ERNST-ULRICH GEKELER

Méthodes analytiques rigides dans la théorie arithmétique des corps de fonctions

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 13 (1985-1986), p. 47-54
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1985-1986__13__47_0>

METHODES ANALYTIQUES RIGIDES DANS LA THEORIE ARITHMETIQUE DES CORPS DE FONCTIONS

Ernst-Ulrich Gekeler

0. Introduction. Un "corps de fonctions" K est toujours un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments, avec corps des constantes $\mathbf{F}_q$.

Il est bien connu qu'il y a des analogies fortes entre l'arithmétique de K et celle des corps de nombres contenus dans $\mathbf{C}$. Beaucoup des problèmes de la "théorie des nombres" peuvent être traduits en "théorie des fonctions", et souvent, on peut utiliser des techniques de la dernière dans la première.

Dans cette conférence, je veux montrer une relation entre

- des valeurs spéciales de la fonction zêta complexe de K , et
- l'arithmétique de certaines fonctions analytiques rigides en caractéristique p,

généralisant ainsi les conjectures/théorèmes de Brumer, Stark, Mazur, Tate, Deligne dans le cas des corps de fonctions (voir [12]).

1. Les espaces symétriques. Soient K un corps de fonctions, ∞ une place fixée de K de degre δ, A l'anneau des fonctions f dans K entières en dehors de ∞, K_∞ le complété de K, O_∞ l'anneau des entiers, π une uniformisante et k le corps résiduel de K_∞. On normalise la fonction degré deg: $K_\infty \longrightarrow \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ par $\deg \pi = -\delta$, et on pose $|x| := q^{\deg x}$. A est un sous-anneau discret et cocompact de K_∞, et le quadruple (K, A, K_∞, C), ou C est le complété d'une clôture algébrique de K_∞, est analogue à $(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C})$.

Soit $r \geq 2$ et $\mathbf{T}^r$ l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL(r, K_\infty)$. C'est un complexe simplicial infini contractile de dimension r-1 dont les sommets sont les classes de similarité des O_∞-réseaux L dans K_∞^r. Un ensemble de classes $\{(L_0), \ldots, (L_i)\}$ est un i-simplexe si l'on peut choisir les L_i de telle sorte que $L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_i \subsetneq \pi^{-1} L_0$. On pose

$\mathbf{T}^r(\mathbf{R}) = \{$points de la réalisation de $\mathbf{T}^r\}$. Cet ensemble correspond, d'après Goldman-Iwahori [5], à l'ensemble des classes des normes réelles sur K_∞^r.

Soit $\quad \Omega^r = \mathbf{P}^{r-1}(C) - \bigcup\{\text{hypersurfaces } K_\infty\text{- rationnelles}\}$

$\quad\quad = \{(z_1:\ldots:z_r) \mid \text{les } z_i \text{ sont } K_\infty\text{- indépendants}\}$

$\quad\quad = \{(z_1,\ldots,z_{r-1}) \mid z_1,\ldots,z_{r-1},1 \text{ sont indépendants}\}$

et $\quad \Omega^1 = \text{point}.$

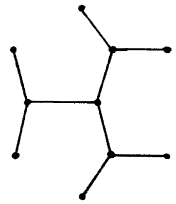
L'application

$\lambda: \Omega^r \longrightarrow \mathbf{T}^r(\mathbf{Q})$ (= points de $\mathbf{T}^r(\mathbf{R})$ a coordonnées rationnelles)

$z \longmapsto$ classe de la norme $|\ |_z$, où $|x_1..x_r|_z := |\Sigma\, x_i z_i|$

est bien définie (parce que $|C^*| = q^{\mathbf{Q}}$), surjective, et les ensembles λ^{-1}(simplexe) sont rationnels dans $\mathbf{P}^{r-1}(C)$. Ainsi, on obtient une structure d'espace analytique sur Ω^r.

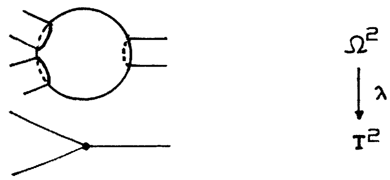
Exemple: $r = 2$, $q = 2$

$\mathbf{T}^2 =$ ...  ...

$\lambda^{-1}(0\text{-simplexe}) \cong \mathbf{P}^1(C) - \bigcup_{c\,\in\,\mathbf{P}^1(k)} B(c,1)$

$\lambda^{-1}(1\text{-simplexe}) \cong \{z \in C \mid |z| = 1\}.$

Image suggestive:



Le groupe $G(K_\infty) = GL(r,K_\infty)$ opère sur Ω^r et sur $\mathbf{T}^r(\mathbf{R})$ (desormais, nous écrirons $\mathbf{T}$ à la place de $\mathbf{T}^r(\mathbf{R})$), et λ est equivariante.

Définition: Un groupe arithmétique Γ est un sous-groupe de $G(K)$ commensurable à $G(A)$. (Pour quelques énoncés, il est préférable d'utiliser une définition plus restrictive, voir [4].)

Un tel Γ est discret dans $G(K_\infty)$ avec covolume fini. Il opère sur $\mathbf{T}$ avec des stabilisateurs finis, et l'on a $H^*(\Gamma, \mathbf{Q}) = H^*(\Gamma\backslash\mathbf{T}, \mathbf{Q})$.

Théorème: (Harder, Stuhler):

(i) $\Gamma\backslash\mathbf{T}$ est un complexe cellulaire, equivalent à homotopie près à un complexe fini (ce qui implique $h^i(\Gamma) := \dim H^i(\Gamma,\mathbf{Q}) < \infty$).

(ii) $h^i(\Gamma) = 0$ pour $i \neq 0, r-1$ [9].

(iii) Si Γ est assez petit, on peut calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré (i.e. $h^{r-1}(\Gamma)$) "explicitement" [11].
On aimerait aussi calculer $h^*(\Gamma)$ pour tous les Γ, mais, dans le cas général, la non-p-torsion de Γ dérange.
$\Gamma\backslash\Omega^r$ est l'espace analytique associé à une variété algébrique affine M_Γ sur C [1]. Bornons-nous pour l'instant au cas r = 2. Alors, M_Γ est une courbe non-singulière dont la compactification non-singuliere $\overline{M}_\Gamma$ est de genre

$$(*) \qquad g(\overline{M}_\Gamma) = h^1(\Gamma).$$

<u>Théorème</u> (voir [3]): $g(\overline{M}_\Gamma)$ est donné par une formule explicite, pour divers groupes Γ.
L'egalite (*) résulte du calcul de $H^1_{et}(\Omega^r,\mu_n)$, cohomologie étale des espaces analytiques. Malhereusement, la théorie de H^i_{et} n'est developpée que pour i = 0 ou 1!

<u>2. Formes modulaires.</u> Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G(K_\infty)$.
<u>Définition:</u> Une forme modulaire de poids k de Γ est une fonction f sur Ω^r, à valeurs dans C, qui a les propriétés suivantes:
(i) Pour $\gamma\in\Gamma$, $\gamma=(\gamma_{i,j})$ et $z=(z_1,..z_{r-1})$ (coordonnées inhomogènes), on a $f(\gamma z) = \alpha(\gamma,z)^k f(z)$ avec le facteur d'automorphie

$$\alpha(\gamma,z) = \sum_{1\le i\le r-1} \gamma_{r,i}z_i + \gamma_{r,r}.$$

(ii) f est holomorphe sur Ω^r.
(iii) f est holomorphe à l'infini.
Il faut préciser la condition (iii). En gros, elle dit qu'il existe une compactification canonique $\overline{M}_\Gamma$ de $M_\Gamma = \Gamma\backslash\Omega^r$, et que f possède un prolongement comme séction d'un fibré vectoriel inversible sur $\overline{M}_\Gamma$.
L'existence d'un tel $\overline{M}_\Gamma$ n'est pas évidente, sauf dans le cas r = 2.
(Pour une définition intrinsèque, voir [6].)
La théorie n'est pas vide, comme le montrent des exemples:
a) Séries d'Eisenstein-Goss:

$$E^{(k)}(z) = \sum_{0\neq a\in A^r} (a_1z_1+..a_{r-1}z_{r-1}+a_r)^{-k}$$

est modulaire de poids k pour $\Gamma = G(A)$. On peut remplacer le réseau A^r dans K^r par un réseau (sous-A-module projectif de rang r) $Y\subset K^r$ arbitraire pour obtenir des formes pour $\Gamma = GL(Y)$. Soit $u\in K^r$, non dans Y. Supposons $u\in \mathfrak{n}^{-1}Y$ avec un ideal $\mathfrak{n}$ de A. Alors

$$E_u^{Y,(k)}(z) = \sum_{\substack{a \in K^r \\ a \equiv u \bmod Y}} (a_1 z_1 + .. a_{r-1} z_{r-1} + a_r)^{-k}$$

est modulaire pour le groupe $\Gamma(Y,\mathfrak{n}) =$ noyau de $GL(Y) \longrightarrow GL(Y/\mathfrak{n}Y)$.

b) Certaines fonctions qui viennent de la théorie des modules de Drinfeld [4].

Dans quelques cas (i.e. $r = 2$), on peut complètement déterminer l'algèbre des formes modulaires de Γ [7,4].

3. Fonctions zêta partielles. Soit $\zeta_K(s) = Z_K(S)$ ($s \in \mathbf{C}$, $S = q^{-s}$) la fonction zêta complexe et g le genre de K. Les résultats suivants sont bien connus:

(i) $Z(S)$ est une fonction rationnelle $P(S)/(1-S)(1-qS)$ en S.

(ii) Le polynôme P est de degre 2g, satisfait à $P(0) = 1$, $P(1) =$ nombre des points rationnels de la Jacobienne de K et $P(X) = q^g X^{2g} P(1/qX)$.

Posons $\zeta_A(s) = Z_A(S) = Z_K(S)(1-S^\delta) = \sum_{0 \neq \mathfrak{n} \subset A \text{ un idéal}} |\mathfrak{n}|^{-s}$.

De même, pour une classe $(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Pic}(A)$, posons $\zeta_{(\mathfrak{m})}(s) = \sum |\mathfrak{n}|^{-s}$, la somme étant étendue sur les $\mathfrak{n}$ dans $(\mathfrak{m})$. Enfin, pour un idéal fractionnaire $\mathfrak{n}$ et pour $a \in K$, posons $\zeta_{a,\mathfrak{n}}(s) = \sum_{x \in K, x \equiv a \bmod \mathfrak{n}} |x|^{-s}$.

Alors, avec des notations évidentes, on a les relations

(o) $(q-1)Z_{(\mathfrak{m}^{-1})}(S) = S^{-\deg \mathfrak{m}} Z_{0,\mathfrak{m}}(S)$

(i) $Z_{a,\mathfrak{n}} = Z_{b,\mathfrak{n}}$ $\qquad a \equiv b \bmod \mathfrak{n}$

(ii) $\sum_{a \bmod \mathfrak{n}, a \equiv b \bmod \mathfrak{m}} Z_{a,\mathfrak{n}} = Z_{b,\mathfrak{m}}$ $\qquad \mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$

(iii) $Z_{ta,t\mathfrak{n}} = S^{\deg t} Z_{a,\mathfrak{n}}$ $\qquad t \in K^*$

qui disent que les $Z_{*,*}$ définissent une distribution. En évaluant ces fonctions, par exemple en $s = 1-r$, on obtient d'autres distributions.

4. Le cas $r = 1$. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal fractionnaire de A. A $\mathfrak{n}$ on associe

a) la "fonction exponentielle" $e_{\mathfrak{n}}: C \longrightarrow C$,

$$z \longmapsto z \prod_{0 \neq a \in \mathfrak{n}} (1 - z/a)$$

b) l'invariant $\xi(\mathfrak{n})$ de Hayes de $\mathfrak{n}$ [10].

Ce dernier est un nombre dans C^*, défini à une racine de l'unité près, analogue a $2\pi i \in \mathbf{C}^*$. (Pour des formules soulignant cette analogie, voir [4].) On a

$$\xi(t\mathfrak{n}) = t^{-1}\xi(\mathfrak{n}) \qquad (t \in K^*).$$

Posons, pour a dans $K-\mathfrak{n}$,

$$g_a^{\mathfrak{n}} = \xi(\mathfrak{n})e_{\mathfrak{n}}(a).$$

Par construction, les $g_a^{\mathfrak{n}}$ sont des entiers algébriques sur K, ce sont des points de torsion du module de Drinfeld normalisé associé à $\mathfrak{n}$.

<u>Théorème</u> [10,4]: On a $|g_a^{\mathfrak{n}}| = q^{Z'_{a,\mathfrak{n}}(1)}$ et $|\xi(\mathfrak{n})| = q^{Z'_{0,\mathfrak{n}}(1)}$.

<u>Corollaire:</u> Les conjectures abéliennes de Brumer, Stark, Mazur pour les corps de fonctions sont vraies.

Pour l'énoncé des conjectures et une autre démonstration, due a Deligne et Tate, voir [12]. La conclusion "théorème implique corollaire" est aussi demontrée dans [10]. L'avantage de cette démonstration est la construction explicite (par des méthodes analytiques!) d'une fonction ayant le diviseur principal préscrit par les conjectures.

<u>5. Le cas r = 2.</u> Comme dans le cas r =1, nous avons une relation entre points de torsion des modules de Drinfeld de rang r = 2, et la distribution des valeurs des fonctions zêta en s = 1-r = -1.

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G(K_\infty)$, avec G = GL(2). Les pointes de Γ, i.e. les points de $\overline{M}_\Gamma$ non dans M_Γ, sont parametrées par l'ensemble fini $\Gamma\backslash\mathbf{P}^1(K)$. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas $\Gamma = G(A)$. Une forme modulaire f de Γ satisfait à $f(z+a) = f(z)$ si $a \in A$, de même que $e_A(z)$. Posons

$$t(z) = \xi(A)^{-1}e_A^{-1}(z).$$

Alors, t est une uniformisante de $\overline{M}_\Gamma$ en la pointe ∞, analogue à $q(z) = \exp(2\pi iz)$ dans le contexte des formes modulaires classiques.

Posons enfin, pour $0 \neq a \in A$ et le réseau $Y = A^2$

$$\Delta_a(z) = \prod_{0\neq u \in a^{-1}Y/Y} E_u^{Y,(1)}(z).$$

C'est une forme modulaire de poids $q^{2\deg a}-1$ de Γ sans zéros sur Ω^2.

<u>Théorème:</u> Pour chaque idéal nonzéro $\mathfrak{g}$ de A, il existe un polynôme $R_{\mathfrak{g}}$ dans $\tilde{B}_{\mathfrak{g}}[X]$ (où $\tilde{B}_{\mathfrak{g}}$ est l'anneau des entiers d'une extension finie abélienne de K), de la forme

$$R_{\mathfrak{g}}(X) = 1 + \sum a_i X^{q^{\deg \mathfrak{g}}-q^i}, \qquad \text{tel que}$$

$$\Delta_a(z) = \theta\xi(A)^{q^{2d}-1}t^k \prod_{\mathfrak{g}\subset A \text{ idéal principal}} R_{\mathfrak{g}}^{(q^{2d}-1)(q-1)}(t),$$

avec $d = \deg a$, $\theta \in k^*$, $k = -(q^{2d}-1)(q-1)\zeta_{(A)}(-1)$,

le produit convergeant pour $|t|$ assez petit.
En fait, il existent des produits analogues

- pour des formes modulaires plus générales que Δ_a;
- pour des groupes Γ plus généraux que $G(A)$;
- pour des pointes differentes de $\infty \in \Gamma\backslash\mathbf{P}^1(K)$ (voir [4]).

Notons seulement le

<u>Théorème:</u> Soit Y un réseau dans K^2, $\mathfrak{n}$ un idéal, $u \in \mathfrak{n}^{-1}Y$ non dans Y, ν dans $G(K)$ tel que $Y\nu = \mathfrak{a}(1,0)+\mathfrak{b}(0,1)$ pour des idéaux fractionnaires $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A, $u\nu = (u_1,u_2)$. Alors, comme forme modulaire de $\Gamma(Y,\mathfrak{n})$, $E_u^{Y,(1)}$ a un zéro d'ordre $q^{\deg\mathfrak{n}-\deg\mathfrak{a}}(Z_{u_1,\mathfrak{a}}(q)-Z_{0,\mathfrak{a}}(q))$ en la pointe correspondant à $\nu(\infty)$.

<u>Corollaires et remarques:</u> (i) Pour tous les coefficients de Laurent de Δ_a (et les autres produits en question), il n'y a qu'un nombre fini de facteurs qui interviennent. Ainsi, les coefficients de $\xi(A)^{1-q^{2d}}\Delta_a$ sont des entiers algébriques.

(ii) Pour chaque sous-groupe de congruence Γ de $G(A)$, les pointes engendrent un groupe fini dans la Jacobienne de $\overline{M}_\Gamma$. (On peut construire assez des fonctions modulaires dont les diviseurs sont concentrés dans les pointes.)

(iii) En utilisant la relation entre differentielles et formes modulaires et la connaissance du diviseur de Δ_a, on peut calculer $g(\overline{M}_\Gamma)$ [3].

(iv) Il faut comparer le produit pour Δ_a avec

$$\Delta = (2\pi i)^{12}q\prod(1-q^n)^{24} \ !$$

(v) On peut voir que les cas $r = 1$ et $r = 2$ sont complètement analogues en ce sens que la distribution construite à partir des points de torsion des modules de Drinfeld de rang r s'identifie à celle construite à partir de $\zeta_{*,*}(1-r)$.

<u>6. Le cas general $r \geq 2$.</u> Si l'on veut obtenir des formules explicites pour $h^*(\Gamma)$ (Γ arithmétique dans $G(K)$, $G = GL(r)$), il faut disposer

a) d'une compactification canonique $\overline{M}_\Gamma$ de M_Γ ;

b) d'une théorie l-adique étale H^*_{et} des espaces analytiques comme indiqué dans [2], avec les propriétés usuelles: théorèmes de changement de base propre, Künneth, GAGA, qui donne des "bonnes" valeurs sur des "bons" espaces. Alors, après avoir calculé $H^*_{et}(\Omega^\Gamma)$ resp. $H^*_{et}(\lambda^{-1}(\text{simplexe de } \mathcal{T}^\Gamma))$, on peut relier $H^*(\Gamma)$ et $H^*(\overline{M}_\Gamma)$, et, de façon analogue, réduire le calcul de $h^*(\Gamma)$ à des questions sur les formes modulaires de Γ, qui sont bien traitables. Le conférencier, n'étant pas spécialiste d'analyse rigide, se détourne de b), mais propose d'étudier cette question.

En ce qui concerne a), nous avons le

Théorème: (i) Il existe une "compactification de Satake" de M_Γ, i.e. une C-variété algébrique projective, normale, virtuellement non-singulière $\overline{M}_\Gamma$ et une immersion ouverte, dense $M_\Gamma \hookrightarrow \overline{M}_\Gamma$ qui est une compactification minimale de M_Γ;

(ii) les composantes irreductibles de $\overline{M}_\Gamma - M_\Gamma$ sont des diviseurs, isomorphes a $\overline{M}_{\Gamma'}$, ou Γ' est un sous-groupe arithmétique de $GL(r-1,K)$. Elles sont en bijection avec l'ensemble fini $\Gamma \backslash \mathbf{P}^{r-1}(K)$;

(iii) les séries d'Eisenstein-Goss de Γ ont un prolongement à $\overline{M}_\Gamma$;

(iv) pour les ordres des $E^{(k)}$ le long des diviseurs cuspidales de (ii), on a des résultats analogues à ceux où r égale 1 ou 2 (i.e. ordre $\approx$ valeur des fonctions zêta partielles en $s = 1-r$).

La démonstration est de nature analytique: Par un procédé inductif, on colle les composantes de dimension i-1 à celles de dimension i, à l'aide des formes modulaires. Un autre outil est la théorie de réduction sur $\Gamma \backslash \mathcal{I}^r$ présentée dans [8].

Bibliographie:

[1] V.G. Drinfeld: Des modules elliptiques (en russe). Math. Sbornik 94, 594-627, 1974. Traduction anglaise: Math.USSR-Sbornik 23 N° 4, 561-592 1976

[2] J. Fresnel - M. Van der Put: Géométrie Analytique Rigide. Progress in Mathematics 18. Birkhäuser 1981

[3] E.U. Gekeler: Le genre des courbes modulaires de Drinfeld. C.R.Acad. Sc. Paris, t. 300, série I n° 19, 1985

[4] E.U. Gekeler: Drinfeld'sche Modulkurven. A paraître

[5] O. Goldman-N. Iwahori: The space of p-adic norms. Acta Math. 109, 137-177, 1963

[6] D. Goss: π-adic Eisenstein Series for Function Fields. Comp. Math. 41, 3-38, 1980

[7] D. Goss: Modular Forms for $\mathbf{F}_r[T]$. J. reine angew. Math 317, 16-39, 1980

[8] G. Harder: Minkowski'sche Reduktionstheorie über Funktionenkörpern. Inv. Math. 7, 33-54, 1969

[9] G. Harder: Die Kohomologie S-arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern. Inv. Math. 42, 135-175, 1977

[10] D. Hayes: Stickelberger Elements in Function Fields. Comp. Math. 55, 209-239, 1985

[11] U. Stuhler: On the cohomology of SL_n over rings of algebraic functions. Conférence à Oberwolfach, juin 1980

[12] J.Tate: Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en s=0. Progress in Mathematics 47. Birkhäuser 1984

Ernst-Ulrich Gekeler
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstrasse 4
D-5300 Bonn 1