B. DWORK

Équations différentielles du second ordre en caractéristique P

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 19, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A11_0>

Groupe d'Etude d'analyse
ultramétrique (1986/87)
n°19 , 12 pages

le 15 décembre 1986

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE EN CARACTERISTIQUE P

D'APRÈS B. DWORK

I Equations différentielles du second ordre.

Nous nous intéressons aux équations différentielles $L = 0$ du second ordre n'ayant que des singularités régulières aux points $\gamma_1,\dots,\gamma_m,\infty$ avec données de Riemann :

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_m & \infty \\ e_1 & & e_m & e_\infty \\ e'_1 & & e'_m & e'_\infty \end{bmatrix}$$

fixées. Un calcul classique (voir la proposition 3) montre que l'on a

$$L = D^2 - a\,D - b$$

$$D = d/dx \quad , \quad a = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x-\gamma_i} \quad , \quad b = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(x-\gamma_i)^2} + \frac{B_i}{x-\gamma_i}$$

$$A_i = e_i + e'_i - 1 \quad , \quad C_i = - e_i\, e'_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} A_i = - e_\infty - e'_\infty - 1 \quad , \quad -e_\infty e'_\infty = \sum_{i=1}^{m} B_i\gamma_i - e_i e'_i$$

Nous constatons que l'équation différentielle est entièrement déterminée par les m paramètres $B_1,\dots,B_m$ soumis aux deux conditions :

$$\sum_{i=1}^{m} B_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} B_i\gamma_i = - e_\infty e'_\infty + \sum_{i=1}^{m} e_i e'_i$$

et donc, par exemple, par les $m-2$ paramètres $B_1,\dots,B_{m-2}$.

Remarque : d'autres paramètrages sont possibles. Par exemple $Y_2,\dots,Y_{m-1}$ où les Y_k sont définis par

$$Y_k = \sum_{i=1}^{m} B_i\gamma_i^k$$

ou encore par les $Z_o,\dots,Z_{m-3}$ où on a posé :

$$\prod_{i=1}^{m}(x-\gamma_i) \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{x-\gamma_i} = \sum_{k=o}^{m-1} Z_k\, x^k$$

Un calcul simple montre que l'on a $Z_{m-1} = Y_0 = 0$, $Z_{m-2} = Y_1 = cste.$

II Généralités en caractéristique $p > 0$.

Dans la suite, K sera un corps de caractéristique $p>0$ qui contient les B_i et le corps $k = \mathbb{F}_p(\gamma_1,\dots,\gamma_m,e_1,e'_1,\dots,e_\infty,e'_\infty)$. Nous noterons ' ou D la dérivation par rapport à x . Il est facile de constater que $D^p(f) = 0$ pour tout élément f de $K(x)$.

Nous définissons deux éléments a_s et b_s de $K(x)$ en posant :

$$D^s = a_s D + b_s + Q L \quad \text{où } Q \text{ appartient à } K(x)\,[D]$$

On vérifie facilement que :

$$a_1 = 1 \quad , \quad b_1 = 0$$

$$a_{s+1} = a'_s + b_s + a_s a \quad , \quad b_{s+1} = b'_s + a_s b \quad (s>1)$$

La traduction de l'équation différentielle L en système différentiel conduit à introduire les matrices :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad G_s = \begin{pmatrix} b_s & a_s \\ b_{s+1} & a_{s+1} \end{pmatrix}$$

qui vérifient la relation de récurrence suivante :

$$G_0 = I \quad , \quad G_{s+1} = G'_s + G_s G$$

Proposition 1 : *Pour tout* $s > 0$, *on a* $G_{sp} = G_p^s$.

Il existe un surcorps différentiel $\mathfrak{K}$ de K et une matrice X de $Gl(2,\mathfrak{K})$ telle que $X' = GX$. On vérifie par récurrence que $D^s(X) = G_s X$. La formule de Leibnitz donne alors :

$$G_{(s+1)p} X = D^p(G_{sp}X) = D^p(G_{sp})X + G_{sp}D^p(X) = G_{sp}\, G_p\, X$$

et la proposition en découle immédiatement.■

Corollaire 2 : *S'il existe un entier* s *tel que* $a_s = b_s = 0$, *alors* $a_{2p} = b_{2p} = 0$.

Par hypothèse on suppose que $G_s = 0$. Il existe donc un entier k pour lequel on a $G_{kp} = 0$. D'après la proposition 1 , la matrice G_p est alors nilpotente. Comme c'est une matrice $2x2$, on a $G_p^2 = G_{2p} = 0$. ■

Définition : *Si* $a_{2p} = b_{2p} = 0$, *on dit que l'équation différentielle* $L = 0$ *est nilpotente. Si* $a_p = b_p = 0$, *on dit que l'équation différentielle* $L = 0$ *est de courbure nulle.*

Proposition 3 : *Si l'équation différentielle* $L = 0$ *est nilpotente, les exposants* $e_i, e'_i (i=1,\ldots,m,\infty)$ *sont dans le corps* $\mathbb{F}_p$ *.*

Pour i fixé, nous posons $y = x-\gamma_i$ (resp. $y = x$ si $i = \infty$) et nous considérons les matrices :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \quad , \quad F = (D(H) + H\, G)\, H^{-1}$$

D'autre part, nous notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices de $Gl(2,K(x))$ qui n'ont pas de pôle en γ_i (resp. qui ont un zéro double à l'infini). Un calcul simple montre que :

$$F = y^{-1} A \pmod{\mathcal{M}} \quad , \text{ avec } \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_i & A_i+1 \end{bmatrix}$$

où on a posé :

$$A_\infty = \sum_{i=1}^{m} A_i = - e_\infty - e'_\infty - 1 \quad , \quad C_\infty = -e_\infty e'_\infty = \sum_{i=1}^{m} B_i \gamma_i - e_i e'_i$$

de telle sorte que la matrice A a les exposants e_i et e'_i (resp. $-e_\infty$ et $-e'_\infty$) pour valeurs propres.

On définit alors les matrices F_s par la récurrence :

$$F_0 = I \quad , \quad F_{s+1} = F'_s + F_s F$$

et on trouve facilement que :

$$F_s = y^{-s} A(A-1)\ldots(A-s+1) \quad \pmod{y^{-s+1} \mathcal{M}}$$

D'autre part on vérifie que :

$$F_{sp}\, H\, X = D^{sp}(HX) = H\, D^{sp}(X) = H\, G_{sp}\, X$$

Si l'équation différentielle $L = 0$, on voit donc que $F_{2p} = 0$ c'est à dire $A(A-1)\ldots(A-2p+1) = 0$. En regardant les valeurs propres de cette dernière matrice, on en déduit que les e_i et les e'_i appartiennent à l'ensemble $0,1,\ldots,2p-1$ c'est à dire à $\mathbb{F}_p$.■

Corollaire 4 : *La fraction rationnelle* a_{sp} *présente au point* γ_i *(resp à l'infini) un pôle d'ordre au plus* $sp-1$ *(resp. un zéro d'ordre au moins* $sp+1$*) et la fraction rationnelle* b_{sp} *présente au point* γ_i *(resp à l'infini) un pôle d'ordre au plus* sp *(resp. un zéro d'ordre au moins* $sp+2$*).*

Si les exposants e_i, e'_i $(i=1,\ldots,m,\infty)$ *sont dans le corps* $\mathbb{F}_p$ *alors la fraction rationnelle* a_{2p} *présente au point* γ_i *(resp à l'infini) un pôle d'ordre au plus* $2p-2$ *(resp. un zéro d'ordre au moins* $2p+2$*) et la fraction rationnelle* b_{2p} *présente au point* γ_i *(resp à l'infini) un pôle d'ordre au* *plus* 2p-1 (*resp. un zéro d'ordre au moins* 2p+3).

Si de plus $e_1 \neq e'_1$ (*c'est à dire si* $(A_1+1)^2 + 4C_1 \neq 0$) *alors la fraction rationnelle* a_p *présente au point* γ_1 (*resp à l'infini*) *un pôle d'ordre au plus* p-2 (*resp. un zéro d'ordre au moins* p+2) *et la fraction rationnelle* b_p *présente au point* γ_1 (*resp à l'infini*) *un pôle d'ordre au plus* p-1 (*resp. un zéro d'ordre au moins* p+3).

Si $F_{sp} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} b_{sp} & a_{sp} \\ b_{sp+1} & a_{sp+1}\end{pmatrix} = G_{sp} = H^{-1} F_{sp} H = \begin{pmatrix}\alpha & \beta y \\ \gamma/y & \delta\end{pmatrix}$$

Le premier résultat résulte immédiatement de ce que F_{sp} appartient à l'ensemble $y^{-sp} \mathcal{M}$.

Posons $P(x) = x(x-1)\ldots(x-p+1)$. Il résulte du calcul de la proposition 3 que la matrice $F_{2p} - y^{-2p} P^2(A)$ appartient à l'ensemble $y^{-2p+1} \mathcal{M}$. Maintenant la matrice A peut se mettre sous la forme $\Delta + N$ où Δ est diagonalisable et N nilpotente et commutant à Δ . Si e_1 et e'_1 appartiennent à $\mathbb{F}_p$, on a évidemment $P(\Delta) = 0$. Comme $N^2 = 0$, on trouve alors :

$$P^2(A) = P^2(\Delta) + 2P'(\Delta)\ P(\Delta)\ N = 0$$

Donc F_{2p} appartient à $y^{-2p+1} \mathcal{M}$. Le deuxième résultat en découle.

Finalement si $e_1 \neq e'_1$ alors $N = 0$ et $P(A) = 0$. Il en résulte alors que F_p appartient à $y^{-p+1} \mathcal{M}$ ce qui donne le dernier résultat.■

III Caractérisation par le nombre de solutions rationnelles.

Proposition 5 : *L'équation différentielle* L = 0 *est de* p-*coubure nulle si et seulement s'il existe deux polynômes* u *et* v *dans* K(x) , *linéairement indépendants sur* $K(x^p)$ *tels que* L(u)=L(v)= 0 .

Si l'équation différentielle $L = 0$ est de p-coubure nulle, on a $G_p = 0$. Dans ces conditions, la matrice :

$$Y = \sum_{s=o}^{p-1} G_s\ (-x)^s/s!$$

vérifie la relation $Y' = - Y\ G$ .Comme $Y(0) = I$, la matrice Y appartient à $Gl(2,K(x))$. On pose $X = Y^{-1}$ de telle sorte que $X' = G X$. On trouve que $X = \begin{bmatrix}u & v \\ u' & v'\end{bmatrix}$ où u et v sont des éléments de $K(x)$ qui vérifient $L(u)=L(v)=0$ et qui sont linéairement indépendants sur le corps des constantes $K(x^p)$. Pour obtenir des solutions polynômes, il suffit alors de multiplier u et v par leur dénominateur à la puissance p.

Réciproquement si les polynômes u et v existent, la matrice $X = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}$ vérifie la relation $X' = G\,X$ et on trouve :

$$G_p\, X = D^p(X) = 0 \blacksquare$$

Proposition 6 : *Si les exposants* $e_i, e'_i (i=1,\dots,m,\infty)$ *sont dans le corps* $\mathbb{F}_p$ *et si* $p>2$ *, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) L'équation différentielle $L=0$ *est nilpotente.*

2) $\Delta = -2a_p a''_p + a'^2_p + a^2_p (a^2 - 2a' + 4b) = 0$ *et si* $a_p=0$ *alors* $b_p=0$.

3) Il existe un polynôme non nul u *dans* $K(x)$ *tel que* $L(u) = 0$.

1)⇒2). Nous savons, par définition, que $a_{2p} = b_{2p} = 0$. La relation $G_{2p} = G_p^2$ et les formules de récurrence donnent :

$$0 = a_{2p} = b_p a_p + a_p a_{p+1} = a_p (2b_p + a'_p + a_p a)$$

$$0 = b_{2p} = b_p^2 + a_p b_{p+1} = b_p^2 + a_p b'_p + a_p^2 b$$

On constate bien que, si $a_p = 0$, alors $\Delta = b_p = 0$. Si $a_p \neq 0$, on trouve $2b_p = -a'_p - a_p a$ et la deuxième égalité devient $\Delta/4 = 0$.

2)⇒3) Le cas $a_p = b_p = 0$ résulte de la proposition 5 . Supposons donc $a_p \neq 0$. Pour chaque i nous choisissons un entier n_i congru à $A_i/2$ modulo p (ceci est possible car, par hypothèse, A_i appartient à $\mathbb{F}_p$ et $p \neq 2$) et nous posons :

$$\theta = \prod_{i=1}^{m} (x - \gamma_i)^{n_i}$$

de telle sorte que $\theta'/\theta = a/2$. On trouve $\theta''/\theta = (2a' + a^2)/4$ et un calcul élémentaire permet de vérifier que :

$$L(\theta\, a_p^{(p+1)/2}) = \theta\, a_p^{(p-3)/2}\, \Delta/4 = 0$$

Autrement dit la fraction rationnelle $u = \theta\, a_p^{(p+1)/2}$ de $K(x)$ qui est non nulle vérifie $L(u)=0$. On en déduit, comme dans la proposition 5, une solution polynôme.

3)⇒1). Dans un surcorps différentiel $\mathfrak{K}$ de $K(x)$, on considère un élément f tel que $f' = (\theta/u)^2$. On a $f''/f' = a - 2u'/u$ et un calcul élémentaire donne :

$$L(uf) = L(u)\, f = 0$$

On obtient donc le système :

$$a_{2p}\, u' \quad + b_{2p}\, u \;=\; D^{2p}(u) \;=\; 0$$

$$a_{2p}\,(uf)' + b_{2p}\, uf = D^{2p}(uf) = u\, D^{2p}(f) = u\, D^{2p-1}((\theta/u)^2) = 0$$

et comme le déterminant $\begin{vmatrix} u & uf \\ u' & (uf)' \end{vmatrix} = -u^2 f' = \theta^2$ n'est pas nul, on en déduit que $a_{2p} = b_{2p} = 0$. ■

IV Etude de Δ .

A partir de maintenant nous supposons que $p>2$. Nous posons :

$$4\rho = (a^2 - 2a' + 4b) \quad , \quad \mathcal{L} = D^2 - \rho$$

et nous définissons deux éléments α_s et β_s de $K(x)$ en posant :

$$D^s = \alpha_s\, D + \beta_s \;+ Q\, \mathcal{L}$$

où Q appartient à $K(x)\,[D]$.

Lemme 1 : *Les conditions* $L(\theta u) = 0$ et $\mathcal{L}(u) = 0$ *sont équivalentes.*

Il suffit de vérifier que $L(\theta u) = \theta\, \mathcal{L}(u)$.■

Lemme 2 : *On a* $\alpha_p = a_p$ *et* $\beta_p = b_p + a_p a/2$.

Quelque soit l'élément u d'un surcorps différentiel $\mathfrak{K}$ de $K(x)$ tel que $\mathcal{L}(u) = 0$ on trouve en utilisant le lemme 1 :

$$\theta(\alpha_p u' + \beta_p u) = \theta\, D^p(u) = D^p(\theta u) = a_p(\theta u)' + b_p \theta u$$

Formule qui permet de conclure.■

Lemme 3 : *Pour* $p>3$ *et* $s\geq 6$ *, la fraction rationnelle*

$$\alpha_s - (s-2)\, D^{s-3}(\rho) - \left[\frac{(s-2)(s-3)(s-4)}{6} + s-4\right] \rho\, D^{s-5}(\rho)$$

s'exprime comme un polynôme en $\rho, \rho', \dots, D^{s-6}(\rho)$ *et la fraction*

$$\beta_s - D^{s-2}(\rho) - \left[\frac{(s-2)(s-3)}{2} + 1\right] \rho\, D^{s-4}(\rho)$$

s'exprime comme un polynôme en $\rho, \rho', \dots, D^{s-5}(\rho)$.

On a les formules de récurrence :

$$\alpha_2 = 0 \quad , \quad \beta_2 = \rho \quad , \quad \alpha_{s+1} = \alpha'_s + \beta_s \quad , \quad \beta_{s+1} = \beta'_s + \rho\alpha_s$$

desquelles on déduit :

$$\alpha_3 = \rho \quad , \quad \alpha_4 = 2\rho' \quad , \quad \alpha_5 = 3\rho'' + \rho^2 \quad , \quad \alpha_6 = 4D^3(\rho) + 6\rho\rho'$$

$$\beta_3 = \rho' \quad , \quad \beta_4 = \rho^2 + \rho'' \quad , \quad \beta_5 = D^3(\rho) + 4\rho\rho' \quad , \quad \beta_6 = D^4(\rho) + 7\rho\rho'' + 4\rho'^2 + \rho^3$$

On vérifie les formules pour $s=6$ (elles sont fausses pour $s=5$ à cause du terme en ρ^2) puis par récurrence.

Lemme 4 : *Pour* $p>2$, Δ' *est un polynôme en* $\rho, \dots, D^{s-3}(\rho)$.

On calcule :

$$\Delta' = a_p(-2D^3(a_p) + 8a_p\,\rho + 4a_p\,\rho')$$

Pour $p = 3$, on trouve :

$$\Delta' = -2\,\rho\,D^3(\rho) = 0$$

Pour $p = 5$, on trouve :

$$\Delta' = (3\,\rho'' + \rho^2)(-\,6\,D^3(\rho)) = 0$$

Pour $p > 5$, d'après le lemme 3, nous avons, à des polynômes en $\rho,\dots,D^{p-3}(\rho)$ près :

$$a_p = o \quad , \quad a'_p = -2\,D^{p-2}(\rho)$$

$$a''_p = -2\,D^{p-1}(\rho) \quad , \quad D^3(a_p) = -2\,D^p(\rho) - 8\,\rho\,D^{p-2}(\rho)$$

c'est à dire :

$$\Delta' = 4\,a_p\,D^p(\rho) = 0 \qquad \blacksquare$$

Lemme 5 : *Tout polynôme* P *de* $\mathbb{F}_p[X_0,\dots,X_{p-3}]$ *qui s'annule pour* $X_k = D^k(u''/u)$ *quelque soit l'élément non nul* u *du corps* K(x) *, où* K *est un corps quelconque de caractéristique* p>2 *, est identiquement nul.*

On prend $K = \mathbb{F}_p(\delta_0,\dots,\delta_{p-1})$ et $u = \delta_0 + \delta_1 x + \dots + \delta_{p-1}x^{p-1}$. Des relations $D^k(u) = k!\,\delta_k + \dots$, pour $0 \le k \le p-1$, on déduit :

$$\mathbb{F}_p(x,u,u',\dots,D^{p-1}(u)) = \mathbb{F}_p(x,\delta_0,\dots,\delta_{p-1})$$

Par ailleurs, nous posons $\eta_i = D^i(u)/u$ et $\eta_2 = \rho$. La relation :

$$\eta'_i = D^{i+1}(u)/u - u'D^i(u)/u^2 = \eta_{i+1} - \eta_1\eta_i$$

qui donne en particulier $\eta'_1 = \rho - \eta_1^2$, permet de démontrer par récurrence que, pour $s > 1$:

$$\mathbb{F}_p(\eta_1,\dots,\eta_s) \subset \mathbb{F}_p(\eta_1,\rho,\rho',\dots,D^{s-2}(\rho))$$

c'est à dire :

$$\mathbb{F}_p(\eta_1,\dots,\eta_{p-1}) \subset \mathbb{F}_p(\eta_1,\rho,\rho',\dots,D^{p-3}(\rho))$$

Nous en déduisons les inégalités suivantes où dt désigne le degré de transcendance du corps engendré sur le corps $\mathbb{F}_p$:

$$\begin{aligned} p+1 &= dt(x,\delta_0,\dots,\delta_{p-1}) = dt(x,u,u',\dots,D^{p-1}(u)) \\ &= dt(x,u,\eta_1,\dots,\eta_{p-1}) \le dt(x,u,\eta_1,\rho,\rho',\dots,D^{p-3}(\rho)) \\ &\le dt(\rho,\rho',\dots,D^{p-3}(\rho)) + 3 \end{aligned}$$

Par suite nous trouvons :

$$dt(\rho,\rho',\ldots,D^{p-3}(\rho)) = p-2$$

En particulier le polynôme P qui vérifie $P(\rho,\rho',\ldots,D^{p-3}(\rho)) = 0$ doit être identiquement nul.∎

Corollaire 7 : *Si les exposants* e_i, e'_i $(i=1,\ldots,m,\infty)$ *sont dans le corps* $\mathbb{F}_p$ *alors on a* $\Delta' = 0$.

Si $p=2$, on vérifie immédiatement que $\Delta = 0$. Si $p>2$, et s'il existe un élément u de $K(x)$, non nul, tel que $\rho = u''/u$, c'est à dire tel que $\mathcal{L}(u) = 0$, soit, d'après le lemme 1, $L(\theta u) = 0$, alors, d'après la proposition 6, l'équation différentielle $L=0$ est nilpotente et on a $\Delta=0$ donc $\Delta'=0$. Le corollaire est donc une conséquence immédiate des lemmes 4 et 5 .∎

Remarque : Pour $p>0$ la condition $\Delta' = 0$ est équivalente à la condition $\mathcal{L}_2(a_p) = 0$ où $\mathcal{L}_2 = D^3 - 4\rho D - 2\rho'$ est le carré symétrique de $\mathcal{L}$. Autrement dit le corollaire précédent exprime que $\theta^2 a_p$ est solution du carré symétrique de L (θ^2 est un wronskien de L). Dans le cas où l'équation $L=0$ est nilpotente ceci est une conséquence immédiate de ce que $\theta a_p^{1/2}$ est solution de L .

Lemme 6 : *Si les exposants* $e_i, e'_i (i=1,\ldots,m,\infty)$ *sont dans le corps* $\mathbb{F}_p$ *alors la fraction rationnelle* Δ *présente au point* γ_i *(resp à l'infini) un pôle d'ordre au plus* $2p-1$ *(resp. un zéro d'ordre au moins* $2p+1$*).*

Nous reprenons les notations de la proposition 3. D'après le corollaire 4 (première partie) il existe λ dans K tel que :

$$a_p - \lambda\, y^{1-p} \in y^{2-p} \mathcal{M}$$

On trouve alors :

$$a'_p - \lambda\, y^{p} \in y^{1-p} \quad , \quad a''_p \in y^{-p} \mathcal{M}$$

et comme :

$$a - A_1 y^{-1} \in \mathcal{M} \quad , \quad b - C_1 y^{-2} \in y^{-1} \mathcal{M}$$

On obtient :

$$\Delta - \lambda^2(1+A_1^2+2A_1+4C_1)\, y^{-2p} \in y^{1-2p} \mathcal{M}$$

Le lemme est alors une conséquence du corollaire 4 (deuxième partie si $(1+A_1^2+2A_1+4C_1) = 0$, troisième sinon).∎

Corollaire 8 : *Si les exposants* e_i, e'_i $(i=1,\ldots,m,\infty)$ *sont dans le corps* $\mathbb{F}_p$ *, il existe des polynômes* P_i *de* $k[B_1,\ldots,B_m]$ *tels que*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} P_i(x-\gamma_i)^{-p} \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} P_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^p P_i$$

D'après le lemme 6, on a :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{2p-1} Q_{i,k}(x-\gamma_i)^{-k} \quad \text{avec} \quad Q_{i,k} \in k[B_1,\dots,B_m]$$

et, d'après le corollaire 7, on a $kQ_{i,k}=0$,c'est à dire $Q_{i,k}=0$ pour $k\neq p$. On obtient donc le corollaire avec $P_i = Q_{i,p}$. Les deux relations liant les P_i s'obtenant en examinant ce qui se passe à l'infini.■

La condition $\Delta=0$ (nécessaire pour que l'équation $L=0$ soit nilpotente) est donc équivalente au système de $m-2$ équations algébriques $P_i=0$ $(1\leq i\leq m-2)$ entre les $m-2$ variables indépendantes $B_1,\dots,B_{m-2}$. Nous allons démontrer que ces équations forment une suite régulière, c'est à dire définissent une sous-variété de dimension 0 (autrement dit un ensemble fini de points) de l'espace affine $spec(k[B_1,\dots,B_{m-2}])$.

Lemme 7 : *En posant* $Q = \sum_{i=1}^{m} B_i(x-\gamma_i)^{-1}$ *et en notant* deg *le degré d'un polynôme en l'ensemble des variables* $B_1,\dots,B_{m-2}$ *, on obtient :*

$$\deg(\beta_{2s} - Q^s) \leq s-1 \quad , \quad \deg(\alpha_{2s+1} - Q^s) \leq s-1$$

$$\deg(\alpha_{2s} - s(s-1)\, Q^{s-2}Q') \leq s-2 \quad , \quad \deg(\beta_{2s+1} - s^2\, Q^{s-1}Q') \leq s-1$$

On fait la vérification par récurrence. Pour $s=1$ on constate que

$$\beta_2-Q = \rho-Q = \sum_{i=1}^{m} C_i(x-\gamma_i)^{-2} + \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(x-\gamma_i)^{-1}\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} A_i(x-\gamma_i)^{-1}$$

est bien un polynôme de degré 0 en les B_i . Ensuite les formules :

$$\begin{aligned}
\alpha_{2s+1} - Q^s &= \alpha'_{2s} + \beta_{2s} - Q^s\\
\beta_{2s+1} - s^2Q^{s-1}Q' &= (\beta_{2s}-Q^s)' + (\alpha_{2s}-s(s-1)Q^{s-2}Q')Q + \alpha_{2s}(\rho-Q)\\
\beta_{2s} - Q^s &= \beta'_{2s-1} + \alpha_{2s-1}Q - Q^s + \alpha_{2s-1}(\rho-Q)\\
\alpha_{2s} - s(s-1)Q^{s-2}Q' &= (\alpha_{2s-1}-Q^{s-1})' + \beta_{2s-1} - (s-1)^2Q^{s-2}Q'
\end{aligned}$$

permettent de conclure.■

Proposition 9 : *Les polynômes* P_i *du corollaire 8 sont de la forme :*

$$P_i = B_i^p + Q_i(B_1,\dots B_m)$$

où les Q_i *sont des polynômes à coefficients dans* k *de degré strictement inférieur à* p .

D'après le lemme 7 , on a :

$$deg(\alpha_p - Q^{(p-1)/2}) \le \frac{p-3}{2}$$

on en déduit en particulier :

$$deg(\alpha''_p) \le deg(\alpha'_p) \le deg(\alpha_p) \le \frac{p-1}{2}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$deg(\Delta - Q^p) \le p-1$$

c'est à dire :

$$deg\left[\sum_{i=1}^{m} P_i(x-\gamma_i)^{-p} - \sum_{i=1}^{m} B_i^p(x-\gamma_i)^{-p}\right] \le p-1$$

Théorème : *Si les exposants* e_i, e'_i $(i=1,\ldots,m,\infty)$ *sont donnés et si* $p>2$ *alors il existe au plus* p^{m-2} *valeurs des paramètres* B_i *qui donnent un équation nilpotente. Parmi ces valeurs, il en existe au plus* $(\frac{p-1}{2})^{m-2}$ *qui donnent une équation de courbure nulle.*

Si $L=0$ est une équation nilpotente, alors, d'après la proposition 3 , les exposants e_i et e'_i sont dans $\mathbb{F}_p$ et, d'après la proposition 6 , on a $\Delta=0$. Daprès le corollaire 8 , ceci est équivalent au système $P_i=0$ $(i=1,\ldots,m-2)$. Maintenant, il est clair que les polynômes B_i $(i=1,\ldots,m-2)$ forment une suite régulière ([ ]) . Il résulte alors de la proposition 9 et de ([ ]) que les polynômes P_i $(i=1,\ldots,m-2)$ eux-mêmes forment une suite régulière. Il en résulte que la variété $\{P_i\}$ est de dimension nulle et a p^{m-2} points.

Pour que l'équation $L=0$ soit de courbure nulle, on doit avoir $a_p = 0$. En regardant le coefficient des termes $(x-\gamma_i)^{(1-p)/2}$, et pour cela en utilisant le lemme 7 , on trouve que doivent être vérifiées des conditions du type :

$$B_i^{(p-1)/2} + R_i = 0$$

avec $deg(R_i) < \frac{p-1}{2}$. Un raisonement analogue au précédent permet alors de conclure.■

Remarque : Si les exposants sont dans $\mathbb{F}_p$ et si la courbure n'est pas nulle, alors les conditions $\{P_i=0\}$ sont suffisantes pour que l'équation soit nilpotente. Nous n'avons pas de telle condition suffisante pour décider si l'équation est de courbure nulle.

IV Une application en caractéristique nulle.

Nous allons utiliser le théorème précédent pour obtenir un résultat conjecturé par DWORK. Ce résultat montre qu'il n'existe pas de famille algébrique non constante d'équations différentielles globalement nilpotentes dont les singularités soient fixes. L'idée de la démonstration est due à DENEF.

Rappelons tout d'abord une définition. Soit $L=0$ une équation différentielle à coefficients dans $K(x)$ où K est un corps de caractéristique nulle. Comme il n'y a qu'un nombre fini de coefficients qui interviennent, on peut remplacer le corps K par une extension de type fini du corps des nombres algébriques $\tilde{\mathbb{Q}}$. Autement dit nous nous ramenons au cas où le corps K est une extension algébrique du corps $\tilde{\mathbb{Q}}[u_1,\dots,u_\mu]$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathbb{Q}}$, cela prend alors un sens de réduire l'équation modulo $\mathfrak{p}$ (les u_i étant supposés de valuation $\mathfrak{p}$-adique nulle) et on constate que, pour différents choix des u_i, les équations réduites ne diffèrent que pour les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ divisant un nombre fini de nombres premiers. La définition suivante prend alors un sens.

Définition : Une équation différentielle est dite globalement nilpotente si, pour presque tout nombre premier p et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Q}$ au-dessus de p , la matrice G_p (avec les notations du paragraphe II) est nilpotente.

Corollaire : *Soit* K *un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit* L=0 *une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients dans* K(x) *globalement nilpotente. Si nous notons* γ_i $(1\le i\le m)$ *les singularités de* L *et si* k *est la clôture algébrique du corps* $\mathbb{Q}[\gamma_1,\dots,\gamma_m]$ *, alors les coefficients de* L *appartiennent au corps* k(x) .

Il résulte d'un théorème de Katz [1] que, sous les hypothèses du corollaire, l'équation différentielle $L=0$ n'a, comme singularités, que des points singuliers réguliers avec exposants rationnels. Autrement dit, nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe I, et nous trouvons que les A_i et les C_i appartiennent à $\mathbb{Q}$. Il ne reste plus qu'à étudier les B_i .

Nous considérons le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ avec les symboles +, . , les symboles logiques $\wedge$ (et) , $\vee$ (ou), $\neg$ (non), $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ et les constantes γ_i . Toute formule de $\mathcal{L}$ peut être interprètée dans n'importe quel corps algébriquement clos qui contient le corps k ou l'un des corps k_p clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p[\gamma_1,\dots,\gamma_m]$. Nous utiliserons le lemme suivant (élimination des quantificateurs pour les corps algébriquement clos) qui n'est rien d'autre qu'une variante de la théorie classique de l'élimination.

Lemme 8 : *Si* $\phi(x_1,\dots,x_m)$ *est une formule de* $\mathcal{L}$ *, alors il existe une* *formule sans quantificateurs* $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$ *telle que* $\phi \Leftrightarrow \varphi$ *soit valide dans les corps* k *et* k_p .

On utilise le résultat classique qui concerne le cas où les seules constantes sont **0** et **1** en remplaçant les γ_i par des variables et ensuite on réintroduit ces constantes.■

Le corps $k(B_1,\ldots,B_m)$, dont nous noterons encore K la clôture algébrique par un léger abus de notation, est isomorphe au corps $k(x_1,\ldots,x_n)/(\mathcal{R}(x_1,\ldots,x_n))$ où $\mathcal{R}$ est un polynôme à coefficients dans l'anneau $\mathcal{O}$ des éléments de k qui sont entiers sur $\mathbb{Z}[\gamma_1,\ldots,\gamma_m]$. Il existe donc des polynômes $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}$ de $\mathcal{O}[x_1,\ldots,x_n]$ tels que l'ont ait $B_i = \mathcal{P}_i/\mathcal{P}$ pour $0 \le i \le m$. Nous considérons alors la formule :

$$\phi \; : \; \exists(x_1,\ldots,x_n)(y\mathcal{P} = \mathcal{P}_i \wedge \mathcal{P} \neq 0 \wedge \mathcal{R} = 0)$$

D'après le lemme 8, il existe une formule :

$$\varphi \; : \qquad (Q_{10}(y)\neq 0 \wedge Q_{11}(y)=0 \wedge \ldots \wedge Q_{1s}(y)=0) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee (Q_{r0}(y)\neq 0 \wedge Q_{r1}(y)=0 \wedge \ldots \wedge Q_{rs}(y)=0)$$

où les Q_{ij} sont des polynômes de $\mathcal{O}[X]$, équivalente à la précédente dans tout corps algébriquement clos. En particulier, comme ϕ est vérifiée, pour $y = \mathcal{B}_i$, dans le corps K , il en est de même de φ . Pour démontrer le corollaire, il suffit de démontrer que, pour chaque indice i il existe un indice $j > 0$ tel que le polynôme Q_{ij} ne soit pas identiquement nul.

Supposons qu'il exite un indice 1 pour lequel on ait $Q_{1j} = 0$ pour tout indice $j>0$. On a $Q_{10}\neq 0$ car sinon la formule φ pourrait être simplifiée. Par hypothèse, pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$, l'équation différentielle réduite modulo $\mathfrak{p}$ est nilpotente. Nous pouvons donc choisir un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que l'équation réduite soit nilpotente, tel que les polynômes Q_{10} et $\mathcal{P}$ ne soient pas identiquement nuls modulo $\mathfrak{p}$ et tel que les γ_i aient des réductions distinctes. Pour les différentes spécialisations des x_i $(1 \le i \le n)$ dans le corps $k_{\mathfrak{p}}$, nous obtenons les spécialisations de la réduction de B_i. Ces dernières sont donc définies par la formule φ . En particulier, parmi elles, nous trouverons toutes les valeurs de y qui vérifient $(Q_{10}(y)\neq 0)$ c'est à dire une infinités de valeurs distinctes pour les B_i correspondants à des x_i donnés ce qui est contraire au théorème 10 .■

bibliographie

[1] **KATZ N.**, A conjecture in the arithmetic theory of differential equations,

bibliographie

[1] **KATZ N.**, A conjecture in the arithmetic theory of differential equations, *Bull. Soc. Math. France 110 (1982) 203-239 ; corr. 347-348.*

CHRISTOL Gilles
Université Paris 6
Tour 45-46 5ème étage
4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05