell}\right)\right)$$

$$S(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{d|m \\ d\equiv\mu(4)}} (-1)^{n_d}\left(2-\left(\frac{\lambda d}{2}\right)\right) h(\lambda d)\, \frac{\log \varepsilon(\lambda d)}{\sqrt{D(\lambda d)}} \prod_{\substack{\ell|m \\ \ell\nmid d}} \left(1-\left(\frac{\lambda d}{\ell}\right)\ell^{-1}\right),$$

où n_d est le nombre de diviseurs premiers de $d>0$, où les fonctions h, ε, D sont, de façon évidente, les nombres de classes, unités fondamentales >1 et discriminants des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm\lambda d})$ (sauf que $h(-1) = \frac{1}{2}$, $h(-3) = \frac{1}{3}$), et où $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ est le symbole de Legendre-Kronecker.

(2. 5) Théorème : On a la congruence :

$$\begin{aligned} &S(-1, 1) + S(-1, -1) + S(-2, 1) + S(-2, -1) \\ &-S(1, 1) - S(1, -1) - S(2, 1) - S(2, -1) \\ &\equiv \eta - (7/3)\,\xi_\pi/2 \text{ modulo } 2^{n+5}. \end{aligned}$$

Remarques : (i) On trouvera un très grand nombre de telles congruences dans [G6, (1. 3), (1. 4)] ; une étude systématique sur ordinateur a montré que tous les modules des congruences écrites étaient les meilleurs possibles (lorsque m varie, à n constant).

(ii) Dans (2. 5), le premier et second membre proviennent directement de l'application des congruences générales entre distributions données en [G5, §2] ; par contre le calcul du module (ici 2^{n+5}) résulte d'une étude fine du terme résiduel qui utilise non trivialement le fait (rappelé en (1. 1), (i)) que l'algèbre Λ_{G_S} est de la forme $\Lambda_{A_S}[[T]]$ (cf. [G6, §5]).

(iv) Conclusion : L'expression (1. 5) doit permettre d'obtenir d'autres types de résultats ; par exemple on peut obtenir facilement des informations sur la dérivée $L'_p(\chi, s)$ des fonctions L p-adiques.

3) Commentaires bibliographiques : Les très nombreuses publications sur le sujet concernent presque exclusivement le cas quadratique (caractères quadratiques, p = 2); on peut donc se restreindre à ce cas (c'est en outre le seul cas où l'interprétation des valeurs $L_2(\chi, s)$, $s = 0, 1$, en termes de classes et unités est particulièrement parlante).

On peut dire historiquement que c'est Hasse qui a étudié dans [H, III] les 2-divisibilités de nombres de classes relatives de corps abéliens en étudiant les formules analytiques, c'est-à-dire les expressions classiques qui ne sont autres que les nombres de Bernoulli $B_1(\chi)$, appelés ainsi ultérieurement par Leopoldt ; mais les résultats sont très partiels.

Ensuite la "conjecture principale" sur les corps abéliens et l'utilisation de l'aspect "théorie des genres" du corps de classes, nous avaient permis dans [G1] de prévoir les p-divisibilités standard des valeurs $L_p(\chi, 0)$ et $L_p(\chi, 1)$; cependant, pour χ d'ordre puissance de p, ces résultats ne tenaient pas complètement compte de l'information analytique issue du terme polaire des pseudo-mesures λ_S, et en outre restaient limitées aux valeurs $s = 0$ et 1 et de façon indépendante, ne pouvant pas conduire à des congruences entre plusieurs valeurs de fonctions L_p.

L'aspect congruentiel a d'abord été marqué par des résultats isolés, indépendants de considérations de nature "fonction L p-adique" :

(i) les congruences de Pizer [P] (1976) portant sur des nombres de classes de corps quadratiques imaginaires, lorsque $n \leq 3$ (notations de (2.4)) ; ces congruences résultent de dénombrements de classes d'isomorphie d'ordres d'Eichler, dans le cadre de la théorie des algèbres de quaternions.

(ii) Celles de Kenku [Ke] (1977) qui sont cependant souvent inexactes (cf. [HW, §1]), pour lesquelles la méthode se situe dans le cadre de la théorie des courbes elliptiques ; il faut noter que les résultats reposent sur une formule du type Riemann-Hurwitz reliant les genres de courbes de la forme $X_o(N)$ et $X_o^U(N)$, où U est un sous-groupe du groupe des involutions d'Atkin-Lehner de $X_o(N)$; cette formule mettant en jeu des nombres de classes de corps quadratiques imaginaires (Newman, Ogg).

Viennent ensuite des congruences issues des formules analytiques complexes classiques, qui expriment essentiellement les nombres de classes (cas imaginaire) ou leur produit par le régulateur 2-adique (cas réel), comme valeurs en $s = 0$ ou 1 de la fonction zéta complexe du corps, ou, ce qui revient au même ici, de la fonction L d'un caractère quadratique. Pour ces congruences, la méthode consiste essentiellement à modifier les expressions explicites classiques de ces valeurs. Les calculs sont en général très complexes et reposent sur une suite d'astuces qui masquent l'aspect structurel et rendent difficile toute généralisation ; citons :

(i) Les congruences générales de Hardy et Williams [HW] (1986) qui relient essentiellement des sommes de la forme $S(-1, 1)$, $S(-2, 1)$, $S(-1, -1)$, $S(-2, -1)$ (cf. (2.4)), donc ne concernant que des corps imaginaires ; le module est en 2^{n+2}. Ces congruences se retrouvent à partir de nos congruences de base [G6, (4.4)] bien que leur expression telle qu'elle est donnée dans [HW], présente quelques distorsions (par exemple dues au fait que pour les diviseurs 3 et 1, ce n'est pas h(-3) et h(-1) qui doivent être utilisés mais

$\frac{1}{3}h(-3)$ et $\frac{1}{2}h(-1)$ (cf. [G6, (1. 1)])).

(ii) Les congruences générales de Lang et Schertz [LS], [L] (1976 et 1985) qui font alors intervenir des corps réels et imaginaires, et qui sont de la forme $L(\theta, 0) \equiv L(\theta, 1) \bmod 2^{n+2}$, pour des caractères quadratiques convenables, ce qui permet de relier $h(-m)$ et le produit $h(m) \times \frac{\log \varepsilon(m)}{\sqrt{D(m)}}$ (cf. (2. 4)) où m est le conducteur de θ (dans [L] il est de plus supposé que $m = \ell_1 \ldots \ell_n$, avec $\ell_i \equiv 1 (8)$ pour tout i) ; le nombre $h(-m)$ pouvant lui-même être relié aux $h(-d)$, $d \mid m$, selon un procédé voisin de celui de (i) ci-dessus.

(iii) Celles de Kaplan et Williams [K], [KW 1, 2, 3] et [W 1, 2], qui se limitent essentiellement au cas des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2p})$, p premier, mais où le module est 16 (i. e. de la forme 2^{n+3}, pour n= 1). La méthodologie est semblable à celle des cas précédents, et on vérifie facilement que ces congruences proviennent de congruences de [G6] concernant 4 sommes S (cf. par exemple [G6, §4, r_{19}, r_{22}]).

(iv) La congruence générale de Hikita [Hi] (1984) qui est du type de celle de [L] mais qui relie $h(-2m)$ et $h(2m) \frac{\log \varepsilon(2m)}{\sqrt{8m}}$ lorsque $\ell_i \equiv 1 (4)$ pour tout i (cf. (2. 4)). La méthode consiste toujours à exécuter des calculs complexes à partir des valeurs $L(\theta, 0)$ et $L(\theta, 1)$; signalons que l'étude de [Hi] n'est pas identique à celle de $L(\theta, 0) - L(\theta, 1)$ mais combine l'étude de cette différence avec celle de la 2-divisibilité de $L(\theta, s)$ (dans [Pi], Pioui explicite nos résultats [G3] pour expliquer ceci en détail).

Examinons pour terminer l'aspect fonctions L 2-adiques. On peut dire que la seule étude antérieure utilisant la théorie des fonctions L 2-adiques est celle de Desnoux [D] (1987) ; cependant, là encore l'aspect structurel est absent et les résultats proviennent aussi de formes explicites de la fonction $L_2(\chi, s)$, mais distinctes des formules classiques "sommées" pour s = 0 et 1 ; la forme utilisée reste beaucoup plus analytique (i. e. grosso modo du type "série d'Iwasawa" ou des formes voisines (ici celles de Barsky [B])). Desnoux atteint alors essentiellement la congruence du théorème (2. 5) pour n= 1 et retrouve ainsi des congruences de Kaplan et Williams.

Bibliographie

[B] D. Barsky, Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa, Groupe d'études d'Analyse ultramétrique, 10° année, 1982/83, n° 13.

[C] P. Colmez, Résidu en $s = 1$ des fonctions zéta p-adiques (à paraître).

[D] P.-J. Desnoux, Congruences dyadiques entre nombres de classes de corps quadratiques (thèse, Université Paris 7) (1987).

[DR] P. Deligne and K. A. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers, Invent. Math., 59 (1980), pp. 227-286.

[G1] G. Gras, Canonical divisibilities of values of p-adic L-functions, J. V. Armitage (Ed.), Journées Arithmétiques d'Exeter (1980), University Press 1982, pp. 291-299.

[G2] G. Gras, Théorie des genres analytique des fonctions L p-adiques des corps totalement réels, Invent. Math., 86 (1986), pp. 1-17.

[G3] G. Gras, Pseudo-mesures p-adiques associées aux fonctions L de $\mathbb{Q}$, Manuscripta Math., 57 (1987), pp. 373-415.

[G4] G. Gras, Pseudo-mesures eulériennes, Sém. de Théorie des Nombres, Bordeaux 1985/86, n° 14, 19 p.

[G5] G. Gras, Relations congruentielles additives entre fonctions L_p de $\mathbb{Q}$, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon 1984-85/1985-86 (Théorie des Nombres).

[G6] G. Gras, Relations congruentielles linéaires entre nombres de classes de corps quadratiques, Acta Arithmetica (à paraître).

[H] H. Hasse, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie-Verlag, Berlin 1952 (réédition 1985).

[Hi] M. Hikita, On the congruences for the class numbers of the quadratic fields whose discriminants are divisible by 8, J. Number Th., 23 (1986), pp. 81-101.

[HW] K. Hardy and K. S. Williams, A congruence relating the class numbers of complex quadratic fields, Acta Arith., 47 (1986), pp. 263-276.

[K] P. Kaplan, Nouvelle démonstration d'une congruence modulo 16 entre les nombres de classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ pour $p \equiv 1\,(4)$, Proc. Japan Acad. (série A), 57 (1981), pp. 507-509.

[Ke] M. A. Kenku, Atkin-Lehner involutions and class number residuality, Acta Arith., 33 (1977), pp. 1-9.

[KW1] P. Kaplan and K. S. Williams, Congruences modulo 16 for the class numbers of $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2p})$ for p a prime congruent to 5 modulo 8, Acta Arith., 40 (1981/1982), pp. 375-397.

[KW2] P. Kaplan and K. S. Williams, On the class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2p})$ modulo 16 for $p \equiv 1(8)$ a prime, Acta Arith., 40 (1981/1982), pp. 289-296.

[KW3] P. Kaplan and K. S. Williams, Congruences for the class numbers of the fields $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm pq})$ with p and q odd primes (to appear).

[L] H. Lang, Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper, deren Diskriminanten nur ungerade Primteiler $p \equiv 1 \bmod 4$ besitzen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 55 (1985), pp. 147-150.

[LS] H. Lang, R. Schertz, Kongruenzen zwischen Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper, J. Number Th., 8 (1976), pp. 352-365.

[P] A. Pizer, On the 2-part of the class number of imaginary quadratic number fields, J. Number Th., 8 (1976), pp. 184-192.

[Pi] R. Pioui, Etude de différences finies de fonctions L 2-adiques (en préparation).

[S] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres, C. R. Acad. Sci., Paris, 287, série A (1978), pp. 183-188.

[W1] K.S. Williams, On the class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ modulo 16, for $p \equiv 1$ modulo 8 a prime, Acta Arith. 39 (1981), pp. 381-398.

[W2] K.S. Williams, Congruences modulo 8 for the class numbers of $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$, $p \equiv 3 \pmod 4$ a prime, J. Number Th. 15 (1981), pp. 182-198.

Georges GRAS
Université de Franche-Comté et CNRS
Faculté des Sciences
U.A. de Mathématiques 040741
F - 25030 Besançon Cedex